

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
«МИФИ»

УДК 524.83

ОТЧЕТ  
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ  
ОБОБЩЕННЫЙ ЛАГРАНЖИАН  
АКСИОНОПОДОБНЫХ ЧАСТИЦ (ALP'S)

Научный руководитель

\_\_\_\_\_ М.Ю. Хлопов

Консультант

\_\_\_\_\_ М.А. Краснов

Студент

\_\_\_\_\_ С.Д. Франк-Каменецкая

Москва 2026

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Некоторые космологические модели</b>	<b>4</b>
2.1	Космологическая модель $\Lambda$ CDM . . . . .	4
2.2	Квинтэссенция . . . . .	4
2.3	Фантомное поле . . . . .	7
2.4	Тахионы . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Обобщенный лагранжиан</b>	<b>11</b>
3.1	Обобщенный лагранжиан . . . . .	11
3.2	Случай $\alpha \gg 1, \beta = 0$ . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Заключение</b>	<b>16</b>
<b>5</b>	<b>Приложение А</b>	<b>17</b>
	<b>Список использованных источников</b>	<b>17</b>

# 1. ВВЕДЕНИЕ

Аксион - легкая нейтральная частица, естественным образом возникшая вследствие нарушения  $CP$ -симметрии в ряде эффектов сильного взаимодействия, но не входящая в Стандартную Модель. [1] Масса аксиона зависит от температуры, однако при  $T < 10^{12}$  становится постоянной[2]:

$$m = \frac{f_\pi m_\pi}{f} \frac{\sqrt{m_d m_u}}{m_d + m_u}, \quad (1)$$

где  $f_\pi$  - амплитуда распада пиона,  $m_d$  и  $m_u$  - массы d-кварка и u-кварка,  $f$  - параметр распада аксиона. Позже было показано, что аксионоподобные частицы - псевдоскалярные частицы с независимыми массой и параметром распада, но показывающими аналогичное поведение - могут возникать в низкоэнергетических полевых теориях, вытекающих из теории струн. [3]. Аксионоподобные частицы одни из кандидатов на роль темной материи[4] [5]. Также поле аксионоподобных частиц малой массы может действовать как поле квинтэссенции [6].

Основная цель данной работы - исследовать поведение аксионоподобного поля, а также исследовать сводится ли полевая модель, описываемая обобщенным лагранжианом (22), к модели  $\Lambda CDM$ .

## 2. НЕКОТОРЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

### 2.1 Космологическая модель $\Lambda$ CDM

Основная современная космологическая модель, описывающая физику Вселенной –  $\Lambda$ CDM, где  $\Lambda$ -темная энергия, а CDM – холодная материя. Факт существования некоторой не барионной материи стал очевиден из детального анализа космологического нуклеосинтеза, позже получив подкрепления на основе экспериментальных данных о реликтовом излучении и т.д. Данная материя слабо взаимодействует с излучением, т.е. должна быть электрически нейтральной, а так же «холодной» – иметь сильно нерелятивистские скорости. [7] В 1998 г. было сделано фундаментальное открытие. Было обнаружено, что расширение Вселенной происходит не с замедлением, как полагали раньше, а с ускорением. [8] В рамках ОТО это объясняется существованием не барионной и не темной материи, а в некоторой иной материи обладающей большим отрицательным давлением. Ее носителем вообще не могут быть частицы — иначе она бы образовывала неоднородные структуры, что не соответствует наблюдениям. Этот странный вид материи, получивший название “темной энергии”, распределен в пространстве удивительно однородно, но ее присутствие сказывается на скорости разбегания галактик. Наиболее вероятные По последним данным барионная материя составляет 5% от общей плотности энергии Вселенной, темная материя – 26%, а остальные 69% приходятся на плотность темной энергии (плотность энергии вакуума). [9]

### 2.2 Квинтэссенция

Одна из моделей предложенных для описания динамики энергии вакуума – модель квинтэссенции. Она описывается каноническим скалярным полем

$\phi$ , минимально связанным с гравитацией. [10] Медленно меняющееся поле вдоль потенциала  $V(\phi)$  может привести к ускорению Вселенной. Уравнение состояния:

$$w_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)} \quad (2)$$

где параметр  $w_\phi > -1$ . Действие для такого поля имеет вид:

$$\mathcal{S} = \int \sqrt{-g} \left( \frac{\mathcal{R}}{2\kappa^2} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right) d^4x + \mathcal{S}_m \quad (3)$$

, где в качестве потенциала самодействия такого поля был рассмотрен потенциал аксионоподобного поля (ALP)  $V(\phi) = \Lambda^4(1 - \cos(\frac{\phi}{f}))$ . Плотность энергии такого поля имеет вид:

$$\rho_\phi = \rho_X + \rho_V = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \Lambda^4(1 - \cos(\frac{\phi}{f})) \quad (4)$$

Тогда уравнение Клейна-Гордона для данной системы:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (5)$$

, где

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \Lambda^4 \left( 1 - \cos \left( \frac{\phi}{f} \right) \right) \right) \quad (6)$$

Переходя к безразмерной переменной  $\theta = \frac{\phi}{f}$

$$\ddot{\theta} + 3\sqrt{\left[ \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{f^2 \dot{\theta}^2}{2} + \Lambda^4 (1 - \cos(\theta)) \right) \right]} \dot{\theta} + \frac{\Lambda^4}{f^2} \sin(\theta) = 0 \quad (7a)$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 \quad (7b)$$

$$\theta(0) = \pi + \delta, \delta \ll \pi \quad (7c)$$

При переходе к производной по  $m_\theta t = \frac{\Lambda^2 t}{f}$  уравнение принимает вид:

$$\ddot{\theta} + 3\sqrt{\frac{8\pi G}{3}}(f\dot{\theta})\sqrt{\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \cos(\theta) + 1 + \sin(\theta)} = 0. \quad (8a)$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 \quad (8b)$$

$$\theta(0) = \pi + \delta, \delta \ll \pi \quad (8c)$$

В данном случае  $m_\theta$  - масса аксионо-подобной частицы.

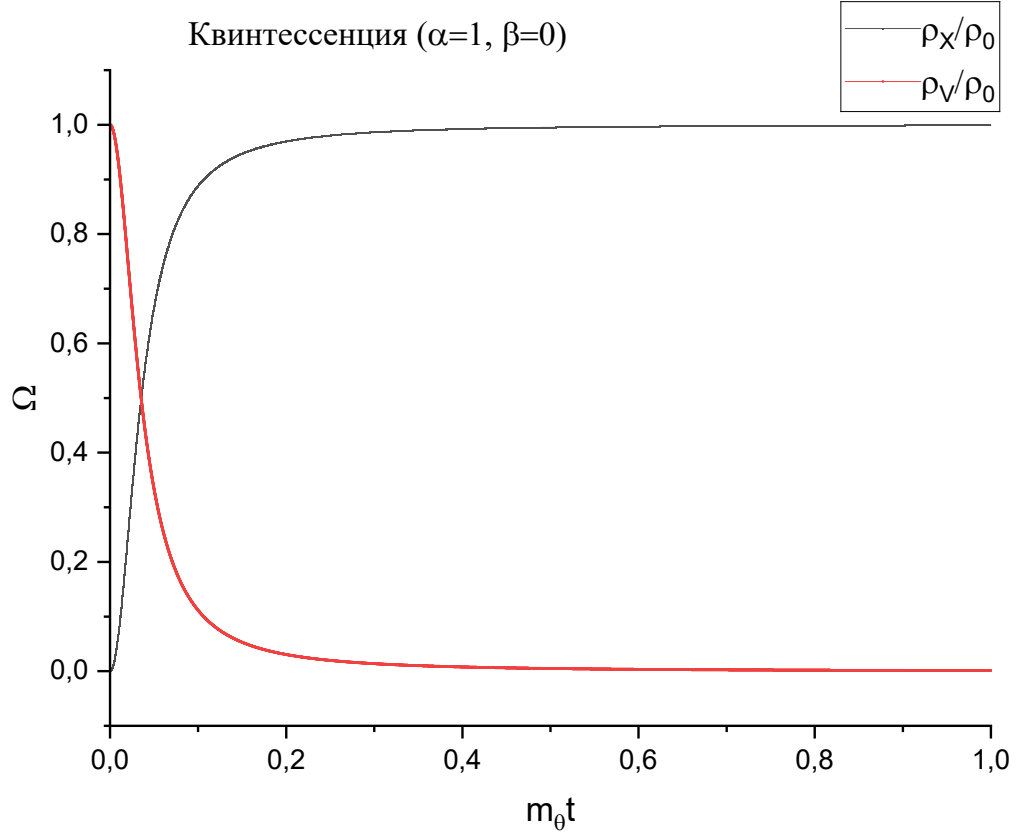


Рисунок 1 — Эволюция плотностей энергий для случая квинтессенции

По графику (рис.1) видно, что потенциальная компонента  $\rho_V$  ведет себя как релятивистское вещество (излучение), доминируя на ранних стадиях развития вселенной. Кинетическая же компонента  $\rho_X$  показывает поведение аналогичное темной энергии, доминируя на поздних временах.

## 2.3 Фантомное поле

Другая модель предложенная для описания динамики темной энергии – это модель фантомных полей. Она так же описывается аномальным скалярным полем  $\phi$ , медленно меняющимся вдоль потенциала, но в отличии от случая квинтесценции движется к максимуму (а не к минимуму). [5] Интересной особенностью такой модели является то, что с расширением плотность таких полей возрастает. Фантомные модели нарушают условие доминирующей энергии, поэтому они не могут быть физически стабильными моделями темной энергии, но, тем не менее, оказывается совместимой с большинством классических тестов космологии на основе текущих данных наблюдений [11].

Уравнение состояния:

$$w_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{-\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{-\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)} \quad (9)$$

где параметр  $w_\phi < -1$ . Действие для такого поля имеет вид:

$$\mathcal{S} = \int \sqrt{-g} \left( \frac{\mathcal{R}}{2\kappa^2} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right) d^4x + \mathcal{S}_m \quad (10)$$

, где в качестве потенциала самодействия такого поля был рассмотрен потенциал аксионоподобного поля (ALP)  $V(\phi) = \Lambda^4(1 - \cos(\frac{\phi}{f}))$ . Плотность энергии такого поля имеет вид:

$$\rho_\phi = \rho_X + \rho_V = -\frac{\dot{\phi}^2}{2} + \Lambda^4(1 - \cos(\frac{\phi}{f})) \quad (11)$$

Тогда уравнение Клейна-Гордона для данной системы:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - V'(\phi) = 0, \quad (12)$$

где

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( -\frac{\dot{\phi}^2}{2} + \Lambda^4 \left( 1 - \cos\left(\frac{\phi}{f}\right) \right) \right). \quad (13)$$

Переходя к безразмерной  $\theta = \frac{\phi}{f}$

$$\ddot{\theta} + 3\sqrt{\left[ \frac{8\pi G}{3} \left( -\frac{f^2 \dot{\theta}^2}{2} + \Lambda^4 (1 - \cos(\theta)) \right) \right]} \dot{\theta} - \frac{\Lambda^4}{f^2} \sin(\theta) = 0, \quad (14a)$$

$$\dot{\theta}(0) = 0, \quad (14b)$$

$$\theta(0) = \pi + \delta, \delta \ll \pi, \quad (14c)$$

При переходе к производной по  $m_\theta t = \frac{\Lambda^2 t}{f}$  уравнение принимает вид:

$$\ddot{\theta} + 3\sqrt{\frac{8\pi G}{3}}(f\dot{\theta})\sqrt{\left(1 - \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \cos(\theta)\right)} - \sin(\theta) = 0 \quad (15a)$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 \quad (15b)$$

$$\theta(0) = \pi + \delta, \delta \ll \pi. \quad (15c)$$

В данном случае  $m_\theta$  - масса аксионоподобной частицы.

По графику (рис.2) наглядно видно, что при  $0.35m_\theta t$  Вселенная претерпевает естественный для теорий фантомных полей "Большой разрыв".

## 2.4 Тахионы

Скалярное поле, меняющее плотность энергии вакуума, может описываться динамикой аксионоподобных тахионов. [12] Уравнение состояния в этом случае:

$$w_\phi \equiv \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \dot{\phi}^2 - 1 \quad (16)$$

Действие такого поля задается выражением:

$$\mathcal{S} = \int \sqrt{-g} \left( \frac{\mathcal{R}}{2\kappa^2} - V(\phi) \sqrt{1 - \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi} \right) d^4x + \mathcal{S}_m \quad (17)$$

Плотность энергии:

$$\rho_\phi = \rho_V + \rho_{X,V} = V(\phi) + \frac{\dot{\phi}^2}{2} V(\phi) \left( \frac{1}{1 - \dot{\phi}^2} \right) \quad (18)$$



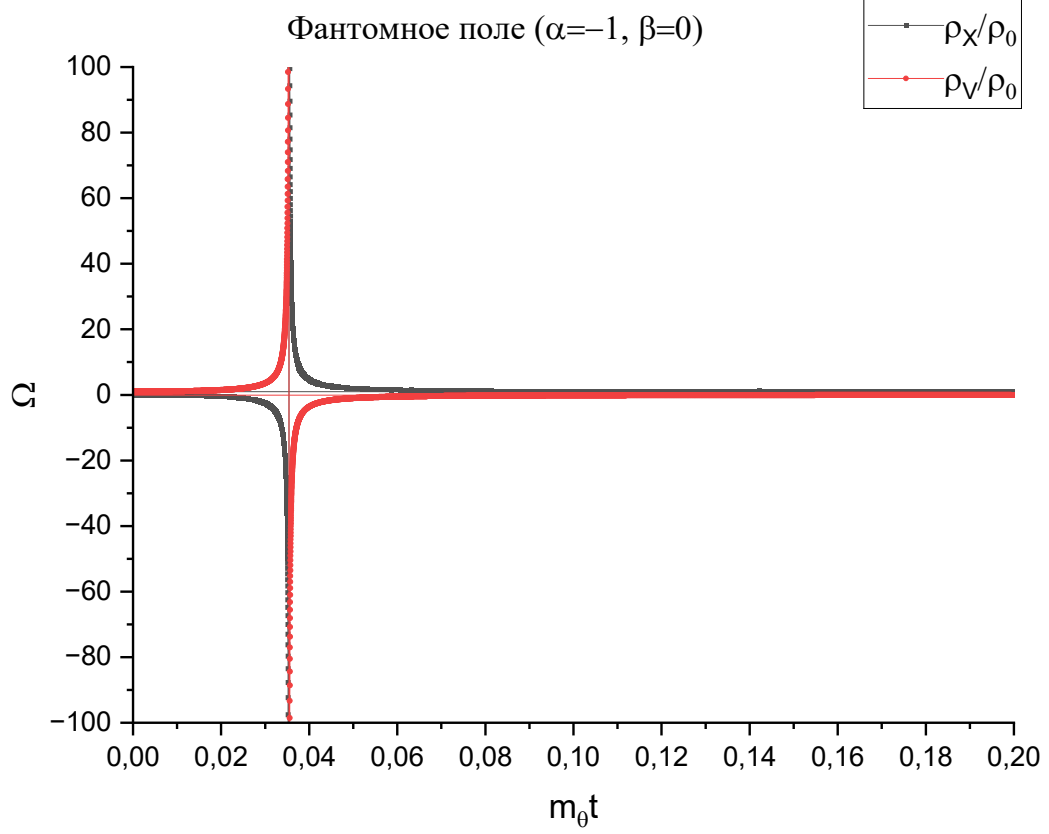


Рисунок 2 — Эволюция плотностей энергий для случая фантомного поля

Уравнение Клейна-Гордона:

$$\frac{\ddot{\phi}}{1 - \dot{\phi}^2} + 3H\dot{\phi} + \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} = 0 \quad (19)$$

, где

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( \Lambda^4 \left( 1 - \cos \left( \frac{\phi}{f} \right) \right) \left( 1 + \frac{1}{1 - \dot{\phi}^2} \right) \right) \quad (20)$$

Переходя к безразмерной  $\theta = \frac{\phi}{f}$  и производной по  $m_\theta t = \frac{\Lambda^2 t}{f}$  уравнение принимает вид:

$$\frac{\ddot{\theta}}{1 - \Lambda^4 \dot{\theta}^2} + 3\sqrt{\frac{8\pi G}{3}} f \dot{\theta} \sqrt{\frac{(1 - \cos(\theta))(2 - \Lambda^4 \dot{\theta}^2)}{2(1 - \Lambda^4 \dot{\theta}^2)}} + \frac{1}{\Lambda^4} \cot \frac{\theta}{2} = 0 \quad (21a)$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 \quad (21b)$$

$$\theta(0) = \pi + \delta, \delta \ll \pi. \quad (21c)$$

Плотность энергии смешанной компоненты ( $\rho_{X,V}$ ) для поля аксионоподобных

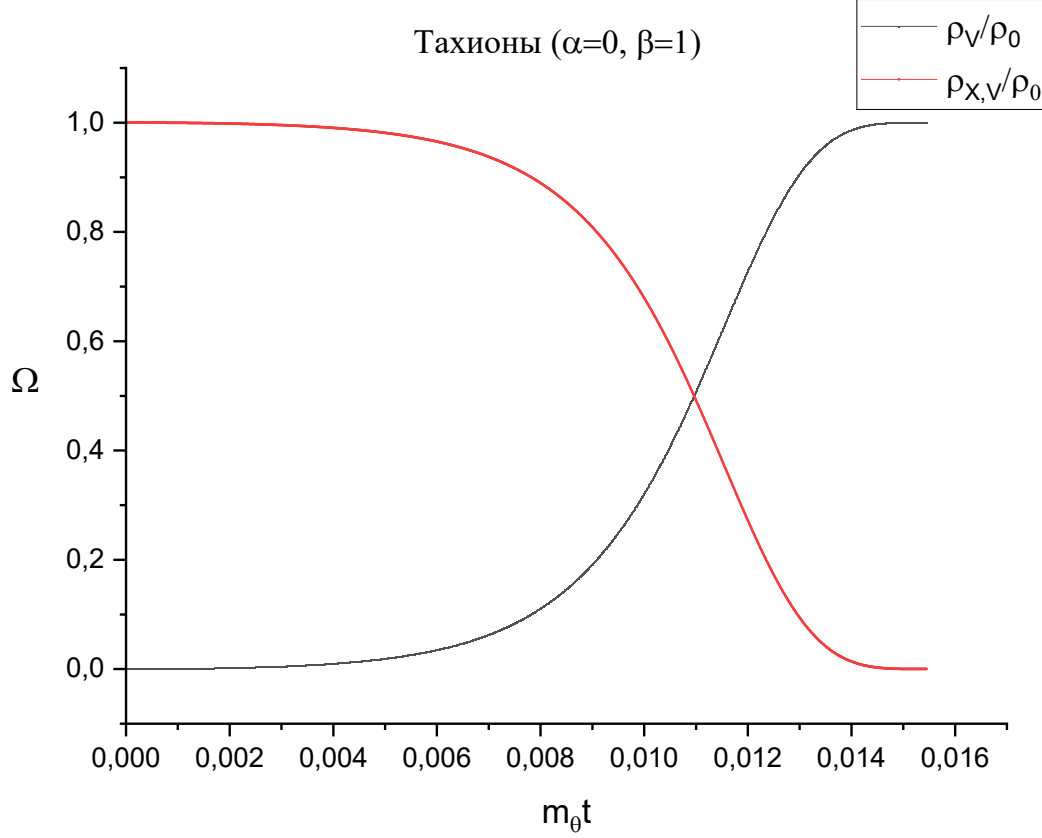


Рисунок 3 — Эволюция плотностей для тахионной динамики

тахионов ведет себя аналогично излучению, тогда как эволюцию потенциальной компоненты ( $\rho_V$ ) можно рассмотреть как эволюцию плотности темной энергии. Стоит отметить, что на больших временах (порядка  $200t_0$ ,  $t_0$  — современный возраст Вселенной) и заданных параметрах, поведение поля становится крайне неустойчивым, что может объясняться крайне неустойчивой природой тахионов.

## 3. ОБОБЩЕННЫЙ ЛАГРАНЖИАН

### 3.1 Обобщенный лагранжиан

Также был рассмотрен обобщенный лагранжиан, объединяющий все три указанные выше модели [13].

$$\mathcal{L}_X = \alpha X^{\alpha^2} - V(\phi) (1 - 2X)^{\beta/2} \quad (22)$$

где  $X = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$ ,  $\phi$  - скалярное поле,  $V(\phi)$  — потенциал самодействия поля,  $\partial_\mu \phi$  — частная производная скалярного поля по пространственно-временным координатам, а параметры  $\alpha$  и  $\beta$  вносят гибкость в модель, позволяя ей описывать различные формы темной энергии в зависимости от их следующих различных значений:

$$(\alpha, \beta) = \begin{cases} \alpha = 0, \beta = 1; & \text{Модель аксионоподобных тахионов} \\ \alpha = 1, \beta = 0; & \text{Модель квинтэссенции} \\ \alpha = -1, \beta = 0; & \text{Модель фантомных полей.} \end{cases} \quad (23)$$

Тогда плотность энергии и давление такого поля определяются выражениями:

$$\rho_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}_X}{\partial \dot{\phi}} - \mathcal{L}_X = (2\alpha^3 - \alpha) X^{\alpha^2} + V(\phi) (1 - 2X)^{\beta/2} \left[ 1 + \frac{2\beta X}{(1 - 2X)} \right] \quad (24a)$$

$$p_\phi = \mathcal{L}_X = \alpha X^{\alpha^2} - V(\phi) (1 - 2X)^{\beta/2} \quad (24b)$$

Полная плотность энергии имеет 3 компоненты: кинетическую ( $\rho_X$ ), потенциальную ( $\rho_V$ ) и смешанную ( $\rho_{(X,V)}$ ):

$$\rho_X = (2\alpha^3 - \alpha) X^{\alpha^2} \quad (25a)$$

$$\rho_V = V(\phi) \quad (25b)$$

$$\rho_{(X,V)} = \beta X V(\phi) \left( \frac{1 + 2X(1 - \beta)}{1 - 2X} \right) \quad (25c)$$

Уравнение Фрийдмана имеет вид:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_\phi \equiv \frac{8\pi G}{3} (\rho_X + \rho_V + \rho_{(X,V)}) \quad (26)$$

А уравнение Клейна-Гордона (движения):

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} \dot{\phi} & \left[ \alpha^2 (2\alpha^3 - \alpha) \left( \frac{\dot{\phi}^2}{2} \right)^{\alpha^2 - 1} + \frac{V(\phi)(1 - \dot{\phi}^2)^{\beta/2} \beta}{1 - \dot{\phi}^2} \left( 1 + \frac{(2 - \beta)\dot{\phi}^2}{1 - \dot{\phi}^2} \right) \right] \\ & + 3H \left[ 2\alpha^3 \left( \frac{\dot{\phi}^2}{2} \right)^{\alpha^2} + \frac{\beta \dot{\phi}^2 V(\phi)(1 - \dot{\phi}^2)^{\beta/2}}{1 - \dot{\phi}^2} \right] \\ & + \frac{dV}{d\phi} \left[ \dot{\phi} (1 - \dot{\phi}^2)^{\beta/2} \left( 1 + \frac{\beta \dot{\phi}^2}{1 - \dot{\phi}^2} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Параметры уравнения состояния для каждой из плотностей энергии:

$$w_X = \frac{1}{2\alpha^2 - 1} = \text{const} \quad (28a)$$

$$w_V = -1 = \text{const} \quad (28b)$$

$$w_{X,V} = \begin{cases} \frac{1 - \dot{\phi}^2}{1 + \dot{\phi}^2}, & \text{для } \beta = 0 \\ 1 - \dot{\phi}^2, & \text{для } \beta = 1 \end{cases} \quad (28c)$$

### 3.2 Случай $\alpha \gg 1$ , $\beta = 0$

Рассмотрена модель с параметрами лагранжиана (20)  $\alpha \gg 1$ ,  $\beta = 0$ . Тогда параметр уравнения состояния:

$$w_X = \frac{1}{2\alpha^2 - 1} \longrightarrow 0 \quad (29a)$$

$$w_V = -1 = \text{const} \quad (29b)$$

Существование такого поля действительно может объяснять изменение плотности энергии вакуума. Уравнение (25) в данном случае после замены  $\phi = f\theta$  и перехода к производной по  $m_\theta t$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}\dot{\phi} \left[ \alpha^2(2\alpha^3 - \alpha) \left( \frac{\dot{\phi}^2}{2} \right)^{\alpha^2-1} + \frac{V(\phi)(1 - \dot{\phi}^2)^{\beta/2}\beta}{1 - \dot{\phi}^2} \left( 1 + \frac{(2 - \beta)\dot{\phi}^2}{1 - \dot{\phi}^2} \right) \right] \\ + 3H \left[ 2\alpha^3 \left( \frac{\dot{\phi}^2}{2} \right)^{\alpha^2} + \frac{\beta\dot{\phi}^2 V(\phi)(1 - \dot{\phi}^2)^{\beta/2}}{1 - \dot{\phi}^2} \right] \\ + \frac{dV}{d\phi} \left[ \dot{\phi}(1 - \dot{\phi}^2)^{\beta/2} \left( 1 + \frac{\beta\dot{\phi}^2}{1 - \dot{\phi}^2} \right) \right] = 0 \quad (30) \end{aligned}$$

Уравнение движения для  $\alpha \gg 1$  и  $\beta=0$  с потенциалом ALP имеет вид:

$$\alpha^2(2\alpha^3 - \alpha)\ddot{\phi}\dot{\phi} \left( \frac{\dot{\phi}^2}{2} \right)^{\alpha^2-1} + 6\alpha^3 H \left( \frac{\dot{\phi}^2}{2} \right)^{\alpha^2} + \frac{dV}{d\phi}\dot{\phi} = 0 \quad (31)$$

Перепишем уравнение в виде:

$$\ddot{\theta} + \frac{3H}{2\alpha^2 - 1}\dot{\theta} + \frac{\Lambda a^4}{f^2\alpha^2(2\alpha^3 - \alpha)}\sin(\theta) \left( \frac{\dot{\theta}^2}{2} \right)^{1-\alpha^2} = 0 \quad (32)$$

, где

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( 2\alpha^3 \left( \frac{\dot{\phi}^2}{2} \right)^{\alpha^2} + \Lambda^4 \left( 1 - \cos \left( \frac{\phi}{f} \right) \right) \right) \quad (33)$$

В общем случае уравнение (31) аналитического решения не имеет. Применение численных, в том числе неявных, схем для жестких систем также не дали удовлетворительного результата.

Потенциал  $V(\theta) = \Lambda_a^4(1 - \cos(\theta))$  "заморожен" в точке максимума  $\theta \approx \pi$ . После того, как  $H^2 \approx m_a^2$  потенциал приходит в режим медленного катывания (slow-roll), поле начинает осциллировать [14]. В режиме медленного скатывания велико трение, поэтому, по аналогии с классическим подходом к уравнению:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (34)$$

, где для режима медленного скатывания:

$$H\dot{\phi} \approx -\frac{dV}{d\phi} \quad (35)$$

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{3H}{2\alpha^2 - 1}\dot{\theta} \approx -\frac{\Lambda a^4}{f^2\alpha^2(2\alpha^3 - \alpha)}\sin(\theta) \left(\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right)^{1-\alpha^2} \quad (36)$$

Уравнение вида:

$$C\sqrt{1 - \cos(y)} = \sin(y) (\dot{y})^{1-2\alpha^2} \quad (37)$$

Сводится к интегралу (при  $\alpha = 5$ ):

$$\int \left( \frac{\sqrt{1 - \cos y}}{\sin y} \right)^{\frac{1}{49}} dy = C_0 t + C_1 \quad (38)$$

Интеграл сводится к

$$C_0 t + C_1 \approx -2 \left| \sin \left( \frac{y}{2} \right) \right| {}_2F_1(1/2, 25/49, 3/2, \sin^2 \frac{y}{2}) \quad (39)$$

, где  ${}_2F_1(1/2, 25/49, 3/2, \sin^2 (\frac{y}{2}))$  - гипергеометрическая функция,  $C_1 \approx -\pi$  из начальных условий,  $C_0 = \frac{2^{2\alpha^2-2}\Lambda^8 M_{Pl}}{\alpha^3 \hbar \sqrt{24\pi}}$

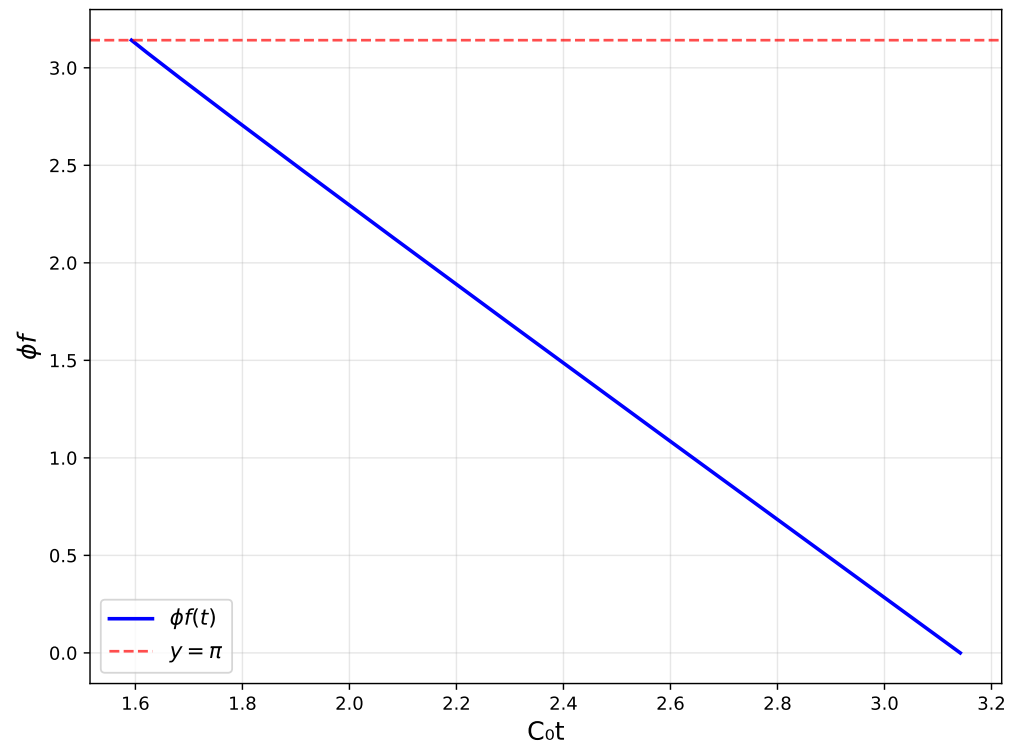


Рисунок 4 — Эволюция поля в режиме медленного скатывания

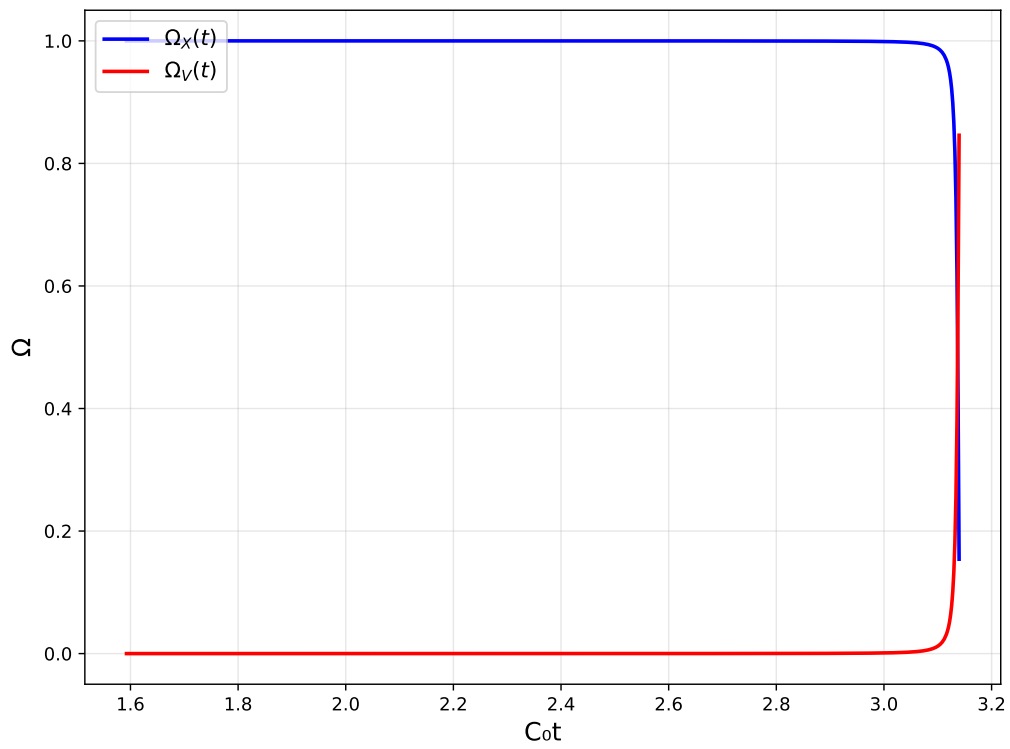


Рисунок 5 — Эволюция плотностей в режиме медленного скатывания

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе научно-исследовательской работы было проведено ознакомление с феноменом аксионоподобных частиц, теориями и моделями современной космологии. Были получены графики эволюции плотностей энергии для моделей описания динамики скалярного поля, изменяющими значение плотности энергии вакуума (темной энергии), однако, ни одна из теорий не дала полностью удовлетворительного, физически интерпретируемого результата.

Так как численные методы для уравнения движения ALP's с параметризованным лагранжианом не дают результатов, было проведено исследование поведения поля в режиме медленного скатывания, получены графики эволюции плотностей энергии в вышеупомянутом приближении, которые могут описывать поведение темной материи и темной энергии. Дальнейшие этапы работы включают в себя исследование поведения поля в минимуме потенциала, исследование зависимости модели от параметров ALP's и рассмотрение случая  $\alpha \gg 1$  и  $\beta = 1$ .



## 5. ПРИЛОЖЕНИЕ А

При решении уравнения (30), приведенного к виду:

$$\ddot{\theta} + \sqrt{\frac{24\pi}{(2\alpha^2 - 1)^2 M_{Pl}^2}} \dot{\theta} \sqrt{2 \frac{\alpha^3}{f^{2\alpha^2}} \left(\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right)^{\alpha^2} + \Lambda^4 \left(1 - \cos\left(\frac{\phi}{f}\right)\right) + \frac{\Lambda^4 f^{\alpha^2-3}}{\alpha^2(2\alpha^3 - \alpha)} \sin(\theta) \left(\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right)^{1-\alpha^2}} = 0 \quad (40)$$

были использованы следующие неявные численные схемы для жестких систем:

### 1. ROS2, ROS4:

- как более простые в реализации написаны вручную, взрывной рост дает очень большую ошибку уже на первых итерациях;
- аналогичная ситуация при использовании данных методов из библиотеки SUNDIALS C++ (Lawrence Livermore National Laboratory[15]).

### 2. SDIRK2, SDIRK4:

- L-устойчивый, библиотека SUNDIALS, с адаптивным шагом;
- невозможно подобрать достаточно малый шаг интегрирования, чтобы ошибка не была критически большой.

### 3. BDF2:

- A-устойчивый, используется для более жестких задач, чем ROS и SDIRK;
- с адаптивным шагом, из библиотек SCIPy и SUNDIALS;
- аналогично SDIRK невозможно подобрать достаточно малый шаг.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Peccei R. D., Quinn H. R.* Constraints imposed by CP conservation in the presence of pseudoparticles // *Phys. Rev. D.* — 1977. — Сент. — Т. 16, вып. 6. — С. 1791—1797. — DOI: 10.1103/PhysRevD.16.1791.
2. *Weinberg S.* Космология / пер. И. Арефьева, В. Санюк. — М. : УРСС: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2013. — С. 608. — Пер. с англ.; Под ред. и с предисл. И.Я. Арефьевой, В.И. Санюка.
3. *Ratra B., Peebles P. J. E.* Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field // *Phys. Rev. D.* — 1988. — Июнь. — Т. 37, вып. 12. — С. 3406—3427. — DOI: 10.1103/PhysRevD.37.3406.
4. *Marsh D. J. E.* Axion Cosmology // *Physics Reports.* — 2016. — Т. 643. — С. 1—79. — DOI: 10.1016/j.physrep.2016.06.005. — arXiv:1510.07633.
5. *Caldwell R. R., Kamionkowski M., Weinberg N. N.* Phantom Energy and Cosmic Doomsday // *Physical Review Letters.* — 2003. — Авг. — Т. 91, № 7. — С. 071301. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.91.071301.
6. *Copeland E. J., Sami M., Tsujikawa S.* Dynamics of dark energy // *International Journal of Modern Physics D.* — 2006. — Т. 15, № 11. — С. 1753—1936. — DOI: 10.1142/S021827180600942X. — arXiv:hep-th/0603057.
7. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters / P. Collaboration, N. Aghanim [и др.] // *Astronomy & Astrophysics.* — 2020. — Т. 641. — A6. — DOI: 10.1051/0004-6361/201833910. — arXiv: 1807.06209 [astro-ph.CO].
8. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant / A. G. Riess [и др.] // *The Astronomical Journal.* — 1998. — Сент. — Т. 116, № 3. — С. 1009—1038. — DOI: 10.1086/300499.

9. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters / P. Collaboration [и др.] // Astronomy & Astrophysics. — 2020. — Сент. — Т. 641. — А6. — DOI: 10.1051/0004-6361/201833910.
10. *Caldwell R. R., Dave R., Steinhardt P. J.* Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation of State // Physical Review Letters. — 1998. — Февр. — Т. 80, № 8. — С. 1582—1585. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.80.1582.
11. *Di Valentino E., Melchiorri A., Silk J.* Planck evidence for a closed Universe and a possible crisis for cosmology // Nature Astronomy. — 2020. — Т. 4. — С. 196—203. — DOI: 10.1038/s41550-019-0906-9.
12. *Frolov A. V., Kofman L., Starobinsky A. A.* Prospects and problems of tachyon matter cosmology // Physics Letters B. — 2002. — Т. 545. — С. 8—16. — DOI: 10.1016/S0370-2693(02)02557-5.
13. Dynamics of scalar fields from a generalized form of Lagrangian / J. Kaur [и др.] // Nuclear Physics B. — 2025. — In press.
14. *Rubakov V. A., Gorbunov D. S.* Introduction to the Theory of the Early Universe: Hot Big Bang Theory. — 2nd. — Singapore : World Scientific, 2017. — ISBN 978-981-320-987-2. — DOI: 10.1142/10447.
15. *Lawrence Livermore National Laboratory.* SUNDIALS: Suite of Nonlinear and Differential/Algebraic Equation Solvers. — Беп. 6.6.0. — 2023. — Accessed: 2023-10-01.