

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

УДК 539.165.2

ОТЧЕТ  
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ  
РАСЧЁТ СПЕКТРОВ АНТИНЕЙТРИНО И  
БЕТА-ЧАСТИЦ ПРОДУКТОВ ДЕЛЕНИЯ  
ИЗОТОПОВ УРАНА И ПЛУТОНИЯ В  
РЕАКТОРАХ НА ТЕПЛОВЫХ И БЫСТРЫХ  
НЕЙТРОНАХ

Научный руководитель  
ассистент кафедры №40



\_\_\_\_\_ Д. В. Попов

Студент

\_\_\_\_\_ В. Н. Зайцев

Москва 2025

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Теоретическое обоснование модели</b>	<b>6</b>
1.1 Расчет вероятности $\beta$ -распада . . . . .	6
1.2 Функция Ферми . . . . .	7
1.3 Построение суммарного спектра изотопа . . . . .	8
1.4 Построение кумулятивного спектра изотопа . . . . .	10
1.5 Реконструирование позитронного спектра . . . . .	10
<b>2 Учет поправок к спектрам <math>\beta</math>-частиц и антинейтрино</b>	<b>13</b>
2.1 Поправка на конечный размер дочернего ядра . . . . .	13
2.2 Поправка на конечный размер родительского ядра . . . . .	14
2.3 Радиационные поправки . . . . .	15
2.4 Учет экранирования . . . . .	16
2.5 Слабый магнетизм . . . . .	17
2.6 «Эффект обмена» . . . . .	17
2.7 Запаздывание перестройки электронной оболочки . . . . .	18
2.8 Учет запрещенности переходов . . . . .	19
2.9 Влияние поправок на форму спектров . . . . .	21

<b>3</b>	<b>Расчет ошибок модельных спектров</b>	<b>24</b>
3.1	Расчет ошибок спектров отдельных изотопов . . . . .	24
3.2	Расчет ошибок кумулятивных спектров . . . . .	24
3.3	Расчет ошибок позитронных спектров . . . . .	25
<b>4</b>	<b>«Восстановление» неизвестных схем распадов</b>	<b>26</b>
<b>5</b>	<b>Анализ полученных спектров</b>	<b>27</b>
5.1	Сравнение спектров отдельных изотопов с экспериментальными данными . . . . .	27
5.2	Сравнение кумулятивных спектров с экспериментальными дан- ными . . . . .	29
	<b>Заключение</b>	<b>31</b>
	<b>Список использованных источников</b>	<b>33</b>

# ВВЕДЕНИЕ

Основной теоретической моделью современной физики является Стандартная модель (СМ), описывающая электромагнитное, слабое и сильное взаимодействие всех элементарных частиц. Последним на данный момент значительным подтверждением СМ стало открытие бозона Хиггса на Большом адронном коллайдере в 2012 году, что завершило формирование современной СМ.

Тем не менее, предсказания этой теоретической модели имеют некоторых расхождения с экспериментальными наблюдениями. Например, согласно модели, нейтрино должны быть строго безмассовыми, в то время как верхняя экспериментальная оценка суммы масс всех типов нейтрино составляет порядка 0,28 эВ [1]. Эта и некоторые другие проблемы нуждаются в решении для расширения СМ.

Существование нейтрино было предложено Паули еще в 1930 году, чтобы решить актуальную на тот момент проблему несохранения энергии и углового момента при ядерном  $\beta$ -распаде. Однако открытия нейтрино как частицы пришлось ждать до 1953-1959 годов, когда Фредерик Райнес и Клайд Коуэн [2; 3] обнаружили электронное антинейтрино, испускаемое ядерным реактором. В реакторах в процессе их работы образуются  $\beta$ -радиоактивные изотопы, в результате распада которых эти частицы возникают в больших количествах. Этот фундаментальный эксперимент положил начало исследованию нейтрино с помощью реакторных антинейтрино.

В самом общем случае все источники нейтрино можно разделить на 3 группы:

- Космические нейтрино;
- Нейтрино от естественных источников на Земле, возникающие в процессах бета-распада радионуклидов;

- Нейтрино от искусственных источников, к ним относятся реакторные антинейтрино и ускорительные нейтрино.

В настоящий момент наиболее интенсивными источниками антинейтрино являются ядерные реакторы. Для реакторных антинейтрино характерны энергии до 10 МэВ [4]. Их полный спектр формируется из парциальных спектров от всех распадающихся изотопов. При этом в связи с несовпадением теоретических и экспериментальных данных одной из основных проблем является формирование точной модели для расчета спектров.

Существует два основных подхода к расчету спектров реакторных антинейтрино: метод конверсии и метод прямого суммирования (метод *ab initio* – «из первых принципов»).

Метод конверсии был сформулирован и впервые применен в работах [5; 6; 7]. В моделях такого типа для получения спектра антринейтрино используются спектры бета-частиц, измеренные путем облучения мишеней  $^{235}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$  и  $^{241}\text{Pu}$  тепловыми нейтронами на реакторе Института Лауэ—Ланжевена (ILL, Франция) и мишени  $^{238}\text{U}$  быстрыми нейтронами на реакторе Технического университета Мюнхена (MII, Германия). Эти экспериментальные спектры делятся на некоторое количество виртуальных бета-переходов, парциальный спектр каждого из которых по отдельности конвертируется в парциальный спектр антинейтрино, после чего суммированием восстанавливаются изначальные кумулятивные антинейтринные спектры. Наиболее известные модели конверсии описаны в работах [8; 9; 10]. Все эти работы объединяет очень большая зависимость от истинности экспериментальных значений, полученных на реакторах ILL и MII. В связи с большим количеством замечаний по отношению к методике проведения эксперимента, невозможно однозначно утверждать об истинности полученных данных. Более того, для лучшего сходства моделей конверсии с другими экспериментами в них вводятся поправки на физические факторы, меняющие форму спектра, однако метод полагается на виртуальные переходы нефизичной природы, что можно расценивать как

противоречие внутри модели. Вышеописанные факторы осложняют предсказания спектров антинейтрино в рамках метода конверсии.

Второй метод – метод прямого суммирования – заключается в поэтапном сложении вкладов нескольких тысяч бета-переходов от всех продуктов распада исследуемых изотопов с учетом всей физики процесса  $\beta$ -распада. Такой подход позволяет прецизионно рассчитать спектры как одиночных переходов, так и кумулятивных спектров продуктов деления радиоизотопов, контролируя вклад каждого перехода и позволяя проводить расчет даже для тех изотопов, для которых нет измеренных спектров бета-частиц. На данный момент существует несколько *ab initio* моделей, наиболее известные из которых описаны в работах [11; 12; 13], однако ни в одной из них не был учтен полный набор факторов, которые могут повлиять на процесс бета-распада, что приводит к расхождению этих моделей с экспериментальными данными.

Таким образом, актуальной задачей является развитие новой теоретической *ab initio* модели для расчета спектров бета-частиц и антинейтрино.

**Цель** данной работы заключается в определении и развитии теоретической модели, по которой можно построить спектр бета-частиц и антинейтрино продуктов деления изотопов в активной зоне реактора методом прямого суммирования.

### **Задачи:**

- Получить кумулятивные спектры бета-частиц и антинейтрино от основных изотопов, используемых как топливо для ядерных реакторов ( $^{235}\text{U}$ ,  $^{238}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$ ,  $^{241}\text{Pu}$ );
- Сравнить кумулятивные спектры с экспериментальными спектрами и другими существующими моделями;
- При несовпадении модельных спектров с экспериментальными выяснить причины несоответствия.

# 1. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ МОДЕЛИ

## 1.1 Расчет вероятности $\beta$ -распада

Общая формула  $\beta$ -распада ядра с зарядовым числом  $Z$  и массовым числом  $A$  имеет следующий вид:



В связи с тем, что взаимодействие в этом процессе достаточно слабое (гораздо слабее электромагнитного [14]), для расчета вероятности  $\beta$ -распада можно применять методы теории возмущений.

Согласно золотому правилу Ферми вероятность перехода системы из начального состояния  $|i\rangle$  с энергией  $E_i$  в некоторое конечное состояние  $|f\rangle$  с энергией  $E_f$  в единицу времени при условии  $E_0 = E_f - E_i$  равна

$$dW_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f|H'|i\rangle|^2 d\rho|_{E=E_0}, \quad (1.2)$$

где  $H'$  – гамильтониан малого возмущения, приводящего к переходу, а  $d\rho$  – плотность конечных состояний на единицу энергии (статистический множитель).

Для  $\beta$ -распада в пренебрежении малой энергией отдачи ядра ( $\sim 15$  кэВ [15]) полная энергия распределяется между электроном и антинейтрино:

$$E_0 = E_e + E_{\bar{\nu}}. \quad (1.3)$$

Тогда статистический множитель можно представить в виде:

$$d\rho|_{E=E_0} = \left. \frac{d\tilde{N}}{dE} \right|_{E=E_0} = \frac{1}{dE} \frac{V d^3 \mathbf{p}_e V d^3 \mathbf{q}_{\bar{\nu}}}{(2\pi\hbar)^3 (2\pi\hbar)^3}, \quad (1.4)$$

где  $Vd^3\mathbf{p}_e/(2\pi\hbar)^3$  – число состояний электрона для значений импульса в интервале от  $\mathbf{p}_e$  до  $\mathbf{p}_e + d\mathbf{p}_e$ ,  $Vd^3\mathbf{q}_{\bar{\nu}}/(2\pi\hbar)^3$  – число состояний антинейтрино для значений импульса в интервале от  $\mathbf{q}_{\bar{\nu}}$  до  $\mathbf{q}_{\bar{\nu}} + d\mathbf{q}_{\bar{\nu}}$ .

Представив дифференциалы в виде

$$d^3\mathbf{p}_e = p_e^2 dp_e d\Omega_e, \quad (1.5a)$$

$$d^3\mathbf{q}_{\bar{\nu}} = q_{\bar{\nu}}^2 dq_{\bar{\nu}} d\Omega_{\bar{\nu}}, \quad (1.5b)$$

с учетом релятивистских соотношений, получим

$$p_e^2 dp_e = p_e E_e dE_e / c^2, \quad (1.6a)$$

$$q_{\bar{\nu}}^2 dq_{\bar{\nu}} = q_{\bar{\nu}} E_{\bar{\nu}} dE_{\bar{\nu}} / c^2. \quad (1.6b)$$

Подставляя полученные значения в (1.2) и интегрируя по углам для числа  $\beta$ - и  $\bar{\nu}$ -частиц с энергией в интервале от  $E$  до  $E + dE$  получим выражения:

$$dW_{if} = \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^5} |\langle f | H | i \rangle|^2 \sqrt{E_e^2 - m^2 c^4} E_e (E_0 - E_e)^2 dE_e, \quad (1.7a)$$

$$dW_{if} = \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^5} |\langle f | H | i \rangle|^2 \sqrt{(E_0 - E_{\bar{\nu}})^2 - m^2 c^4} (E_0 - E_{\bar{\nu}})^2 E_{\bar{\nu}}^2 dE_{\bar{\nu}}. \quad (1.7b)$$

## 1.2 Функция Ферми

Корректный расчет спектров  $\beta$ - и  $\bar{\nu}$ -частиц невозможен без учета влияния поля ядра. Это обстоятельство приводит к тому, что в выражения для  $\beta$ - и  $\bar{\nu}$ -спектров (1.7a, 1.7b) необходимо вводить множитель  $F(Z, E)$ , называемый функцией Ферми.

Функция Ферми  $F(Z, E)$  описывает кулоновское взаимодействие точечного дочернего ядра с  $\beta$ -электроном. Формально она определяется как [15]

$$F(Z, E_e) = \frac{|\Psi_U|^2}{|\Psi_0|^2}, \quad (1.8)$$

где  $\Psi_U$  – решение уравнения Дирака в электрическом поле ядра,  $\Psi_0$  – решение свободного уравнения Дирака.

Если принять дочернее ядро точечным, то можно записать функцию Ферми в явном виде [15]:

$$F_0(Z, E_e) = 2(\gamma + 1) \left( \frac{2p_e R}{\hbar c} \right)^{2(\gamma-1)} e^{(\frac{\pi \alpha Z E_e}{p_e})} \frac{|\Gamma(\gamma + \frac{i \alpha Z E_e}{p_e})|^2}{|\Gamma(2\gamma + 1)|^2}, \quad (1.9)$$

где  $\alpha = 1/137$  – постоянная тонкой структуры,  $p_e$  – импульс электрона,  $E_e$  – полная энергия вылетевшего электрона,  $R$  – радиус родительского ядра,  $Z$  – заряд дочернего ядра,  $\gamma = \sqrt{1 - (\alpha Z)^2}$ ,  $\Gamma(z)$  – гамма-функция Эйлера комплексной переменной.

Тогда форма спектра электронов в результате  $\beta$ -распада с учетом выражения (1.7a) может быть представлена в следующем виде [16]:

$$S_e(E_e; E_0, Z) = K p_e E_e (E_0 - E_e)^2 F_0(Z, E_e) C(Z, E_e, E_0), \quad (1.10)$$

где  $K$  – нормировочный множитель,  $E_0$  – энергия перехода,  $C(Z, E_e, E_0)$  – фактор формы, включающий в себя ядерный матричный элемент гамильтониана возмущения  $H'$  между конечным и начальным состояниями. Для разрешенных  $\beta$ -переходов  $C(Z, E_e, E_0) = 1$  [17].

Спектр антинейтрино  $S_{\bar{\nu}}(E_{\bar{\nu}}; E_0, Z)$  получается заменой  $E_e$  в формуле (1.10) на  $E_0 - E_{\bar{\nu}}$ :

$$S_{\bar{\nu}}(E_{\bar{\nu}}; E_0, Z) = S_e(E_0 - E_{\bar{\nu}}; E_0, Z). \quad (1.11)$$

### 1.3 Построение суммарного спектра изотопа

При построении суммарного спектра бета-частиц и антинейтрино при  $\beta$ -распаде конкретного изотопа необходимо учитывать вероятностный характер самого распада. Для большинства изотопов характерно наличие большого количества возможных  $\beta$ -переходов с разной степенью запрета и разной

энергией перехода. Каждый такой переход может произойти с некоторой вероятностью, определяемой его матричным элементом.

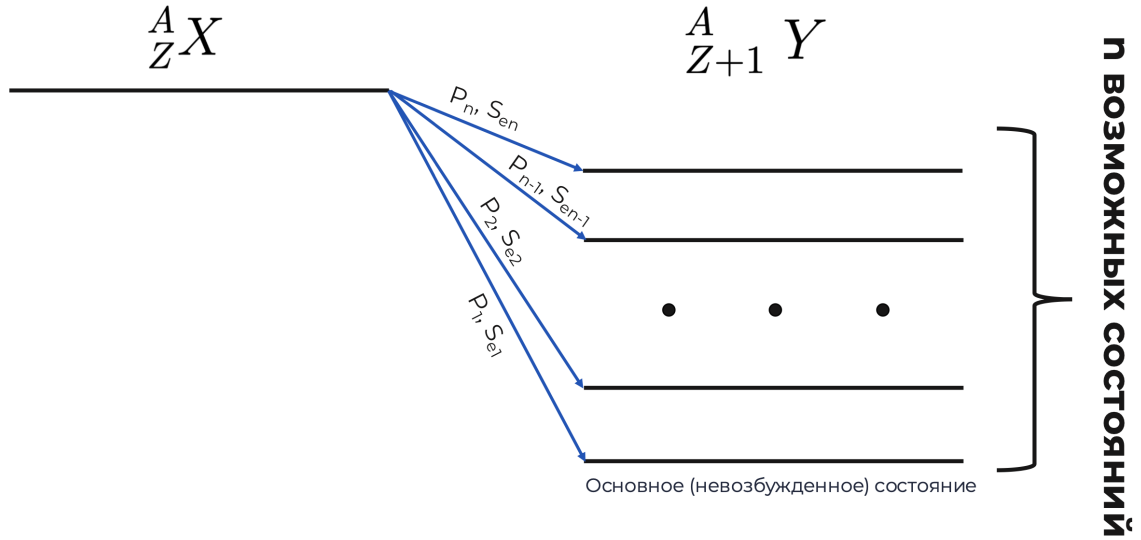


Рисунок 1 — Схема возможных  $\beta$ -переходов изотопа.

Для получения суммарного спектра необходимо просуммировать все одиночные спектры определенного изотопа с учетом вероятностей их реализации. При условии нормировки единичных спектров суммарный спектр также является отнормированным.

Таким образом, форму суммарных спектров бета-частиц и антинейтрино можно представить в следующем виде:

$$S_e^{iso} = \sum_{k=1}^n P_k S_{ek}, \quad (1.12)$$

$$S_{\bar{\nu}}^{iso} = \sum_{k=1}^n P_k S_{\bar{\nu}k}, \quad (1.13)$$

где  $n$  – количество возможных переходов,  $P_k$  – вероятность  $k$ -го перехода,  $S_{ek}$  и  $S_{\bar{\nu}k}$  – одиночные спектры  $k$ -го перехода (1.10, 1.11).

## 1.4 Построение кумулятивного спектра изотопа

Для получения кумулятивного спектра продуктов деления изотопа необходимо просуммировать спектры всех возможных дочерних ядер с учетом их кумулятивных выходов. Кумулятивный выход подразумевает под собой суммарную вероятность того, что нужное дочернее ядро получится либо в результате непосредственно деления материнского ядра, либо как продукт деления одного из его осколков.

Представить форму кумулятивных спектров бета-частиц и антинейтрино можно в следующем виде:

$$S_e^{tot} = \sum_j CY(Z, A) S_{ej}^{iso}, \quad (1.14)$$

$$S_{\bar{\nu}}^{tot} = \sum_j CY(Z, A) S_{\bar{\nu}j}^{iso}, \quad (1.15)$$

где  $CY(Z, A)$  — кумулятивный выход изотопа с зарядовым числом  $Z$  и массовым числом  $A$ , а суммирование проводится по всем продуктам распада.

## 1.5 Реконструирование позитронного спектра

С момента открытия в экспериментах на ядерном реакторе, детектирование антинейтрино осуществляется, в основном, по реакции обратного бета-распада (ОБР):

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+. \quad (1.16)$$

Позитронный спектр получается сверткой потока антинейтрино с дифференциальным сечением ОБР [18]:

$$\frac{dN_{e^+}}{dE_{e^+}}(E_{e^+}) = \epsilon N_p \int_{E_{\bar{\nu}} \min}^{E_{\bar{\nu}} \max} \Phi_{\bar{\nu}}(E_{\bar{\nu}}) \cdot \frac{d\sigma_{\text{IBD}}}{dE_{e^+}}(E_{e^+}, E_{\bar{\nu}}) dE_{\bar{\nu}}, \quad (1.17)$$

где  $\epsilon$  – эффективность регистрации,  $N_p$  – число протонов мишени,  $\Phi_{\bar{\nu}}$  – поток реакторных антинейтрино,  $\sigma_{\text{IBD}}$  – сечение реакции ОБР.

Связь потока реакторных антинейтрино с кумулятивным спектром антинейтрино можно представить в следующем виде:

$$\Phi_{\bar{\nu}}(E_{\bar{\nu}}) = \frac{1}{4\pi L^2} \sum_i N_{fis}^{(i)} S_{\bar{\nu}i}^{tot}(E_{\bar{\nu}}), \quad (1.18)$$

где  $N_{fis}^{(i)}$  – число делений  $i$ -го изотопа в реакторе в единицу времени,  $L$  – расстояние от детектора до реактора,  $S_{\bar{\nu}i}^{tot}$  – кумулятивный спектр антинейтрино (1.15)  $i$ -го изотопа.

Число делений связано с тепловой мощностью реактора следующим образом:

$$P_{th} = \sum_i N_{fis}^{(i)} \varepsilon_i = N_{fis} \sum_i \alpha_i \varepsilon_i = N_{fis} \langle \varepsilon \rangle, \quad (1.19)$$

где  $N_{fis}$  – полное число делений в реакторе в единицу времени,  $\alpha_i$  – доля делений  $i$ -го изотопа в смеси,  $\varepsilon_i$  – тепловая энергия, выделяемая при делении  $i$ -го изотопа,  $\langle \varepsilon \rangle$  – средняя тепловая энергия, выделяемая при одном делении в реакторе.

С учетом (1.19) можно переписать выражение (1.18) в более удобной форме:

$$\Phi_{\bar{\nu}}(E_{\bar{\nu}}) = \frac{P_{th}}{4\pi L^2 \langle \varepsilon \rangle} \sum_i \alpha_i S_{\bar{\nu}i}^{tot}(E_{\bar{\nu}}), \quad (1.20)$$

Тогда выражение для позитронного спектра можно привести к виду:

$$\frac{dN_{e^+}}{dE_{e^+}}(E_{e^+}) = \frac{\epsilon N_p P_{th}}{4\pi L^2 \langle \varepsilon \rangle} \sum_i \alpha_i \int_{E_{\bar{\nu} \min}^{E_{\bar{\nu} \max}}} S_{\bar{\nu}i}^{tot}(E_{\bar{\nu}}) \cdot \frac{d\sigma_{\text{IBD}}}{dE_{e^+}}(E_{e^+}, E_{\bar{\nu}}) dE_{\bar{\nu}}, \quad (1.21)$$

Деление на множитель перед интегралом позволяет перейти к более универсальной форме спектра, не зависящей от характеристик эксперимен-

тальной установки и конкретного реактора-источника:

$$S_{e^+}(E_{e^+}) = \sum_i \alpha_i \int_{E_{\bar{\nu}}^{\min}}^{E_{\bar{\nu}}^{\max}} S_{\bar{\nu}i}^{\text{tot}}(E_{\bar{\nu}}) \cdot \frac{d\sigma_{\text{IBD}}}{dE_{e^+}}(E_{e^+}, E_{\bar{\nu}}) dE_{\bar{\nu}}. \quad (1.22)$$

Такое представление спектра наиболее удобно для анализа и сравнения с экспериментальными данными, при этом  $S_{e^+}(E_{e^+})$  имеет размерность  $[\text{см}^2/(\text{деление}\cdot\text{МэВ})]$ .

Методы расчета дифференциального сечения ОБР представлены в работах [18; 19]. В системе покоя протона эта величина может быть выражена в явном виде:

$$\frac{d\sigma_{\text{IBD}}}{dE_{e^+}}(E_{e^+}, E_{\nu}) = 2m_p \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2}{2\pi(s - m_p^2)^2} |\mathcal{M}|^2 \quad (1.23)$$

при условии, что

$$E_{\bar{\nu}} \geq \frac{(m_n + m_e)^2 - m_p^2}{2m_p} \approx 1.806 \text{ МэВ}, \quad (1.24)$$

где  $G_F$  — постоянная Ферми слабого взаимодействия,  $V_{ud}$  —  $ud$ -элемент СКМ-матрицы смешивания,  $s = (p_p^i + p_{\bar{\nu}}^i)^2 = 2m_p E_{\bar{\nu}}$  — мандельштамовская переменная,  $p^i$  — 4-импульс,  $m_p, m_n, m_e$  — массы протона, нейтрона и электрона соответственно. Явный вид функции  $\mathcal{M}$  представлен в работе [19].

Реконструирование позитронного спектра позволяет проводить сравнение теоретической модели с экспериментальными данными (эксперименты RENO [20], DayaBay [21], PROSPECT [21] и др.).

## 2. УЧЕТ ПОПРАВOK К СПЕКТРАМ $\beta$ -ЧАСТИЦ И АНТИНЕЙТРИНО

Выражения (1.10) и (1.11) для формы спектров электронов и антинейтрино не учитывают всех тонкостей процесса  $\beta$ -распада и получены в грубом приближении с большим количеством упрощений. Для увеличения точности модели необходимо ввести к этим выражениям поправки, учитывающие те или иные физические факторы, влияющие на эти спектры. В целях соответствия литературе и упрощения вида формул все выводы и выражения, представленные в этой главе, приведены в рациональной системе единиц ( $\hbar = c = 1$ ).

### 2.1 Поправка на конечный размер дочернего ядра

Функция Ферми (1.9) была получена в приближении того, что дочернее ядро считается точечным. Если учесть конечный размер ядра, то решить уравнение Дирака и получить более точное выражение для функции Ферми аналитически невозможно. Для соответствия имеющейся функции  $F_0(Z, E_e)$  в работе [22] рассматривается следующая модель: ядро представляется в виде шара с равномерно распределенным по нему зарядом, радиус  $R$  которого выбирается таким образом, чтобы получилось экспериментально правильное значение  $\langle r^2 \rangle^{1/2}$  для дочернего ядра. Численным решением уравнения Дирака в данной модели в той же работе было получено следующее выражение для функции  $L_0(Z, E)$ , являющейся поправкой к функции Ферми:

$$L_0(Z, E) = 1 + \frac{13}{60}(\alpha Z)^2 - \frac{\alpha Z E R(41 - 26\gamma)}{[15(2\gamma - 1)]} - \frac{\alpha Z R \gamma(17 - 2\gamma)}{[30E(2\gamma - 1)]} + \\ + a_{-1} \frac{R}{E} + \sum_{n=0}^5 a_n (ER)^n + 0.41(R - 0.0164)(\alpha Z)^{4.5}, \quad (2.1)$$

где  $\gamma = \sqrt{1 - (\alpha Z)^2}$ ,  $a_n = \sum_{j=1}^6 b_{j,n}(\alpha Z)^j$ , а значения коэффициентов  $b_{j,n}$  для электронов даны в таблице 2.1.

Таблица 2.1 — Коэффициенты  $b_{j,n}$  функции  $L_0(Z, E)$  для электронов [22].

	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$
$a_{-1}$	0.115	-1.8123	8.2498	-11.223	-14.854	32.086
$a_0$	-0.00062	0.007165	0.01841	-0.53736	1.2691	-1.5467
$a_1$	0.02482	-0.5975	4.84199	-15.3374	23.9774	-12.6534
$a_2$	-0.14038	3.64953	-38.8143	172.1368	-346.708	288.7873
$a_3$	0.008152	-1.15664	49.9663	-273.711	657.6292	-603.7033
$a_4$	1.2145	-23.9931	149.9718	-471.2985	662.1909	-305.6804
$a_5$	-1.5632	33.4192	-255.1333	938.5297	-1641.2845	1095.358

## 2.2 Поправка на конечный размер родительского ядра

Поправка на конечный размер родительского ядра связана с неточностью слабого взаимодействия и, соответственно, необходимостью учитывать конечность длин волн лептонов и распределение нуклонов внутри ядра. Явный вид такой поправки зависит от разрешенности и типа перехода. В случае разрешенных переходов гамов–теллеровского типа она представима в следующем виде [23]:

$$C(Z, E) \simeq 1 + C_0 + C_1 E + C_2 E^2 + C_{-1}/E, \quad (2.2)$$

где

$$C_0 = -\frac{1}{5}(E_0 R)^2 + \frac{4}{9}R^2 + \frac{2}{35}\alpha Z E_0 R - \frac{233}{630}(\alpha Z)^2 \quad (2.2a)$$

$$C_1 = \frac{4}{9}E_0 R^2 - \frac{4}{7}\alpha Z R \quad (2.2b)$$

$$C_2 = -\frac{4}{9}R^2 \quad (2.2c)$$

$$C_{-1} = -\frac{2}{45}E_0 R^2 - \frac{\alpha Z R}{70} \quad (2.2d)$$

## 2.3 Радиационные поправки

Радиационные поправки связаны с тем, что заряженные частицы, участвующие в процессе распада, неизбежно взаимодействуют с квантовым электромагнитным полем, испуская и поглощая как виртуальные фотоны (которые изменяют эффективные свойства частиц), так и реальные фотоны, что приводит к перераспределению энергии между продуктами распада и изменяет наблюдаемую форму спектра. Аналитический вид для функций  $g(E, E_0)$  и  $h(E, E_0)$ , описывающих радиационные поправки к спектрам электронов и антинейтрино соответственно, был получен в работах [24], [25] и [26]:

$$\begin{aligned}
g(E, E_0) = & \left\{ 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \left[ 3 \ln m_p - \frac{3}{4} + \frac{4}{\beta} \text{L}_s \left( \frac{2\beta}{1+\beta} \right) + \right. \right. \\
& + 4 \left( \frac{\tanh^{-1} \beta}{\beta} - 1 \right) \left( \frac{E_0 - E}{3E} - \frac{3}{2} + \ln \left[ \frac{2(E_0 - E)}{m_e} \right] \right) + \\
& + \frac{\tanh^{-1} \beta}{\beta} \left( 2(1 + \beta^2) + \frac{(E_0 - E)^2}{6E^2} - 4 \tanh^{-1} \beta \right) - \\
& \left. \left. - 3 \ln \frac{m_p m_e}{2E_0} \right] \right\} \times \left\{ 1.026725 \left[ 1 - \frac{2\alpha}{3\pi} \ln \frac{2E_0}{m_e} \right]^{\frac{9}{4}} \right\}, \quad (2.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(E, E_0) = & 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ 3 \ln \left( \frac{m_p}{m_e} \right) + \frac{23}{4} + \right. \\
& + \frac{8}{\hat{\beta}} \text{L}_s \left( \frac{2\hat{\beta}}{1+\hat{\beta}} + 8 \left( \frac{\tanh^{-1} \hat{\beta}}{\hat{\beta}} - 1 \right) \ln \left( \frac{2\hat{E}\hat{\beta}}{m_e} \right) + \right. \\
& \left. \left. + 4 \frac{\tanh^{-1} \hat{\beta}}{\hat{\beta}} \left[ \frac{7 + 3\hat{\beta}^2}{8} - 2 \tanh^{-1} \hat{\beta} \right] \right\}, \quad (2.4)
\end{aligned}$$

где  $\hat{E} = E_0 - E_\nu$ ,  $\hat{\beta} = \frac{\hat{p}}{\hat{E}}$ ,  $\hat{p} = \sqrt{\hat{E}^2 - m_e^2}$ , а  $\text{L}_s(x)$  – функция Спенса, также известная как дилогарифм:

$$\text{L}_s(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt = -\text{Li}_2(x). \quad (2.5)$$

## 2.4 Учет экранирования

Рассматривая процесс  $\beta$ -распада, необходимо учитывать влияние электронной оболочки атома на процесс испускания электронов, возникающее из-за кулоновского взаимодействия между бета-частицей и электронами атомной оболочки, которые частично экранируют ядерный заряд, ослабляя притяжение между ядром и вылетающим бета-электроном. Это приводит к изменению формы бета-спектра, в особенности в низкоэнергетической области.

Существует большое количество моделей потенциала экранирования, однако основные модели согласуются между собой в пределах нескольких процентов [23]. В настоящей работе используется относительно простая модель, полученная в работе [27]:

$$S(Z, E) = \begin{cases} \frac{\bar{E}}{E} \left(\frac{\bar{p}}{p}\right)^{(2\gamma-1)} e^{\pi(\bar{y}-y)} \frac{|\Gamma(\gamma+i\bar{y})|^2}{|\Gamma(\gamma+iy)|^2}, & \bar{E} > m_e; \\ 1, & \bar{E} < m_e, \end{cases} \quad (2.6)$$

где  $\bar{E} = E - V_0$ ,  $\bar{p} = \sqrt{\bar{E}^2 - m_e^2}$ ,  $y = \frac{\alpha ZE}{p}$ ,  $\bar{y} = \frac{\alpha Z\bar{E}}{\bar{p}}$ , а  $V_0$  – потенциал экранирования, заданный в виде:

$$V_0 = \alpha^2(Z-1)^{\frac{4}{3}}N(Z-1). \quad (2.7)$$

В этом выражении  $N(Z)$  – дискретная функция для параметризации, заданная как линейная интерполяция значений из таблицы (2.2).

Таблица 2.2 – Точки функции  $N(Z)$  для параметризации поправки на учет экранирования [27].

$Z$	1	8	13	16	23	27	29	49	84	92
$N(Z)$	1.000	1.420	1.484	1.497	1.520	1.544	1.561	1.637	1.838	1.907

## 2.5 Слабый магнетизм

Поправка на слабый магнетизм вызвана интерференцией между вкладом гамов-теллеровского механизма и вкладом, обусловленным разностью электромагнитных форм-факторов нуклонов, в слабое взаимодействие, что эффективно можно воспринимать, как взаимодействие магнитного момента ядра и  $\beta$ -частицы. В случае разрешенных переходов гамма-теллеровского типа выражение для этой поправки представимо в следующем виде [28]:

$$\mathcal{W}(E, E_0) = 1 + \delta_{WM} = 1 + \frac{2\mu_\nu - 1/2}{3 M_N g_A} (E_e \beta^2 - (E_0 - E)), \quad (2.8)$$

где  $M_N$  – атомная единица массы (масса нуклона),  $\mu_\nu$  – изовекторный магнитный момент нуклона,  $g_A$  – постоянная аксиально-векторного взаимодействия.

## 2.6 «Эффект обмена»

Неортогональность волновых функций атомов в начальном и конечном состояниях при  $\beta$ -распаде допускает дополнительные косвенные процессы, посредством которых могут испускаться электроны. В случае «эффекта обмена» эта неортогональность оставляет возможность испускания  $\beta$ -частицы непосредственно в связанное состояние дочернего атома, тем самым вытесняя первоначально связанный с этим атомом электрон.

Экспериментально невозможно отличить этот непрямой процесс от обычного  $\beta$ -распада, поэтому вводится дополнительная коррекция для экспериментально полученных спектров. В теоретической модели, в свою очередь, необходимо учесть обратную коррекцию для лучшего сходства с экспериментальными данными.

В настоящей работе для учета этого эффекта используется эмпирическая формула, полученная в работе [23]:

$$X(Z, E) \approx 1 + a/W' + b/W'^2 + c \cdot \exp(-dW') + e \cdot \sin[(W - f)^g + h]/W^i, \quad (2.9)$$

где  $W' = W - 1$ ,  $W = \frac{E}{m_e}$ , а параметры  $(a, b, \dots, i)$  протабулированы для каждого значения  $Z$  и представлены в приложении к работе [23].

## 2.7 Запаздывание перестройки электронной оболочки

«Атомная несогласованность» (в англоязычной литературе – «Atomic mismatch») — это эффект, возникающий при  $\beta$ -распаде, когда внезапное изменение заряда ядра происходит гораздо быстрее, чем электронная оболочка атома успевает перестроиться в новое основное состояние, что приводит к тому, что атом оказывается в возбуждённом состоянии с электронной конфигурацией, ещё соответствующей исходному ядру. Это временное несоответствие между изменением заряда ядра и перераспределением электронов затем компенсируется через процессы перестройки оболочки — внутренней конверсией, испусканием Оже-электронов или рентгеновского излучения — что влияет на полную энергию, выделяющуюся при распаде.

Аналитическое выражение для учета описанного эффекта было получено в работе [29]:

$$r(Z, E, E_0) = 1 - \frac{2}{E_0 - E} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} B(Z) + 2(C_0 + C_1) \right), \quad (2.10)$$

где  $C_0$  и  $C_1$  — поправочные коэффициенты, подробно описанные в работе [29], а  $B(Z)$  — энергия связи для нейтрального атома с  $(Z + 1)$  протонами.

Вторая производная, входящая в выражение (2.10), может быть параметризована как функция от параметра  $Z$  [30]:

$$\frac{\partial^2}{\partial Z^2} B(Z) = 44.200Z^{0.41} + 2.3196 \cdot 10^{-7} Z^{4.45} \quad [\text{эВ}]. \quad (2.11)$$

## 2.8 Учет запрещенности переходов

Запрещёнными называют  $\beta$ -переходы, при которых в силу значительного различия начального и конечного ядерных состояний (изменение спина  $\Delta J \geq 2$  или противоположная чётность  $\pi = -1$ ) лептонная пара вынуждена уносить с собой ненулевой орбитальный угловой момент ( $L \geq 1$ ). В таком случае в разложении полного матричного элемента перехода доминируют высшие мультипольные компоненты, причем они подавлены пропорционально  $(pR)^{2L}$ . Такие переходы классифицируются по степени запрета  $L$  и делятся на уникальные (с одним доминирующим ядерным матричным элементом) и неуникальные (со сложной интерференцией ядерных матричных элементов). Каждой степени и типу запрета соответствует свой набор требований к изменению спина и чётности ядра, а также характерная форма энергетического спектра испускаемых электронов.

В настоящей работе был проведен анализ отношения вкладов переходов различных типов и степеней запрещенности в кумулятивные спектры исследуемых изотопов. Полученные относительные вклады приведены в таблице (2.3). Тип «А» соответствует разрешенным переходам, тип «S» – суперразрешенным переходам (с изменением спин-четности  $0^+ \rightarrow 0^+$ ), типы «XU» и «XNU» – переходам уникального и неуникального типа соответственно со степенью запрещенности X.

Таблица 2.3 — Относительные вклады различных типов переходов в кумулятивные спектры исследуемых изотопов.

	A	1U	1NU	2U	2NU	3U
$^{235}\text{U}$	40.16%	12.69%	27.67%	0.07%	3.79%	<0.01%
$^{238}\text{U}$	43.77%	8.87%	24.88%	0.07%	3.57%	<0.01%
$^{239}\text{Pu}$	48.06%	8.50%	23.51%	0.07%	4.38%	<0.01%
$^{241}\text{Pu}$	47.82%	7.09%	23.52%	0.07%	3.72%	<0.01%

	3NU	4U	4NU	5NU	S	Неизвестный тип
$^{235}\text{U}$	0.47%	<0.01%	0.01%	0.03%	<0.01%	15.09%
$^{238}\text{U}$	0.29%	<0.01%	0.02%	0.06%	<0.01%	18.46%
$^{239}\text{Pu}$	0.20%	<0.01%	0.03%	0.02%	<0.01%	15.22%
$^{241}\text{Pu}$	0.15%	<0.01%	0.04%	0.03%	0.01%	17.55%

Из полученных данных можно сделать вывод, что нельзя пренебрегать учетом специфики формы переходов первой степени запрета. Однако, в силу относительной малости различия между спектрами разрешенных и запрещенных переходов [11] и малости суммарного вклада в кумулятивный спектр (<5%), можно пренебречь отдельным учетом переходов старших степеней запрета, так как изменение кумулятивного спектра составит менее 0.5%.

Выражения для фактора формы и поправок на слабый магнетизм для разрешенных переходов и переходов первой степени запрещенности описаны в работе [31]:

$$\text{Allowed } (\Delta J^\pi=1^+) : \begin{cases} C(E, E_\nu) = 1 \\ \delta_{WM} = \frac{2}{3} \frac{\mu_\nu - 1/2}{M_{NgA}} (E_e \beta^2 - (E_0 - E)) \end{cases} \quad (2.12a)$$

$$1^{\text{st}} \text{ Unique } (\Delta J^\pi=2^-) : \begin{cases} C(E, E_\nu) = \frac{R^2}{9} (E_\nu^2 + p_e^2 \tilde{F}_{p_{1/2}}) \\ \delta_{WM} = \frac{3}{5} \frac{\mu_\nu - 1/2}{M_{NgA}} \frac{(E_e \beta^2 - E_\nu)(p_e^2 + E_\nu^2) + 2\beta^2 E_e E_\nu (E_\nu - E_e)/3}{p_e^2 + E_\nu^2} \end{cases} \quad (2.12b)$$

$$1^{\text{st}} \text{ NonUnique } (\Delta J^\pi=0^-) : \begin{cases} C(E, E_\nu) = \frac{R^2}{9} (E_\nu^2 + p_e^2 \tilde{F}_{p_{1/2}} + 2p_e E_\nu \tilde{F}_{sp_{1/2}}) \\ \delta_{WM} = 0 \end{cases} \quad (2.12c)$$

$$1^{\text{st}} \text{ NonUnique } (\Delta J^\pi=1^-) : \begin{cases} C(E, E_\nu) = \frac{R^2}{9} (E_\nu^2 + \frac{2}{3} p_e^2 \tilde{F}_{p_{1/2}} + \frac{1}{3} p_e^2 \tilde{F}_{p_{3/2}} - \frac{4}{3} E_\nu p_e \tilde{F}_{sp_{1/2}}) \\ \delta_{WM} = \frac{\mu_\nu - 1/2}{M_{NgA}} \frac{(E_e \beta^2 - E_\nu)(p_e^2 + E_\nu^2) + 2\beta^2 E_e E_\nu (E_\nu - E_e)/3}{p_e^2 + E_\nu^2 - 4\beta^2 E_\nu E_e/3} \end{cases} \quad (2.12d)$$

Функции  $\tilde{F}_{p_{3/2}}, \tilde{F}_{p_{1/2}}, \tilde{F}_{sp_{1/2}}$  в приведенных выражениях – Ферми-подобные функции, определенные следующим образом [31]:

$$\tilde{F}_{p_{3/2}}(E_e, Z) \simeq F_1(E, Z)/F_0(E, Z), \quad (2.13a)$$

$$\tilde{F}_{p_{1/2}}(E_e, Z, R) \simeq \left[ \left( \frac{\alpha Z}{2} + \frac{E_e R}{3} \right)^2 + \left( \frac{m_e R}{3} \right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{2m_e^2 R}{3E_e} \left( \frac{\alpha Z}{2} + \frac{E_e R}{3} \right) \right] / j_1^2(p_e R), \quad (2.13b)$$

$$\tilde{F}_{sp_{1/2}}(E_e, Z, R) \simeq \left[ \left( \frac{\alpha Z}{2} + \frac{E_e R}{3} \right) - \frac{m_e^2 R}{3E_e} \right] / (j_0(p_e R)j_1(p_e R)), \quad (2.13c)$$

где  $j_0(x), j_1(x)$  – сферические функции Бесселя, а  $F_0$  и  $F_1$  – функции Ферми нулевого и первого порядка, описанные в работе [32].

## 2.9 Влияние поправок на форму спектров

Вклад каждой из описанных в настоящей главе поправок приведен в таблице 2.4 и проиллюстрирован на рисунках 2 и 3. Как можно видеть, вклад поправок в мягкой области составляет порядка 10% для бета-спектра и порядка 5% для спектра антинейтрино. В жесткой области вклады составляют порядка 15% и 6% соответственно.

Влияние уровня и типа запрещенности переходов на одиночный спектр проиллюстрировано на рисунке 4. Наиболее сильно от разрешенных переходов отличаются переходы неуникального типа первой степени запрета с изменением спин-четности  $1^-$ . Переходы того же типа с изменением спин-четности  $0^-$ , в свою очередь, наиболее близки к разрешенным и отличаются от них менее чем на 0.1%.

Таблица 2.4 — Сводная таблица используемых в настоящей работе поправок к спектрам  $\beta$ -частиц и антинейтрино

Обозначение	Учитываемый физический фактор	Вклад в спектр	Формула
$L_0(Z, E)$	Поправка на конечный размер дочернего ядра	$\approx 4\%$	2.1
$C(Z, E)$	Поправка на конечный размер родительского ядра	$\approx 2.5\%$	2.2
$g(E, E_0)$	Радиационные поправки ( $\beta$ )	$\approx 6\%$ ( $\beta$ )	2.3
$h(E, E_0)$	Радиационные поправки ( $\bar{\nu}$ )	$\approx 1\%$ ( $\bar{\nu}$ )	2.4
$S(Z, E)$	Учет экранирования	$\approx 2.5\%$	2.6
$\mathcal{W}(E, E_0)$	Слабый магнетизм	$\approx 2\%$	2.8
$X(Z, E)$	«Эффект обмена»	$\approx 2.5\%$	2.9
$r(Z, E, E_0)$	Запаздывание перестройки электронной оболочки	$\approx 2\%$	2.10

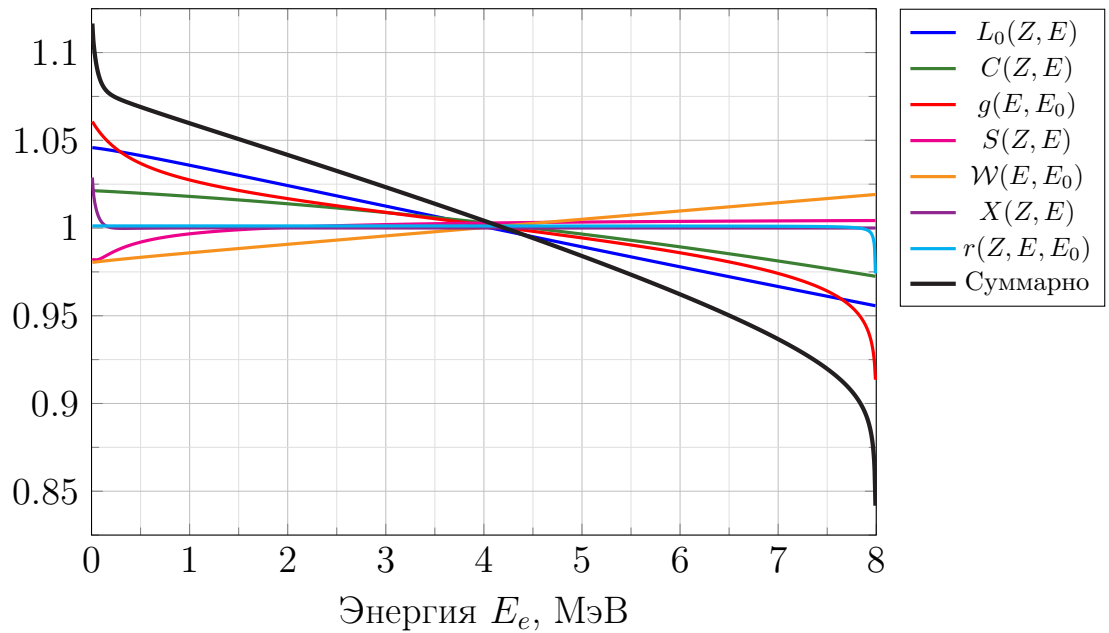


Рисунок 2 — Вклад поправок в форму одиночного синтетического бета-спектра ( $Z=46$ ,  $E_0 - m_e = 8$  МэВ, переход полагается разрешенным)

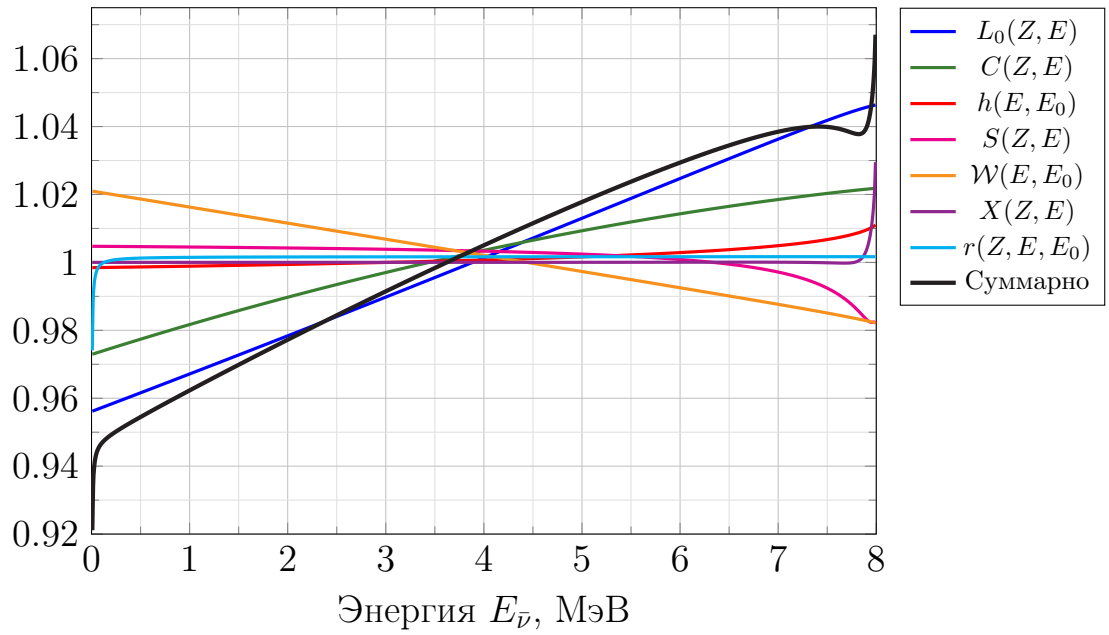


Рисунок 3 — Вклад поправок в форму одиночного синтетического спектра антинейтрино ( $Z=46$ ,  $E_0 - m_e = 8$  МэВ, переход полагается разрешенным)

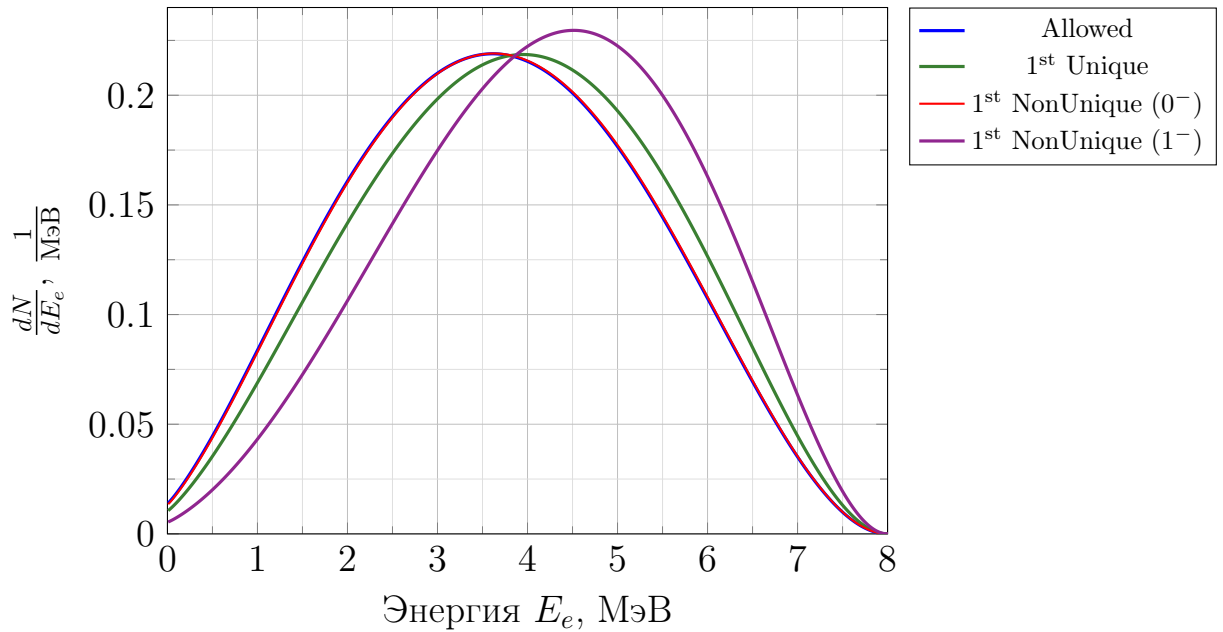


Рисунок 4 — Влияние степени и типа запрещенности на одиночный синтетический бета-спектр ( $Z=46$ ,  $E_0 - m_e = 8$  МэВ)

# 3. РАСЧЕТ ОШИБОК МОДЕЛЬНЫХ СПЕКТРОВ

Для расчета ошибок модельных спектров в настоящей работе использовался метод Монте-Карло.

## 3.1 Расчет ошибок спектров отдельных изотопов

Для каждого одиночного распада изотопа случайно варьировались значения вероятности перехода  $P$  и энергии перехода  $E_0$ :

$$P_j \sim \mathcal{N}(P_j, \sigma_{P_j}), \quad (3.1a)$$

$$E_{0,j} \sim \mathcal{N}(E_{0,j}, \sigma_{E_{0,j}}), \quad (3.1b)$$

где  $\sigma_{P_j}$  и  $\sigma_{E_{0,j}}$  – погрешности соответствующих величин, взятые из экспериментальных баз данных.

Для каждой итерации  $k$  строился спектр  $S_{(k)}^{iso}$  согласно выражениям (1.12, 1.13). После  $N$  итераций для каждого энергетического бина  $E_i$  были рассчитаны среднее значение и ошибка:

$$S^{iso}(E_i) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_{(k)}^{iso}(E_i), \quad (3.2a)$$

$$\sigma_{S^{iso}}(E_i) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N \left( S_{(k)}^{iso}(E_i) - S^{iso}(E_i) \right)^2}. \quad (3.2b)$$

## 3.2 Расчет ошибок кумулятивных спектров

Для каждого изотопа, дающего вклад в кумулятивный спектр, случайно варьировались значения кумулятивного выхода  $Y$  и значения  $S^{iso}$  в энерге-

тическом бине  $E_i$ :

$$Y_j^{(k)} \sim \mathcal{N}(Y_j, \sigma_{Y_j}), \quad (3.3a)$$

$$S_{(k)}^{iso} \sim \mathcal{N}(S^{iso}, \sigma_{S^{iso}}), \quad (3.3b)$$

где  $\sigma_{Y_j}$  – погрешность кумулятивного выхода из используемой библиотеки ядерных данных.

Для каждой итерации  $k$  строился спектр  $S_{(k)}^{tot}$  согласно выражениям (1.14, 1.15). После  $N$  итераций для каждого энергетического бина так же были рассчитаны среднее значение и ошибка:

$$S^{tot} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_{(k)}^{tot}, \quad (3.4a)$$

$$\sigma_{S^{tot}} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N \left( S_{(k)}^{tot} - S^{tot} \right)^2}. \quad (3.4b)$$

### 3.3 Расчет ошибок позитронных спектров

Позитронный спектр  $S_{e^+}$  рассчитывается согласно выражению (1.22). Множитель  $\frac{d\sigma_{IBD}}{dE_{e^+}}$  как функция от аргумента  $E_{\bar{\nu}}$  при фиксированном значении  $E'_{e^+}$  эффективно описывается дельта-функцией  $\delta((E'_{e^+} - \Delta) - E_{\bar{\nu}})$ , где  $\Delta$  – разность масс нейтрона и протона. Таким образом, вклад в погрешность позитронного спектра в некоторой точке  $E'_{e^+}$  дает только погрешность кумулятивного спектра антинейтрино в точке  $E_{\bar{\nu}}^* = E'_{e^+} - \Delta$  и погрешность самого сечения ОБР:

$$\sigma_{S_{e^+}}(E'_{e^+}) = \sqrt{\sigma_{S_{\bar{\nu}}}^2(E_{\bar{\nu}}^*) + \sigma_{\sigma_{IBD}}^2}. \quad (3.5)$$

## 4. «ВОССТАНОВЛЕНИЕ» НЕИЗВЕСТНЫХ СХЕМ РАСПАДОВ

В настоящей работе все необходимые для расчета модельных спектров экспериментально полученные данные (вероятности в схемах переходов, кумулятивные выходы) брались из библиотеки ядерных экспериментальных данных JENDL (Japanese Evaluated Nuclear Data Library) и из библиотеки ядерных баз данных ENSDF (Nuclear Data Services).

Из  $\sim 800$  изотопов, дающих вклад в кумулятивные спектры продуктов деления  $^{235}\text{U}$ ,  $^{238}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$  и  $^{241}\text{Pu}$ , для  $\sim 300$  изотопов нет никакой информации об их схемах распада. Их суммарный вклад в кумулятивный спектр составляет порядка 3-6%, поэтому пренебречь ими нельзя. В связи с этим встает вопрос о методах реконструкции недостающей информации.

В настоящей работе «восстановление» неизвестных схем распадов проводилось на основе следующих предположений:

- Чем выше энергия распада – тем большим числом переходов предполагается описывать спектр;
- При особенно высоких энергиях распада у нейтрон-избыточных ядер учитывается наличие конкурентного канала – испускание нейтрона;
- У близких по заряду, массе и энергии распада ядер схемы распада полагаются схожими;
- В случае значительной неопределенности предполагаемых параметров для изотопа выбирается та конфигурация распада, которая дает наилучшее соответствие с экспериментальными данными.

## 5. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ СПЕКТРОВ

### 5.1 Сравнение спектров отдельных изотопов с экспериментальными данными

Для валидации полученных с использованием изложенной теоретической модели спектров было проведено сравнение с экспериментальными данными и данными, полученными с помощью других методов расчета. На рисунках 5, 6 приведено сравнение модельных спектров изотопов  $^{92}\text{Rb}$  и  $^{142}\text{Cs}$  с экспериментальными данными, полученными в работе [33]. На рисунке 7 приведено сравнение модельного спектра  $^{36}\text{Cl}$  с данными, полученными с использованием ПО FLUKA [34].

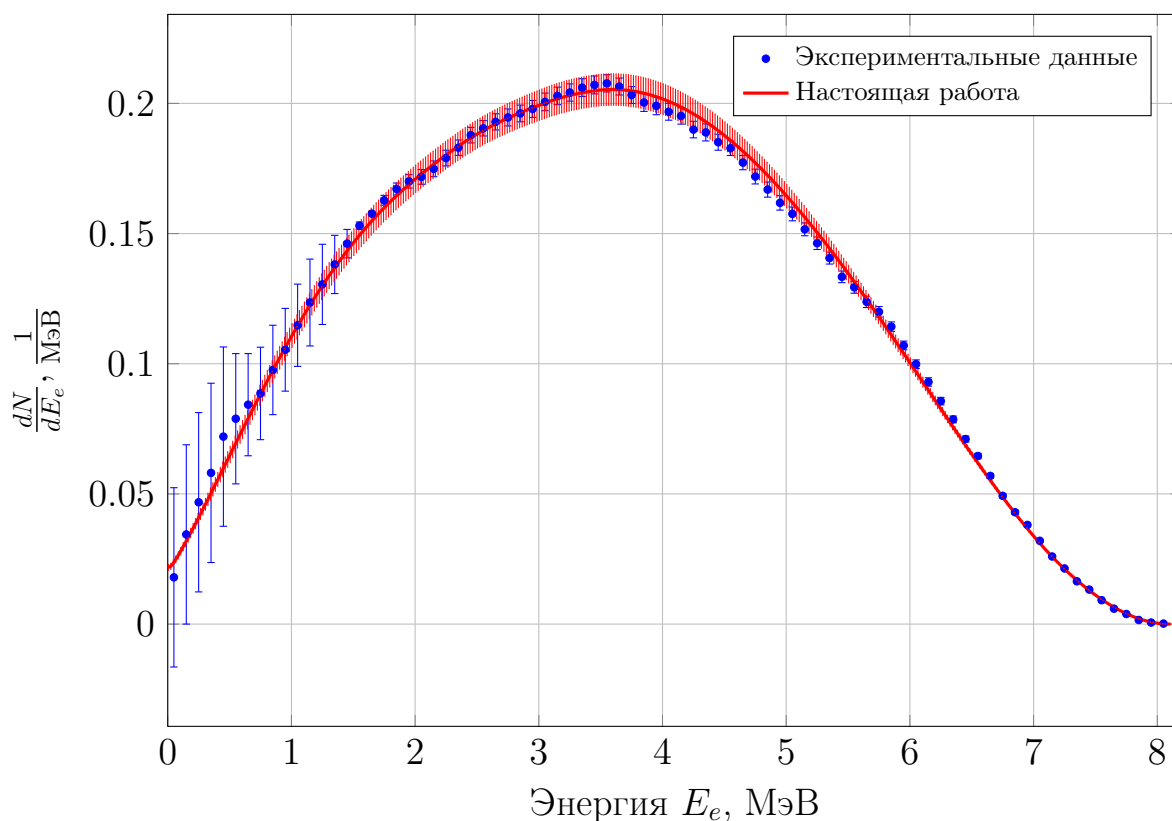


Рисунок 5 — Спектр бета-частиц от распада  $^{92}\text{Rb}$ .

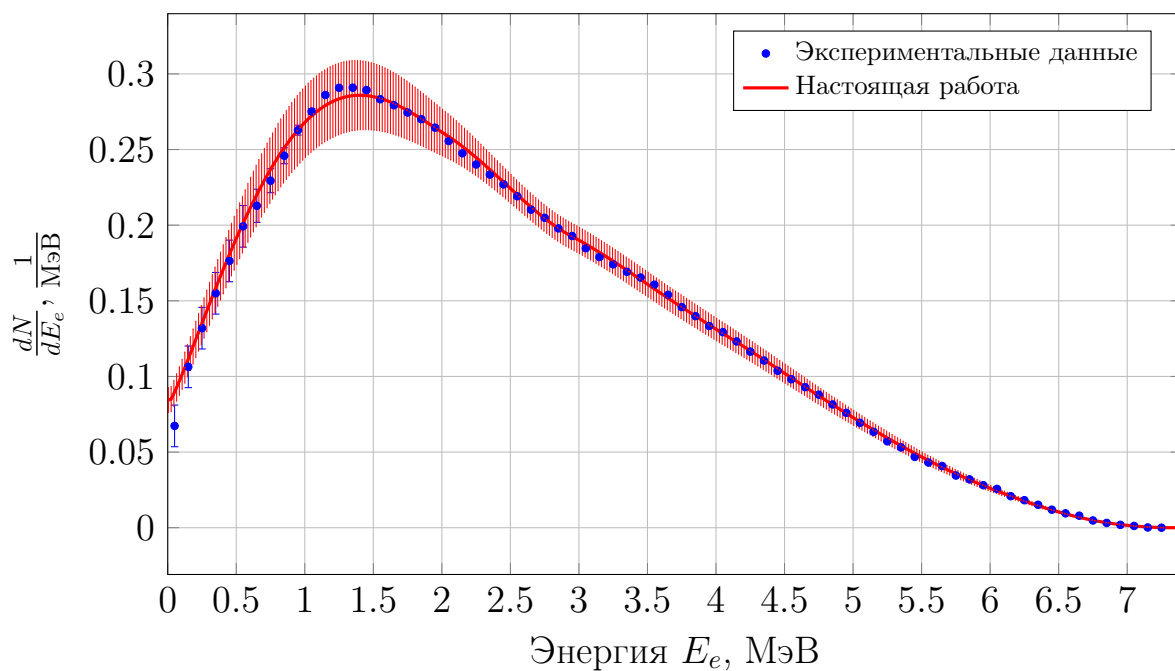


Рисунок 6 — Спектр бета-частиц от распада  $^{142}\text{Cs}$ .

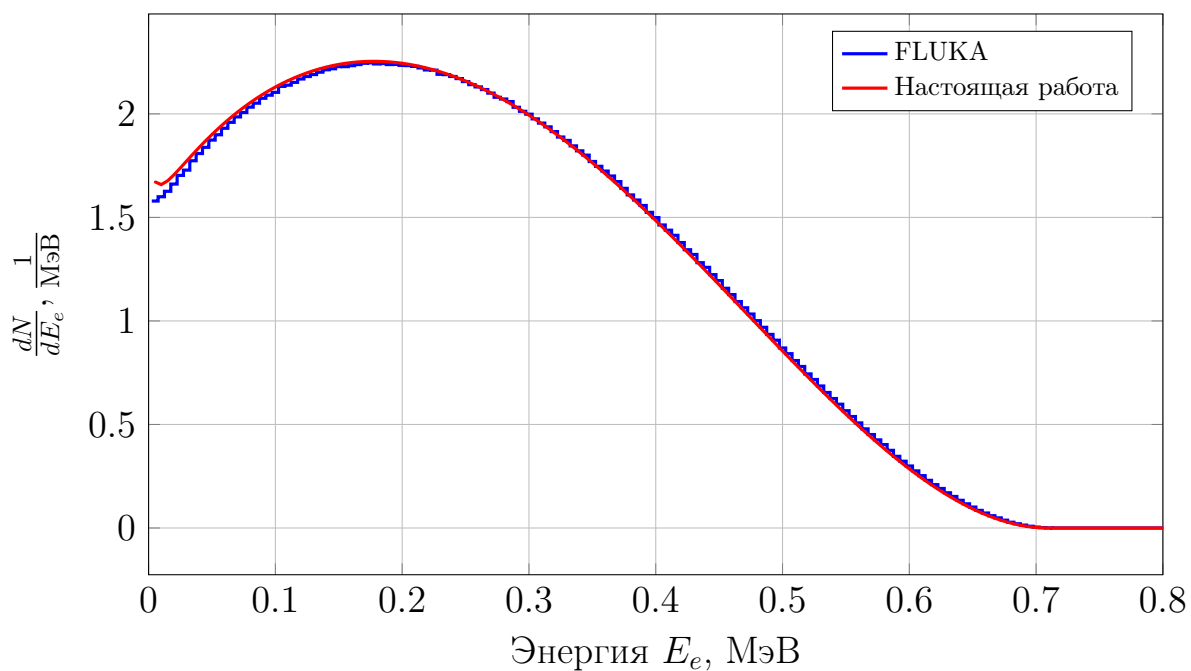


Рисунок 7 — Спектр бета-частиц от распада  $^{36}\text{Cl}$ .

Полученные модельные значения хорошо согласуются с экспериментальными и расчетными данными, из чего можно сделать вывод, что модель хорошо описывает спектры отдельных изотопов.

## 5.2 Сравнение кумулятивных спектров с экспериментальными данными

Для дальнейшей валидации модели были использованы полученные согласно (1.14, 1.15) кумулятивные спектры антинейтрино продуктов деления  $^{235}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$ ,  $^{241}\text{Pu}$  тепловыми нейтронами и деления  $^{238}\text{U}$  быстрыми нейтронами. По ним были реконструированы позитронные спектры согласно выражению (1.22).

Сравнение модельных позитронных спектров с экспериментально полученными в работах [20; 21] значениями приведены на рисунках 8, 9. На тех же рисунках приведено сравнение с другой существующей моделью BESTIOLE (Beta Energy Spectrum Tool for an Improved Optimal List of Elements)[11]. Данная модель была выбрана для сравнения по следующим причинам:

- Данная модель, как и модель в настоящей работе, построена на методе прямого суммирования;
- Другие модели, построенные на этом методе, позволяют рассчитывать меньшее количество точек спектра, в связи с чем теряется точность;
- Данная модель является одной из самых последних на момент написания настоящей работы.

Из сравнения можно сделать вывод, что модельные спектры, полученные в настоящей работе, гораздо лучше сходятся с экспериментальными данными, чем спектры конкурентной модели.

Таким образом, настоящая модель может быть использована для получения наиболее точных на момент написания работы кумулятивных спектров бета-частиц и антинейтрино и соответствующих им позитронных спектров.

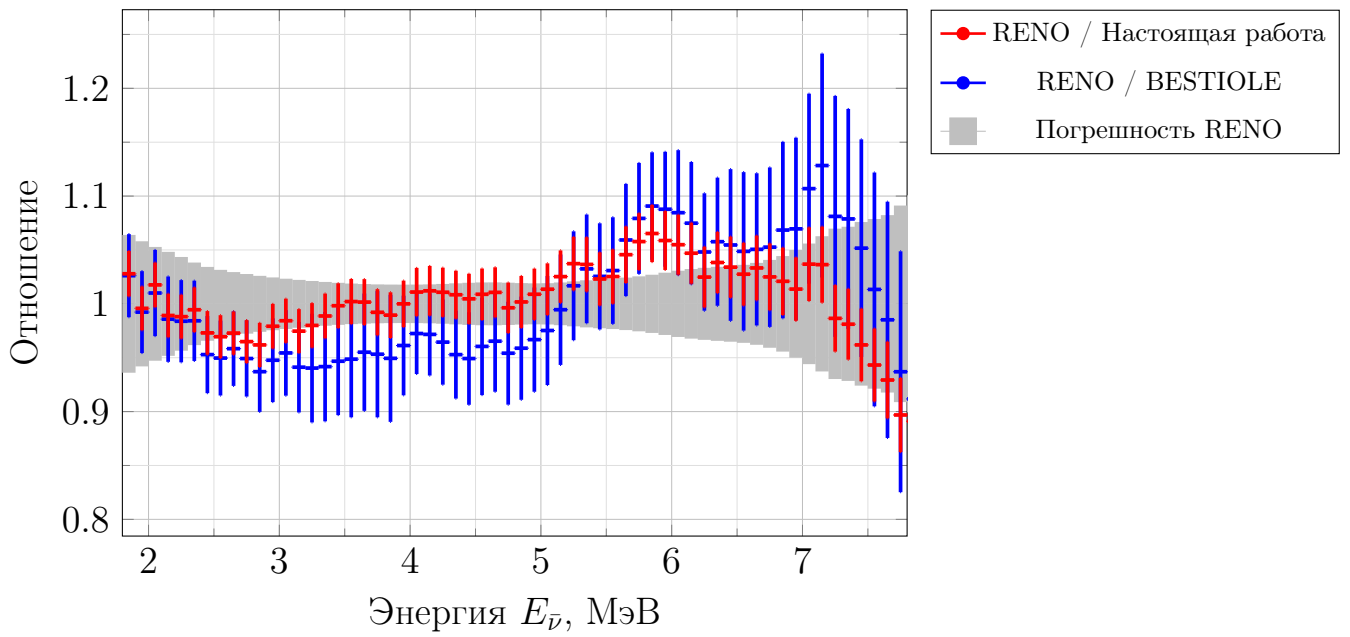


Рисунок 8 — Отношение экспериментального позитронного спектра (RENO) от деления смеси изотопов к модельным позитронным спектрам.

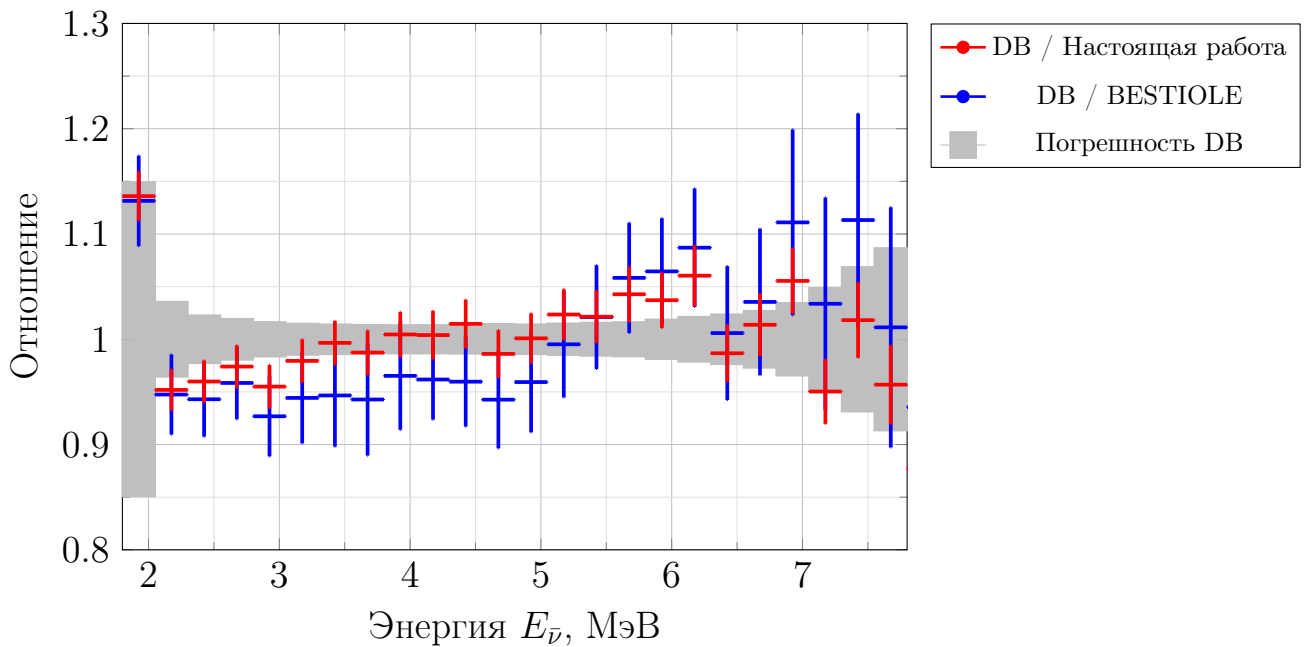


Рисунок 9 — Отношение экспериментального позитронного спектра (Daya Bay) от деления смеси изотопов к модельным позитронным спектрам.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная научно-исследовательская работа посвящена исследованию и расчету спектров бета-частиц и антинейтрино, рожденных в процессе  $\beta$ -распада.

Первая часть работы включала в себя получение спектров бета-частиц и антинейтрино в простейшем приближении. Были учтены кинематика процесса  $\beta$ -распада, влияние поля ядра на процесс перехода, был записан явный вид функции Ферми (1.9), описывающей поправку на это влияние. Были получены общие формулы (1.10) и (1.11), описывающие формы спектра бета-частиц и антинейтрино от единичного  $\beta$ -распада с известной энергией перехода. Суммированием этих спектров с учетом вероятностей их реализации были получены выражения для полных спектров бета-частиц (1.12) и антинейтрино (1.13) от  $\beta$ -распада известного изотопа. С учетом всех кумулятивных выходов дочерних изотопов, были получены выражения для кумулятивных спектров (1.14), (1.15) основных радионуклидов, используемых в качестве топлива для ядерных реакторов. Для сравнения с экспериментом и дальнейшего анализа исследовался метод реконструирования позитронных спектров (1.22) радионуклидов на основе реакции обратного бета-распада (ОБР).

Следующая часть работы заключалась в уточнении модели путем введения поправок, учитывающих влияние тех или иных физических факторов на процесс  $\beta$ -распада. Был учтен ряд поправок, дающих наибольший вклад в изменение спектров. Также было учтено влияние запрещенности распада на форму спектра для переходов с первой степенью запрета.

Далее для валидации модели было проведено сравнение полученных в работе модельных спектров отдельных изотопов с экспериментальными данными и расчетами, проведенными с использованием ПО FLUKA (рисунки 5, 6, 7). С той же целью было проведено сравнение полученных в работе позитронных спектров с другой моделью и с экспериментальными данными (рис. 8, 9).

Валидация показала, что настоящая модель может быть использована для получения наиболее точных на момент написания работы кумулятивных спектров бета-частиц и антинейтрино.

Тем самым, актуальной на данный момент остается задача расчета спектров антинейтрино продуктов деления  $^{235}\text{U}$ ,  $^{238}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$  и  $^{241}\text{Pu}$  быстрыми нейтронами.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Thomas S. A., Abdalla F. B., Lahav O.* Upper Bound of 0.28 eV on Neutrino Masses from the Largest Photometric Redshift Survey // Physical Review Letters. — 2010. — July. — Vol. 105, no. 3. — ISSN 1079-7114. — DOI: 10.1103/physrevlett.105.031301.
2. *Reines F., Cowan C. L.* Detection of the Free Neutrino // Physical Review. — 1953. — Nov. — Vol. 92, no. 3. — P. 830–831. — ISSN 0031-899X. — DOI: 10.1103/physrev.92.830.
3. *Reines F., Cowan C. L.* Free Antineutrino Absorption Cross Section. I. Measurement of the Free Antineutrino Absorption Cross Section by Protons // Physical Review. — 1959. — Jan. — Vol. 113, no. 1. — P. 273–279. — ISSN 0031-899X. — DOI: 10.1103/physrev.113.273.
4. Neutrino oscillations: status and prospects for the determination of neutrino mass ordering and the leptonic CP-violation phase / L. D. Kolupaeva [et al.] // Physics-Uspekhi. — 2022. — May. — Vol. 66, no. 08. — P. 753–774. — ISSN 1468-4780. — DOI: 10.3367/ufne.2022.05.039191.
5. Absolute measurement of the beta spectrum from  $^{235}\text{U}$  fission as a basis for reactor antineutrino experiments / K. Schreckenbach [и др.] // Physics Letters B. — 1981. — Февр. — Т. 99, № 3. — С. 251–256. — ISSN 0370-2693. — DOI: 10.1016/0370-2693(81)91120-5.
6. *Feilitzsch F. von, Hahn A., Schreckenbach K.* Experimental beta-spectra from  $^{239}\text{Pu}$  and  $^{235}\text{U}$  thermal neutron fission products and their correlated antineutrino spectra // Physics Letters B. — 1982. — Дек. — Т. 118, № 1–3. — С. 162–166. — ISSN 0370-2693. — DOI: 10.1016/0370-2693(82)90622-0.

7. Determination of the antineutrino spectrum from  $^{235}\text{U}$  thermal neutron fission products up to 9.5 MeV / K. Schreckenbach [et al.] // *Physics Letters B*. — 1985. — Oct. — Vol. 160, no. 4/5. — P. 325–330. — ISSN 0370-2693. — DOI: 10.1016/0370-2693(85)91337-1.
8. Improved predictions of reactor antineutrino spectra / T. A. Mueller [et al.] // *Physical Review C*. — 2011. — May. — Vol. 83, no. 5. — ISSN 1089-490X. — DOI: 10.1103/physrevc.83.054615.
9. *Huber P.* Determination of antineutrino spectra from nuclear reactors // *Physical Review C*. — 2011. — Aug. — Vol. 84, no. 2. — ISSN 1089-490X. — DOI: 10.1103/physrevc.84.024617.
10. *Д. В. Попов М. Д. Скорохватов.* Модель конверсии бета-спектров продуктов деления изотопов урана и плутония в спектры антинейтрино // *Письма в ЭЧАЯ*. — 2023. — Т. 20, №1(246). — С. 5–16.
11. A comprehensive revision of the summation method for the prediction of reactor antineutrino fluxes and spectra / L. Perissé [et al.]. — 2023. — DOI: 10.48550/ARXIV.2304.14992.
12. *Kopeikin V. I.* Flux and spectrum of reactor antineutrinos // *Physics of Atomic Nuclei*. — 2012. — Feb. — Vol. 75, no. 2. — P. 143–152. — ISSN 1562-692X. — DOI: 10.1134/s1063778812020123.
13. Updated Summation Model: An Improved Agreement with the Daya Bay Antineutrino Fluxes / M. Estienne [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2019. — July. — Vol. 123, no. 2. — ISSN 1079-7114. — DOI: 10.1103/physrevlett.123.022502.
14. *Б. С. Джелепов Л. Н. Зырянова.* Влияние электрического поля атома на Бета-распад // *АН СССР*. — 1956.
15. *В. Г. Алексанкин С. В. Родичев.* Бета- и антинейтринное излучение радиоактивных ядер : Справочник // *Энергоатомиздат*. — 1989.

16. *Hayes A. C., Vogel P.* Reactor Neutrino Spectra // Annual Review of Nuclear and Particle Science. — 2016. — Oct. — Vol. 66, no. 1. — P. 219–244. — ISSN 1545-4134. — DOI: 10.1146/annurev-nucl-102115-044826.
17. *Mougeot X., Bé M.-M., Bisch C.* Calculation of beta spectral shapes // Radioprotection. — 2014. — Sept. — Vol. 49, no. 4. — P. 269–273. — ISSN 1769-700X. — DOI: 10.1051/radiopro/2014017.
18. *Фаянс С. А.* Радиационные поправки и эффекты отдачи в реакции  $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$  при низких энергиях // Ядерная физика. — 1985. — Т. 42. — С. 929–940.
19. *Strumia A., Vissani F.* Precise quasielastic neutrino/nucleon cross-section // Physics Letters B. — 2003. — July. — Vol. 564, no. 1/2. — P. 42–54. — ISSN 0370-2693. — DOI: 10.1016/s0370-2693(03)00616-6.
20. Measurement of reactor antineutrino flux and spectrum at RENO / S. G. Yoon [et al.] // Physical Review D. — 2021. — Dec. — Vol. 104, no. 11. — ISSN 2470-0029. — DOI: 10.1103/physrevd.104.1111301.
21. Joint Determination of Reactor Antineutrino Spectra from  $^{235}\text{U}$  and  $^{239}\text{Pu}$  Fission by Daya Bay and PROSPECT / F. P. An [et al.] // Physical Review Letters. — 2022. — Feb. — Vol. 128, no. 8. — ISSN 1079-7114. — DOI: 10.1103/physrevlett.128.081801.
22. *Wilkinson D.* Evaluation of beta-decay // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. — 1990. — May. — Vol. 290, no. 2/3. — P. 509–515. — ISSN 0168-9002. — DOI: 10.1016/0168-9002(90)90570-v.
23. High precision analytical description of the allowed  $\beta$  spectrum shape / L. Hayen [et al.] // Reviews of Modern Physics. — 2018. — Mar. — Vol. 90, no. 1. — ISSN 1539-0756. — DOI: 10.1103/revmodphys.90.015008.

24. *Sirlin A.* General Properties of the Electromagnetic Corrections to the Beta Decay of a Physical Nucleon // *Physical Review*. — 1967. — Dec. — Vol. 164, no. 5. — P. 1767–1775. — ISSN 0031-899X. — DOI: 10.1103/physrev.164.1767.
25. *Sirlin A., Ferrogliia A.* Radiative corrections in precision electroweak physics: A historical perspective // *Reviews of Modern Physics*. — 2013. — Feb. — Vol. 85, no. 1. — P. 263–297. — ISSN 1539-0756. — DOI: 10.1103/revmodphys.85.263.
26. *Sirlin A.* Radiative correction to the  $\bar{\nu}(\nu)$  spectrum in  $\beta$  decay // *Physical Review D*. — 2011. — July. — Vol. 84, no. 1. — ISSN 1550-2368. — DOI: 10.1103/physrevd.84.014021.
27. *Behrens H. O., Bühring W.* Electron radial wave functions and nuclear beta-decay //. — 1982.
28. *Li Y.-F., Zhang D.* New realization of the conversion calculation for reactor antineutrino fluxes // *Physical Review D*. — 2019. — Sept. — Vol. 100, no. 5. — ISSN 2470-0029. — DOI: 10.1103/physrevd.100.053005.
29. *Wilkinson D.* Methodology for superallowed Fermi beta-decay Part. I. Preliminaries and data // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. — 1993. — Oct. — Vol. 335, no. 1/2. — P. 172–181. — ISSN 0168-9002. — DOI: 10.1016/0168-9002(93)90270-r.
30. *Clark C.* Atomic Reference Data for Electronic Structural Calculations, NIST Standard Reference Database 141. — 1997. — DOI: 10.18434/T4ZP4F.
31. *Štefánik D., Dvornický R., Šimkovic F.* Reactor antineutrino spectra and forbidden beta decays // *AIP Conference Proceedings*. Vol. 1892. — Author(s), 2017. — P. 020022. — DOI: 10.1063/1.5007647.

32. *Doi M., Kotani T., Takasugi E.* Double Beta Decay and Majorana Neutrino // Progress of Theoretical Physics Supplement. — 1985. — Vol. 83. — P. 1–175. — ISSN 0375-9687. — DOI: 10.1143/ptps.83.1.
33. Study of beta Decay Shape Factors in First-Forbidden Transitions with Spin-Parity = 0- for Reactor Antineutrino Spectra Predictions / G. A. Alcalá [et al.]. — 2026. — DOI: 10.48550/ARXIV.2601.05804.
34. Latest FLUKA developments / G. Hugo [et al.] // EPJ Nuclear Sciences and Technologies / ed. by A. Zoia, C. Diop, C. de Saint Jean. — 2024. — Vol. 10. — P. 20. — ISSN 2491-9292. — DOI: 10.1051/epjn/2024023.