

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

УДК 539.1

ОТЧЕТ  
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ КЛАСТЕРОВ  
ДОМЕННЫХ СТЕНОК В РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ

Научный руководитель  
(к.ф.-м.н., доцент)

\_\_\_\_\_ В. В. Никулин

Студент

\_\_\_\_\_ И. Д. Летягин

Москва 2026

# Содержание

Введение	3
1 Описание доменных стенок	5
2 Приближение тонкой стенки	6
3 Вывод уравнений движения	9
4 Полная энергия доменной стенки в тонкостенном приближении	13
5 Численные методы над треугольной сеткой	14
6 Дискретизация уравнения движения	18
7 Регистрация образования ПЧД	19
8 Примеры работы алгоритма	20
9 Заключение	25
А Переход от действия Намбу-Гото к действию Полякова, обобщение действия Полякова для р-бран. Действие Хоу-Такера	26
Список литературы	29

# Введение

Первичные чёрные дыры (ПЧД) рассматриваются в качестве возможного решения нескольких астрофизических вопросов. Согласно современным представлениям, ПЧД могут являться кандидатами в чёрные дыры промежуточных масс [1], вносить вклад в скрытую массу Вселенной и стохастический фон гравитационных волн [2], а также выступать в качестве зародышей для формирования центров ранних галактик, наблюдаемых в современных астрофизических экспериментах [3].

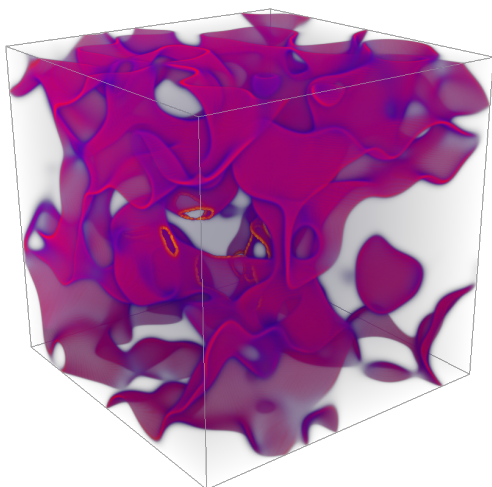
Предположение о формировании ПЧД в ранней Вселенной высказывается в работах [4–6]. Сегодня выдвинуты различные сценарии рождения ПЧД: образование из первичных флуктуаций плотности, коллапс топологических дефектов (струны и доменные стенки), спонтанное нарушение симметрии в ходе фазового перехода (например, во время QCD-перехода) [7–11]. В данной работе рассматривается механизм образования ПЧД через коллапс доменных стенок, образованных квантовыми флуктуациями в инфляционный период.

Доменная стенка — космологический объект, формируемый между двумя вакуумами скалярного поля с разными знаками. Различные вакуумы поля образуются в ходе спонтанного нарушения калибровочной инвариантности, вызываемого квантовыми флуктуациями полей.

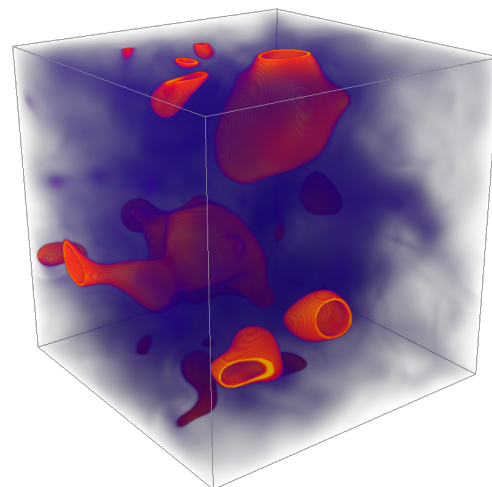
В ранних исследованиях предполагалось, что стенки имеют сферическую структуру, которая позволяет аналитически описать их эволюцию [12], но физические доменные стенки имеют произвольную геометрию, что подтверждается в ходе численных симуляций [13]. Данный факт делает невозможным расчёт динамики структуры аналитическими методами. В ранних работах рассчитывалась полевая эволюция стенок, но из-за высокой вычислительной сложности данная модель позволяет рассматривать только малые регионы пространства.

В рамках настоящего исследования применяется тонкостенное приближение. Его использование позволяет расширить границы симулируемого пространственного региона, что обеспечивает сбор необходимого объёма статистических данных. В расчёт также включены ключевые физические факторы: релятивистские эффекты и трение Хаббла, непосредственно влияющие на исследуемую динамику.

Результаты исследования будут использованы для предсказания точного спектра масс чёрных дыр, грубо предсказанного теорией в [7], который будет сравниваться с реальными данными, получаемыми из современных детекторов гравитационных волн в экспериментах LIGO, VIRGO, GEO600, TAMA 300 и LISA, а также в экспериментах, основанных на пульсарных таймингах, например, NANOGrav.



(a) Компьютерная модель «солитонной пены»



(b) Компьютерная модель «доменных пузырей»

Рис. 1: Результаты компьютерного моделирования [13]

**Целью** настоящей работы является создание метода для описания динамики доменных стенок в рамках тонкостенного приближения. На его основе проводится моделирование кластеров таких стенок в условиях ранней Вселенной с последующим определением спектра масс первичных чёрных дыр в рамках предложенной модели.

**Задачи:**

- Найти способ перейти от полевого описания доменной стенки к поверхностному в приближении тонкой стенки
- Получить уравнение движения тонкой стенки
- Провести моделирование кластера доменных стенок в данном приближении
- Оптимизировать симуляцию для большого кластера
- Получить точный спектр масс ПЧД из полученных данных

# 1 Описание доменных стенок

Будем рассматривать систему с действием:

$$S = \int d^4x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right) \quad (1)$$

В соседних областях вакуум может иметь различные знаки, что описывается  $\phi^4$ -потенциалом с простейшим видом:

$$V(\phi) = \lambda(\phi^2 - v^2)^2 \quad (2)$$

Данный полиномиальный потенциал выделяется тем, что он имеет два минимума, то есть два классических вакуума  $\phi^{vac} = \pm v$ . Максимум между вакуумами и есть модель полевой доменной стенки.

Из принципа наименьшего действия получается уравнение поля – уравнение Клейна-Гордона:

$$\phi_{,\mu}{}^\mu + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0 \quad (3)$$

Решение уравнения (3) для потенциала (2) с условиями, что  $V(\phi) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \pm\infty$  и  $\dot{\phi} = 0$ , является простейшим топологическим солитоном – кинком:

$$\phi(r) = v \operatorname{th} \left( \pm \sqrt{\frac{\lambda}{2}} v (r - r_0) \right) \quad (4)$$

Причём выражение (4) верно, если доменная стенка имеет бесконечно малую толщину (приближение тонкой стенки)

ТЭИ для доменной стенки имеет вид:

$$T_{ik} = \partial_i \phi \partial_k \phi - g_{ik} \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right) \quad (5)$$

Для тонкой сферической доменной стенки ТЭИ в явном виде имеет вид:

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho \end{pmatrix} \quad (6)$$

## 2 Приближение тонкой стенки

Начнём с действия скалярного поля

$$S[\phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right). \quad (7)$$

В простейшей метрике Минковского  $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  с  $\sqrt{-g} = 1$  вариация по полю  $\phi$  даёт известное уравнение движения. Решим его в (1+1)-d случае (предполагая однородность поля по  $y$  и  $z$ ):

$$\partial^2 \phi + V'(\phi) = 0, \quad (8)$$

$$\xrightarrow{(1+1)\text{-d}} \ddot{\phi} - \phi'' + V'(\phi) = 0. \quad (9)$$

Если потенциал  $V(\phi)$  содержит несколько минимумов (вакуумов), у этого уравнения имеется статичное решение с нетривиальной топологией (связывающее различные вакуумы).

$$\phi'' + V'(\phi) = 0, \quad \begin{cases} \phi(-\infty) = v_1, \\ \phi(+\infty) = v_2, \\ \phi'(\pm\infty) \rightarrow 0. \end{cases} \quad (10)$$

Также из уравнения следует (условие Богомольного):

$$(\phi')^2 = 2V(\phi). \quad (11)$$

Это, так называемый, «кинк», или доменная стенка  $\phi_{\text{wall}}(x)$ , энергия которой отлична от нуля в узкой полосе (соответствующей толщине стенки  $\delta$ ), где поле  $\phi \neq v_i$ , а полная энергия (поверхностная плотность энергии, если учесть однородность поля по  $y$  и  $z$ ):

$$\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} 2V(\phi_{\text{wall}}) dx \approx \int_{-\delta}^{+\delta} 2V(\phi_{\text{wall}}) dx. \quad (12)$$

Поскольку исходное уравнение (10) лоренц инвариантно, мы можем перейти в другую инерциальную СО, сделав преобразование лоренца, и получим уравнение движущейся с некоторой скоростью стенки  $\phi_{\text{wall}}(x, t)$ . Данное элементарное решение может рассматриваться как упрощённая версия, описывающая малый, почти плоский, фрагмент стенки (где приближенно достигается однородность поля  $\phi$  поперек координаты  $x$ ), и на малых промежутках времени (где скорость стенки остается примерно постоянной). Это элементарное решение  $\phi_{\text{wall}}$  мы будем использовать далее для упрощения действия (7).

Предположим, что после достаточного промежутка времени, поле  $\phi$  почти во всем

пространстве скатились в минимумы потенциала  $V(\phi)$  и колебания вокруг этих минимумов затухли — пространство перешло в вакуумные состояния  $v_i$ . За исключением тех граничных областей где эти состояния соприкасаются — там возникнут доменные стенки. Тогда все действие (7) можно рассматривать через призму кинкового решения, и перейти от теории поля  $\phi$  к эффективной теории описывающей динамику тонких (эффективно одномерных) стенок, как новых объектов.

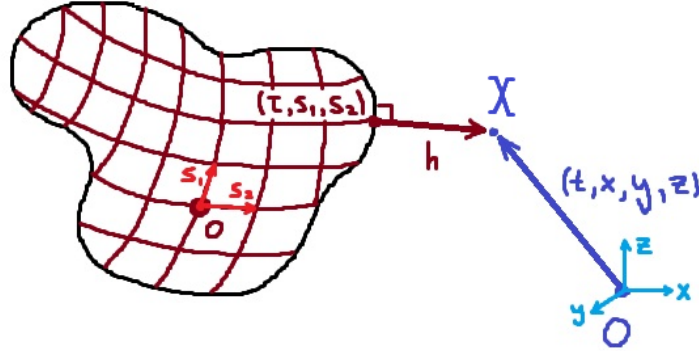


Рис. 2: Переход к новой системе координат, связанной со доменной стенкой (изображена черным) Точка  $X$  представлена как в новых координатах (красным), так и в старых координатах (синим).

Для этого нужно перейти в новую систему координат, привязанную к сформировавшимся доменным стенкам:  $(t, x, y, z) \rightarrow (\tau, s_1, s_2, h)$ , где  $h$  — высота над ближайшей точкой доменной стенки,  $s_1, s_2$  — внутренние координаты этой точки на стенке,  $\tau$  — собственное время в этой точке стенки (часы движутся вместе поверхностью стенки). В отличие от старых, новые координаты будут криволинейными (поскольку стенка имеет произвольную форму) и нестационарными (поскольку стенка движется).

Определим метрику новой системы координат. Старые координаты произвольной точки в новых координатах можно выразить следующим образом (см. Рис. 2):

$$X^\mu = X_{\text{wall}}^\mu(\tau, s_1, s_2) + e^\mu(\tau, s_1, s_2) h, \quad (13)$$

где  $X_{\text{wall}}^\mu(\tau, s_1, s_2)$  — координата точки на поверхности доменной стенки от её внутренних координат  $(s_1, s_2)$ , а  $e^\mu(\tau, s_1, s_2)$  — единичный вектор нормали к поверхности стенки в этой точке. Тогда новая метрика:

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tilde{X}^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \tilde{X}^\beta} \eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \gamma_{ab} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где  $\gamma_{ab}$  — «индуцированная» метрика на поверхности стенки. Нули обусловлены ортого-

нальностью базисного вектора  $e^\mu$  и базисных векторов остальных координат на стенке  $(\tau, s_1, s_2)$  — условием по которому и строится данная система координат (см. Рис. 2). Минус единица обусловлена единичностью нормального вектора  $e^\mu$  и сигнатурой пространства. Индуцированная метрика, как можно убедиться, имеет следующую форму:

$$\gamma_{ab} = \partial_{\tilde{a}}(X_{\text{wall}}^\mu + e^\mu h) \partial_{\tilde{b}}(X_{\mu}^{\text{wall}} + e_\mu h) \quad (15)$$

Теперь получим эффективное действие. Заметим что, так как никаких полевых конфигураций кроме стенок не осталось (по условию задачи), можно подставить  $\phi(\tilde{X}) = \phi_{\text{wall}}(\tilde{X}) \equiv \phi_{\text{wall}}(h)$ . Последнее равенство выполняется, поскольку поле в доменной стенке меняется только поперек неё, причем зависимость эта известна и является ранее полученным в 1-d элементарным решением. Перейдем к новым координатам в действии (7) и подставим элементарное решение:

$$\begin{aligned} S[\phi] &= \int d^4x \sqrt{-\eta} \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right) = \\ &= \int d\tau ds^2 dh \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2} (\gamma_{ab} \partial^a \phi \partial^b \phi - \partial^h \phi \partial^h \phi) - V(\phi) \right) = \\ &= \int d\tau ds^2 dh \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2} (h_{ab} \partial^a \phi_{\text{wall}}(h) \partial^b \phi_{\text{wall}}(h) - \partial^h \phi_{\text{wall}}(h) \partial^h \phi_{\text{wall}}(h)) - V(\phi_{\text{wall}}) \right) = \\ &= \int d\tau ds^2 dh \sqrt{\gamma} \left( -\frac{1}{2} (\phi'_{\text{wall}}(h))^2 - V(\phi) \right) = - \int d\tau ds^2 \int 2V(\phi_{\text{wall}}) \sqrt{\gamma} dh, \end{aligned} \quad (16)$$

где в последнем равенстве мы воспользовались формулой Богомольного (11). Заметим, что из-за конечной толщины стенки значения потенциала  $V(\phi)$  близки к 0 за пределами толщины стенки, что было замечено в (12). Поэтому можно приблизить

$$S[\phi] \approx - \int d\tau ds^2 \int_{-\delta}^{+\delta} 2V(\phi_{\text{wall}}) \sqrt{\gamma} dh, \quad (17)$$

Но в таком случае мы можем использовать приближение тонкой стенки в индуцированной метрике, если  $h \sim \delta$ :

$$\gamma_{ab} = \partial_{\tilde{a}}(X_{\text{wall}}^\mu + e^\mu h) \partial_{\tilde{b}}(X_{\mu}^{\text{wall}} + e_\mu h) \approx \partial_{\tilde{a}} X_{\text{wall}}^\mu \partial_{\tilde{b}} X_{\mu}^{\text{wall}}, \quad (18)$$

$$\text{если } \dot{X}_{\text{wall}}^\mu \gg \dot{e}^\mu \text{ и } \nabla X_{\text{wall}}^\mu \gg \nabla e^\mu. \quad (19)$$

Последние условия можно интерпретировать так: вращательным движением стенки можно пренебречь по сравнению с поступательным, а радиус кривизны стенки много больше её толщины, соответственно. Это и есть приближение тонкой стенки, которое позволяет рассматривать её как 2-мерную мембрану, и пренебречь колебательными полевыми степенями

свободы внутри стенки. Заметим также, что  $\partial_{\bar{a}} X_{\text{wall}}^{\mu} \partial_{\bar{b}} X_{\mu}^{\text{wall}}$  — это внутренняя метрика на поверхности стенки, обусловленная криволинейными координатами  $(s_1, s_2)$  и замедлением времени  $\tau$  при движении стенки. Учитывая все вышесказанное,

$$\begin{aligned} S[\phi] &\approx - \int d\tau ds^2 \sqrt{|\partial_{\bar{a}} X_{\text{wall}}^{\mu} \partial_{\bar{b}} X_{\mu}^{\text{wall}}|} \int_{-\delta}^{+\delta} 2V(\phi_{\text{wall}}) dh = \\ &= -\sigma \int d\tau ds^2 \sqrt{|\partial_{\bar{a}} X_{\text{wall}}^{\mu} \partial_{\bar{b}} X_{\mu}^{\text{wall}}|} = S_{\text{eff}}[X_{\text{wall}}], \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\sigma$  может интерпретироваться как поверхностное натяжение стенки (а это то же самое, что и плотность поверхностной энергии стенки).

Итак, мы получили т.н. действие Намбу-Гото (точнее, его обобщение 2d-объекта — для доменной стенки, оригинальное действие написано для 1d объекта — струны). Оно описывает динамику 2-мерной релятивистской мембраны, и мы видим, что доменная стенка ведет себя именно так, если пренебречь приповерхностными полевыми эффектами:

$$S_{NG}[X(\tau, \mathbf{s})] = -\sigma \int d\tau ds^2 \sqrt{|\partial_a X^{\mu} \partial_b X_{\mu}|} \quad (21)$$

### 3 Вывод уравнений движения

Будем рассматривать доменную стенку на фоне внешней геометрии пространства. Тогда наше действие можно записать так (описано в Приложении):

$$S_P[X(\tau, \mathbf{s})] = -\frac{\sigma}{2} \int d\tau d^2 s (\sqrt{h} h^{ab} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} g_{\mu\nu} - \sqrt{h}), \quad (22)$$

где внешняя метрика  $g_{\mu\nu}$  в общем случае зависит от положения в пространстве  $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(t, \vec{r})$ .

Найдём уравнение движения, варьируя действие по координатам  $X^{\mu}$ :

$$\delta_X S_P = -\frac{\sigma}{2} \int d\tau d^2 s \sqrt{h} h^{ab} \delta(\partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} g_{\mu\nu}). \quad (23)$$

Вычислим вариацию подынтегрального выражения:

$$\begin{aligned} \delta(\partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} g_{\mu\nu}) &= \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} \delta g_{\mu\nu} + 2g_{\mu\nu} \partial_a \delta X^{\mu} \partial_b X^{\nu} \\ &= \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} \partial_{\lambda} g_{\mu\nu} \delta X^{\lambda} + 2g_{\mu\nu} \partial_a \delta X^{\mu} \partial_b X^{\nu}. \end{aligned} \quad (24)$$

Подставляя в вариацию и интегрируя по частям второе слагаемое, получаем:

$$\delta_X S_P = -\frac{\sigma}{2} \int d\tau d^2s \left[ \sqrt{h} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \partial_\lambda g_{\mu\nu} - 2\partial_a \left( \sqrt{h} h^{ab} g_{\lambda\nu} \partial_b X^\nu \right) \right] \delta X^\lambda = 0. \quad (25)$$

В силу произвольности  $\delta X^\lambda$  имеем уравнение:

$$\sqrt{h} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \partial_\lambda g_{\mu\nu} - 2\partial_a \left( \sqrt{h} h^{ab} g_{\lambda\nu} \partial_b X^\nu \right) = 0. \quad (*)$$

Раскроем производную в (\*) по правилу Лейбница:

$$\partial_a \left( \sqrt{h} h^{ab} g_{\lambda\nu} \partial_b X^\nu \right) = \sqrt{h} h^{ab} \partial_b X^\nu \partial_a g_{\lambda\nu} + g_{\lambda\nu} \partial_a \left( \sqrt{h} h^{ab} \partial_b X^\nu \right). \quad (26)$$

Тогда уравнение (\*) принимает вид:

$$\sqrt{h} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu (\partial_\lambda g_{\mu\nu} - 2\partial_\mu g_{\lambda\nu}) - 2g_{\lambda\nu} \partial_a \left( \sqrt{h} h^{ab} \partial_b X^\nu \right) = 0. \quad (**)$$

Заметим, что выражение в скобках можно преобразовать:

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} - 2\partial_\mu g_{\lambda\nu} = -(\partial_\nu g_{\lambda\mu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) = -2\Gamma_{\lambda,\mu\nu}, \quad (27)$$

где  $\Gamma_{\lambda,\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu})$  – символ Кристоффеля первого рода.

Подставим это в (\*\*) и поднимем индекс  $\lambda$  с помощью метрики  $g^{\lambda\sigma}$  (свернув с  $g^{\lambda\sigma}/\sqrt{h}$ ):

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{h}} \partial_a \left( \sqrt{h} h^{ab} \partial_b X^\sigma \right) + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu = 0}, \quad (28)$$

где  $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = g^{\lambda\sigma} \Gamma_{\lambda,\mu\nu}$  – символ Кристоффеля второго рода. Это и есть искомое уравнение движения [14].

Внутренняя метрика  $h_{ab}$  имеет вид:

$$h^{ab} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathcal{H}^{ab} \end{bmatrix}, \quad (29)$$

где  $\mathcal{H}^{ab}$  – пространственная часть метрики, следовательно,  $\sqrt{h} = \sqrt{\mathcal{H}}$ .

Для удобства дальнейших численных вычислений полезно записать уравнение (28) через оператор Лапласа-Бельтрами. Оператор Лапласа-Бельтрами на поверхности задаётся в виде:

$$\boxed{\Delta_h X^\mu = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}}} \partial_{\bar{s}} \left( \sqrt{\mathcal{H}} \mathcal{H}^{ab} \partial_{\bar{s}} X^\mu \right)} \quad (30)$$

Распишем уравнение (28), используя оператор Лапласа-Бельтрами:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{h}} \partial_a (\sqrt{h} h^{ab} \partial_b X^\lambda) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu &= \frac{1}{\sqrt{h}} \partial_\tau (\sqrt{h} \partial^\tau X^\lambda) - \Delta_h X^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_a X^\mu \partial^a X^\nu = \\ \ddot{X}^\lambda + \omega \dot{X}^\lambda - \Delta_h X^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda (\dot{X}^\mu \dot{X}^\nu - \nabla_s X^\mu \nabla_s X^\nu) &= 0, \end{aligned} \quad (31)$$

где  $\dot{X}^\lambda = \partial_\tau X^\lambda$ , а  $\nabla_s X^\mu = \partial_{\vec{s}} X^\mu$ ,  $\omega = \frac{\partial_\tau \sqrt{\mathcal{H}}}{\sqrt{\mathcal{H}}} = \frac{\partial_\tau \mathcal{H}}{2\mathcal{H}}$ .

Из построения координат относительно стенки следует, что  $X^0 = t$ ,  $X^i = \vec{X}$ , где  $t$  — глобальное время, а  $\vec{X}$  — радиус-вектор точки на поверхности стенки в глобальном пространстве. Рассмотрим интересующий нас случай FLRW-метрики для плоской Вселенной в инфляционной стадии.

$$g_{00} = 1, g_{ij} = -a^2 \delta_{ij}, \Gamma_{ij}^0 = Ha^2 \delta_{ij}, \Gamma_{0j}^i = \Gamma_{j0}^i = H \delta_j^i,$$

все прочие компоненты  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  тождественно равны нулю,  $H = const$

$$\lambda = 0 : \ddot{X}^0 + \omega \dot{X}^0 - \Delta_h X^0 + \Gamma_{\mu\nu}^0 \partial_a X^\mu \partial^a X^\nu = 0$$

$$\ddot{X}^0 + \omega \dot{X}^0 - \Delta_h X^0 + Ha^2 \partial_a \vec{X} \partial^a \vec{X} = 0$$

$$\boxed{\ddot{t} + \omega \dot{t} - \Delta_h t + Ha^2 \left( (\dot{\vec{X}})^2 - (\nabla_s \vec{X})^2 \right) = 0}$$

$$\lambda = i : \ddot{X}^i + \omega \dot{X}^i - \Delta_h X^i + \Gamma_{\mu\nu}^i \partial_a X^\mu \partial^a X^\nu = 0$$

$$\ddot{X}^i + \omega \dot{X}^i - \Delta_h X^i + 2H \partial^a X^0 \partial_a X^i = 0$$

$$\boxed{\ddot{\vec{X}} + \omega \dot{\vec{X}} - \Delta_h \vec{X} + 2H \left( \partial_\tau t \dot{\vec{X}} - \nabla_s t \nabla_s \vec{X} \right) = 0}$$

Вводя Лоренц-фактор, получаем уравнения:

$$\dot{\gamma} + \omega \gamma - \Delta_h t + Ha^2 \left( (\dot{\vec{X}})^2 - (\nabla_s \vec{X})^2 \right) = 0 \quad (32)$$

$$\ddot{\vec{X}} + \omega \dot{\vec{X}} - \Delta_h \vec{X} + 2H \left( \gamma \dot{\vec{X}} - \nabla_s t \nabla_s \vec{X} \right) = 0 \quad (33)$$

Попробуем привести производные от глобального времени по внутренним координатам  $\partial_\xi t$ , где  $\xi = (\tau, s_1, s_2)$ , к более удобоваримому виду. Рассмотрим условие ортогональности касательных векторов к доменной стенке:

$$\begin{cases} g_{\mu\nu} e_\tau^\mu e_s^\nu = 0, \\ e_\tau^\mu = (\partial_\tau t, \partial_\tau \vec{X}), \\ e_s^\mu = (\partial_s t, \partial_s \vec{X}). \end{cases} \quad (34)$$

Для FLRW-метрики получаем

$$\partial_\tau t \partial_{\vec{s}} t - a^2(t) \partial_\tau \vec{X} \cdot \partial_{\vec{s}} \vec{X} = 0. \quad (35)$$

Выразим отсюда  $\partial_{\vec{s}} t$ :

$$\partial_{\vec{s}} t = \frac{a^2(t) \partial_\tau \vec{X} \cdot \partial_{\vec{s}} \vec{X}}{\partial_\tau t}. \quad (36)$$

Учитывая, что  $\partial_\tau t \equiv \gamma$ , и переходя к векторным обозначениям, получаем в конечном итоге:

$$\boxed{\nabla_s t = \frac{a^2(t) \dot{\vec{X}} \cdot \nabla_s \vec{X}}{\gamma}}, \quad (37)$$

где  $\dot{\vec{X}} \equiv \partial_\tau \vec{X}$ , а  $\nabla_s \equiv \partial_{\vec{s}}$ .

Подставив условие ортогональности 37 в уравнения 32 и 33, получаем общий вид уравнений движения доменной стенки в расширяющейся Вселенной Фридмана:

$$\dot{\gamma} + \omega\gamma - \Delta_h t + Ha^2 \left( (\dot{\vec{X}})^2 - (\nabla_s \vec{X})^2 \right) = 0 \quad (38)$$

$$\ddot{\vec{X}} - \Delta_h \vec{X} + 2H\dot{\vec{X}} \left( \gamma - \frac{a^2}{\gamma} (\nabla_s \vec{X})^2 \right) + \omega\dot{\vec{X}} = 0, \quad (39)$$

Обратим внимание, что в уравнении 39 под обозначением  $\dot{\vec{X}}$  имеется в виду производная по локальному времени  $\tau$ . Совершим переход к глобальному времени  $t$ :

$$\dot{\vec{X}} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} = \gamma \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \quad (40)$$

$$\ddot{\vec{X}} = \frac{\partial}{\partial \tau} \dot{\vec{X}} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \gamma \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right) = \dot{\gamma} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} + \gamma^2 \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} \quad (41)$$

После введения переобозначения  $\dot{\vec{X}} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$ , итоговое уравнение принимает вид:

$$\boxed{\ddot{\vec{X}} + 2H\dot{\vec{X}} \left( 1 - \frac{a^2}{\gamma^2} (\nabla_s \vec{X})^2 \right) + \frac{1}{\gamma} \dot{\vec{X}} \left( \omega + \frac{\partial_\tau \gamma}{\gamma} \right) - \frac{1}{\gamma^2} \Delta_h \vec{X} = 0,} \quad (42)$$

где  $\omega = \frac{\partial_\tau \mathcal{H}}{2\mathcal{H}}$ ,  $\gamma = \partial_\tau t$  а  $\dot{\gamma}$  ищется из уравнения:

$$\partial_\tau \gamma + \omega\gamma - \Delta_h t + Ha^2 \left( \gamma^2 \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 - (\nabla_s \vec{X})^2 \right) = 0 \quad (43)$$

Полученная модель не учитывает дополнительные механизмы диссипации энергий, заключающиеся в излучении гравитационных волн и скалярных частиц.

Рассмотрим случай плоской внешней метрики ( $a(t) = 0$ ):

$$\boxed{\ddot{\vec{X}} + \frac{1}{\gamma} \dot{\vec{X}} \left( \omega + \frac{\partial_\tau \gamma}{\gamma} \right) - \frac{1}{\gamma^2} \Delta_h \vec{X} = 0} \quad (44)$$

Далее рассмотрим нерелятивистский предел ( $\gamma = 1$ ):

$$\boxed{\ddot{\vec{X}} - \Delta_h \vec{X} = 0} \quad (45)$$

## 4 Полная энергия доменной стенки в тонкостенном приближении

Для вывода энергии воспользуемся действием Намбу-Гото, полученным ранее:

$$S_{NG} = -\sigma \int d\tau ds^2 \sqrt{\gamma},$$

где  $\gamma = \det(\gamma_{ab})$ ,  $\gamma_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu$

Найдём явный вид метрики  $\gamma_{ab}$ , воспользовавшись калибровкой  $\tau = t^1$ .

$$\begin{aligned} \gamma_{00} &= \dot{X}^\mu \dot{X}_\mu = 1 - v^2 \\ \gamma_{i0} &= \partial_i X^\mu \dot{X}_\mu = -\vec{v} \partial_i \vec{X} \\ \gamma_{ii} &= -\partial_i \vec{X} \partial_j \vec{X} \\ \gamma &= \det(\gamma_{ab}) = (1 - v_\perp^2) \det(\gamma_{ij}) \end{aligned}$$

Заметим, что  $\det(\gamma_{ij}) ds^2 = dA$ , где  $dA$  - элемент площади поверхности доменной стенки.

Подставив явный вид  $\sqrt{\gamma}$  в действие, получим:

$$S = -\sigma \int d\tau dA \sqrt{1 - v_\perp^2} \implies L = -\sigma \int dA \sqrt{1 - v_\perp^2}$$

---

<sup>1</sup>Вывод, приведённый ниже, может быть проделан в общем случае с более сложной математикой, но полученный результат будет аналогичен.

Перейдём от лагранжиана к гамильтониану:

$$P = \frac{\partial L}{\partial v} = \sigma \frac{v_{\perp}}{\sqrt{1 - v_{\perp}^2}} = \sigma v_{\perp} \gamma$$

Выразим  $v_{\perp}$  через  $P$ :

$$P^2 = \sigma^2 \frac{v_{\perp}^2}{1 - v_{\perp}^2} \implies P^2(1 - v_{\perp}^2) = \sigma^2 v_{\perp}^2 \implies v_{\perp}^2 = \frac{P^2}{P^2 + \sigma^2},$$

откуда

$$v_{\perp} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + \sigma^2}}, \quad \sqrt{1 - v_{\perp}^2} = \frac{\sigma}{\sqrt{P^2 + \sigma^2}}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{P^2 + \sigma^2}}{\sigma}. \quad (46)$$

Гамильтонова плотность получается стандартным преобразованием Лежандра:

$$\mathcal{H} = P v_{\perp} - \mathcal{L}. \quad (47)$$

Подставляя (46):

$$P v_{\perp} = \frac{P^2}{\sqrt{P^2 + \sigma^2}}, \quad -\mathcal{L} = \sigma \sqrt{1 - v_{\perp}^2} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{P^2 + \sigma^2}},$$

и складывая,

$$\mathcal{H} = \sqrt{P^2 + \sigma^2} \quad (48)$$

Это знакомая релятивистская формула « $E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$ » для точечной частицы массы  $\sigma$  и импульса  $P$ , проинтегрированная по поверхности.

Полная энергия системы:

$$\boxed{H = \int dA \sqrt{P^2 + \sigma^2} = \sigma \int \gamma dA.} \quad (49)$$

## 5 Численные методы над треугольной сеткой

1. **Триангуляция:** наиболее подходящий способ триангуляции для данной задачи — шагающие кубики (marching cubes) [15].

Данный метод позволяет построить максимально равномерную триангуляцию, т.е. все треугольники примерно равносторонние.

Также в качестве препроцессинга сетки стоит использовать сглаживание методом потока средней кривизны (mean curvature flow), так как исходная сетка обладает грубой кубической геометрией.

Типичный вывод данных после триангуляции:

- `verts` — массив  $N \times 3$ , где  $N$  — количество точек  
`verts` =  $[[0.0, 0.0, 0.0], [1.0, 1.5, 0.0], [2.0, 1.5, 2.5], \dots]$ , структура массива — радиус-векторы каждой вершины треугольника
- `faces` — массив  $M \times 3$ , где  $M$  — количество рёбер,  $M \approx 3N$  (на практике  $M \approx 2N$ )  
`faces` =  $[[0, 1, 2], [1, 2, 3], [0, 2, 3], \dots]$ , структура массива, элементы — номера вершин, составляющих треугольник

2. **Оператор Лапласа-Бельтрами:** дискретный оператор Лапласа-Бельтрами на треугольной сетке имеет вид [16]:

$$\Delta_N \vec{r}(v_i) = \frac{1}{2S_i} \sum_{v_j \in N_1(v_i)} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij})(\vec{r}(v_j) - \vec{r}(v_i)), \quad (50)$$

где  $v_i$  — некоторая вершина,  $\alpha_{ij}$  и  $\beta_{ij}$  — два угла, противолежащие ребру  $ij$  в двух смежных ему треугольниках,  $v_j \in N_1(v_i)$  означает, что вершины  $v_i$  и  $v_j$  лежат на расстоянии одного ребра друг от друга.

Введя обозначения  $\vec{v}_i = \vec{r}(v_i)$ ,  $\omega_{ij} = \frac{\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}}{2}$ , получаем:

$$\Delta \vec{v}_i = \frac{1}{S_i} \sum_{v_j \in N_1(v_i)} \omega_{ij}(\vec{v}_j - \vec{v}_i) \quad (51)$$

Построение матрицы весов:

- $e_{ij} = v_i - v_j$ ,  $e_{jk} = v_j - v_k$ ,  $e_{ki} = v_k - v_i$  — стороны треугольника
- $\cot \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$ ,  $\cot \alpha = \cot \angle(e_{ij}, -e_{ki})$ ,  
 $\cot \beta = \cot \angle(e_{jk}, -e_{ij})$ ,  $\cot \gamma = \cot \angle(e_{ki}, -e_{jk})$  — углы треугольника (см. рис. 3b)
- $\omega_{ij} = \frac{1}{2} \cot \gamma$ ,  $\omega_{jk} = \frac{1}{2} \cot \alpha$ ,  $\omega_{ki} = \frac{1}{2} \cot \beta$  — веса рёбер треугольника
- Локальная матрица весов для треугольника  $\Delta ijk$ :

$$\mathbf{L}_{\Delta ijk} = \begin{bmatrix} -(\omega_{ij} + \omega_{ki}) & \omega_{ij} & \omega_{ki} \\ \omega_{ij} & -(\omega_{ij} + \omega_{jk}) & \omega_{jk} \\ \omega_{ki} & \omega_{jk} & -(\omega_{ki} + \omega_{jk}) \end{bmatrix} \quad (52)$$

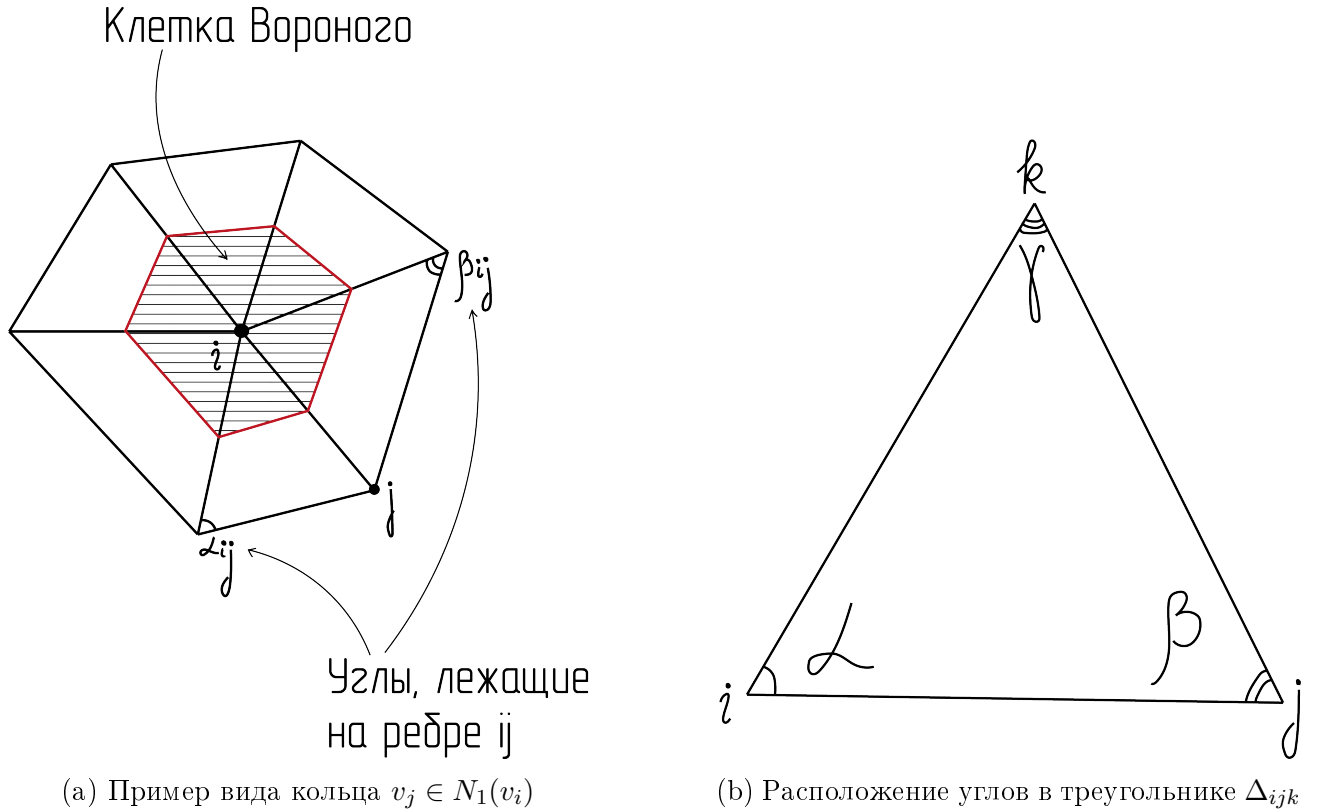


Рис. 3: Геометрические структуры для дискретного оператора Лапласа-Бельтрами: (a) окрестность вершины на треугольной сетке; (b) обозначения углов в отдельном треугольнике.

Тогда оператор Лапласа-Бельтрами принимает вид:

$$\Delta \vec{v}_i = \frac{1}{S_i} \sum_{v_j \in N_1(v_i)} \mathbf{L}_{ij} \vec{v}_j \quad (53)$$

Векторизованная формула:

$$\Delta \vec{v} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{L} \vec{v}, \quad (54)$$

где  $\mathbf{M}$  — матрица "масс" ( $\mathbf{M}_{ii} = S_i, \mathbf{M}_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ ), а матрица "упругости"  $\mathbf{L}$  собирается таким образом:

- Расчитываем локальную матрицу  $\mathbf{L}_\Delta$  размерности  $3 \times 3$  для каждого треугольника вышеописанным способом.
- Составляем матрицу селекции  $S_\Delta$  размерности  $3 \times N$  для треугольника  $\Delta_{ijk}$ , в которой в первом столбце все элементы нулевые, кроме строки  $i$ , в которой стоит единица, во втором столбце также все элементы, кроме строки  $j$ , нулевые, для третьего столбца такая же логика.
- Складываем локальные матрицы  $\mathbf{L}_\Delta^{(k)}$  с использованием матриц селекции  $S_\Delta^{(k)}$

для всех  $k$ -треугольников ( $k = 1, 2, \dots, M$ ) по формуле:

$$\mathbf{L} = \sum_{k=1}^M S_{\Delta}^{(k)T} \mathbf{L}_{\Delta}^{(k)} S_{\Delta}^{(k)} \quad (55)$$

## 6 Дискретизация уравнения движения

Будем рассматривать уравнение движения релятивистской доменной стенки на фоне плоской статической Вселенной:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{1}{\gamma^2} \Delta \vec{r}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\perp}^2}}, \quad (56)$$

Получим дискретизацию уравнения движения через уравнения Гамильтона-Якоби из гамильтониана:

$$H = \int dA \sqrt{P^2 + \sigma^2} = \sigma \int \gamma dA \quad (57)$$

Гамильтониан на треугольной сетке дискретизируется так:

$$H_d = \sum_{i=1}^V \sqrt{(\sigma A_i)^2 + \pi_i^2} = \sigma \sum_i A_i \gamma_i, \quad (58)$$

где  $\pi_i = \sigma A_i \gamma_i v_{\perp i}$  — нормальная компонента импульса.

Уравнение Гамильтона-Якоби для  $\pi_i$ :

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_i &= -\vec{n}_i \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_i} \\ \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_i} &= \sum_j \frac{\partial H_j}{\partial A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \vec{r}_i} \\ \frac{\partial H_j}{\partial A_j} &= \frac{\sigma^2 A_j}{\sqrt{(\sigma A_j)^2 + \pi_j^2}} = \frac{\sigma}{\gamma_j} \\ A_j &= \frac{1}{3} \sum_{T \ni j} A_T \implies \frac{\partial A_j}{\partial \vec{r}_i} = \frac{1}{3} \sum_{T \ni j, i \in T} \frac{\partial A_T}{\partial \vec{r}_i} \\ \frac{\partial H_d}{\partial \vec{r}_i} &= \frac{1}{3} \sum_{T \ni i} \frac{\partial A_T}{\partial \vec{r}_i} \sum_{j \in T} \frac{\sigma}{\gamma_j} \end{aligned}$$

Считаем, что гамма-фактор внутри одного треуголька меняется слабо  $\implies$

$$\begin{aligned} \implies \sum_{j \in T} \frac{\sigma}{\gamma_j} &\approx \frac{3\sigma}{\gamma_i} \\ \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_i} &\approx \frac{\sigma}{\gamma_i} \sum_{T \ni i} \frac{\partial A_T}{\partial \vec{r}_i} = \frac{\sigma}{\gamma_i} \nabla_{\vec{r}_i} A_{\text{tot}} = -\frac{\sigma}{\gamma_i} L \vec{r}_i \end{aligned}$$

Итого уравнение на нормальный импульс принимает вид:

$$F_i = \dot{\pi}_i = -\vec{n}_i \nabla_{\vec{r}_i} H \approx \frac{\sigma}{\gamma_i} \vec{n}_i L \vec{r}_i \quad (59)$$

В качестве интегратора используется двухпорядочная leapfrog-схема в форме kick-drift-kick (KDK), которая в первом порядке является симплектической по заданному гамильтониану задачи:

---

**Algorithm 1** Один шаг KDK для релятивистской мембраны

---

- 1: **Дано:**  $(\vec{r}_i^n, \pi_i^n)$ , шаг  $h$ , натяжение  $\sigma$
  - 2:  $L\vec{r}, A, \vec{n} \leftarrow \text{compute\_geometry}(\vec{r}_i^n)$  ▷ геометрия в начале шага
  - 3:  $\gamma_i \leftarrow \sqrt{1 + (\pi_i^n / (\sigma A_i))^2}$
  - 4:  $F_i \leftarrow \frac{\sigma}{\gamma_i} \vec{n}_i L\vec{r}_i$
  - 5:  $\pi_i^{n+1/2} \leftarrow \pi_i^n + \frac{h}{2} F_i$  ▷ первый полу-кик
  - 6:  $v_{\perp i} \leftarrow \pi_i^{n+1/2} / \sqrt{(\sigma A_i)^2 + (\pi_i^{n+1/2})^2}$  ▷ точная связь
  - 7:  $\vec{r}_i^{n+1} \leftarrow \vec{r}_i^n + h v_{\perp i} \vec{n}_i$  ▷ дрейф вдоль нормали в начале шага
  - 8:  $L\vec{r}', A', \vec{n}' \leftarrow \text{compute\_geometry}(\vec{r}_i^{n+1})$  ▷ геометрия в конце шага
  - 9:  $\gamma'_i \leftarrow \sqrt{1 + (\pi_i^{n+1/2} / (\sigma A'_i))^2}$
  - 10:  $F'_i \leftarrow \frac{\sigma}{\gamma'_i} \vec{n}'_i L\vec{r}'_i$
  - 11:  $\pi_i^{n+1} \leftarrow \pi_i^{n+1/2} + \frac{h}{2} F'_i$  ▷ второй полу-кик
- 

Каждый из трёх шагов алгоритма (kick, drift, kick) — точный поток одной из двух разделимых частей  $H_d$ . “kick” двигает только  $\pi$  (положения  $\vec{r}$  заморожены,  $A_i, \vec{n}_i$  постоянны), “drift” двигает только  $\vec{r}$  ( $\pi$  заморожены, скорость  $v_{\perp}$  постоянна). По теореме о композициях симплектиков получаемое отображение  $\Phi_h: (\vec{r}^n, \pi^n) \mapsto (\vec{r}^{n+1}, \pi^{n+1})$  сохраняет симплектическую форму  $d\pi \wedge d\vec{r}$ . Это влечёт существование модифицированного гамильтониана  $\tilde{H}_h = H_0 + h^2 H_2 + h^4 H_4 + \dots$ , который сохраняется строго (на любом числе шагов) и отстоит от  $H_d$  на  $\mathcal{O}(h^2)$ . Линейного дрейфа  $E_{\text{tot}}(t)$  нет; наблюдаются только осцилляции амплитуды  $\mathcal{O}(h^2)$  вокруг постоянного значения.

## 7 Регистрация образования ПЧД

В KDK-схеме на каждой вершине  $i$  сетки известны её положение  $\vec{r}_i$ , канонический импульс  $\pi_i$  (направленный по нормали), доля площади  $A_i$  и нормаль  $\vec{n}_i$ . В единицах симуляции ( $\sigma = 1, c = 1$ ) энергия и 3-импульс вершины

$$E_i = \sqrt{A_i^2 + \pi_i^2}, \quad \vec{P}_i = \pi_i \vec{n}_i. \quad (60)$$

Каждый замкнутый пузырь — отдельная связная компонента сетки. Для компоненты  $\alpha$  суммирование по её вершинам даёт лабораторные энергию, импульс и инвариантную

массу:

$$E^\alpha = \sum_{i \in \alpha} E_i, \quad \vec{P}^\alpha = \sum_{i \in \alpha} \vec{P}_i, \quad M^\alpha = \sqrt{(E^\alpha)^2 - |\vec{P}^\alpha|^2}. \quad (61)$$

Использование  $M^\alpha$  вместо  $E^\alpha$  существенно: из энергии явно вычитается вклад поступательного движения центра масс пузыря, и в критерий формирования ПЧД входит только «внутренняя» энергия, способная оказаться под гравитационным радиусом.

Размер пузыря — максимальное удаление вершины от взвешенного по площади центра:

$$\vec{c}^\alpha = \frac{1}{A^\alpha} \sum_{i \in \alpha} A_i \vec{r}_i, \quad A^\alpha = \sum_{i \in \alpha} A_i, \quad R^\alpha = \max_{i \in \alpha} \|\vec{r}_i - \vec{c}^\alpha\| \quad (62)$$

Критерии детекции формирования ПЧД:

**Критерий 1 (гипотеза обруча)** Пузырь становится ПЧД, если он оказывается под собственным шварцшильдовским радиусом:

$$R^\alpha \leq 2G M^\alpha, \quad (63)$$

где  $2G$  — безразмерная гравитационная константа симуляции. При срабатывании вершины и грани компоненты вырезаются из сетки, а в спектр заносится событие с массой  $M^\alpha$  и моментом регистрации  $t$ .

**Критерий 2 (исчезновение)** В системе нет каналов диссипации энергии (нет излучения скалярных квантов и гравитационных волн), а  $E^\alpha$  — точный интеграл движения. Поэтому если между двумя проверками детектора пузырь полностью пропал из сетки (его сжал ремешинг до точки), его энергия не могла никуда исчезнуть и должна была сосредоточиться под гравитационным радиусом. В спектр заносится  $M^\alpha$ , измеренная в последнем кадре, где пузырь ещё наблюдался.

## 8 Примеры работы алгоритма

Для генерации начальных распределений кластеров используется алгоритм, описанный в статье [13]

Параметры первой симуляции: E-fold = 4, init = 2.4, spectrum =  $k^{-4}$

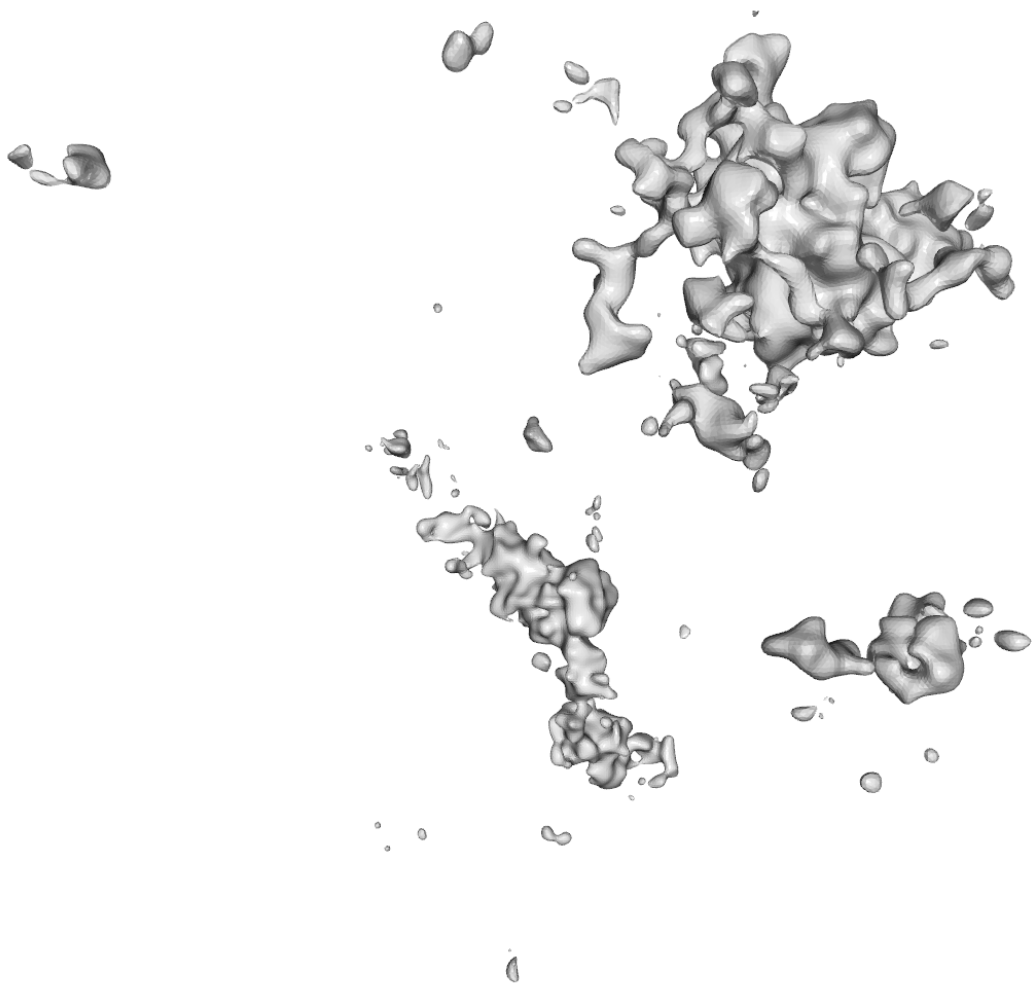


Рис. 4: Пространственное распределение кластеров

## Энергетика и кинематика доменной стенки

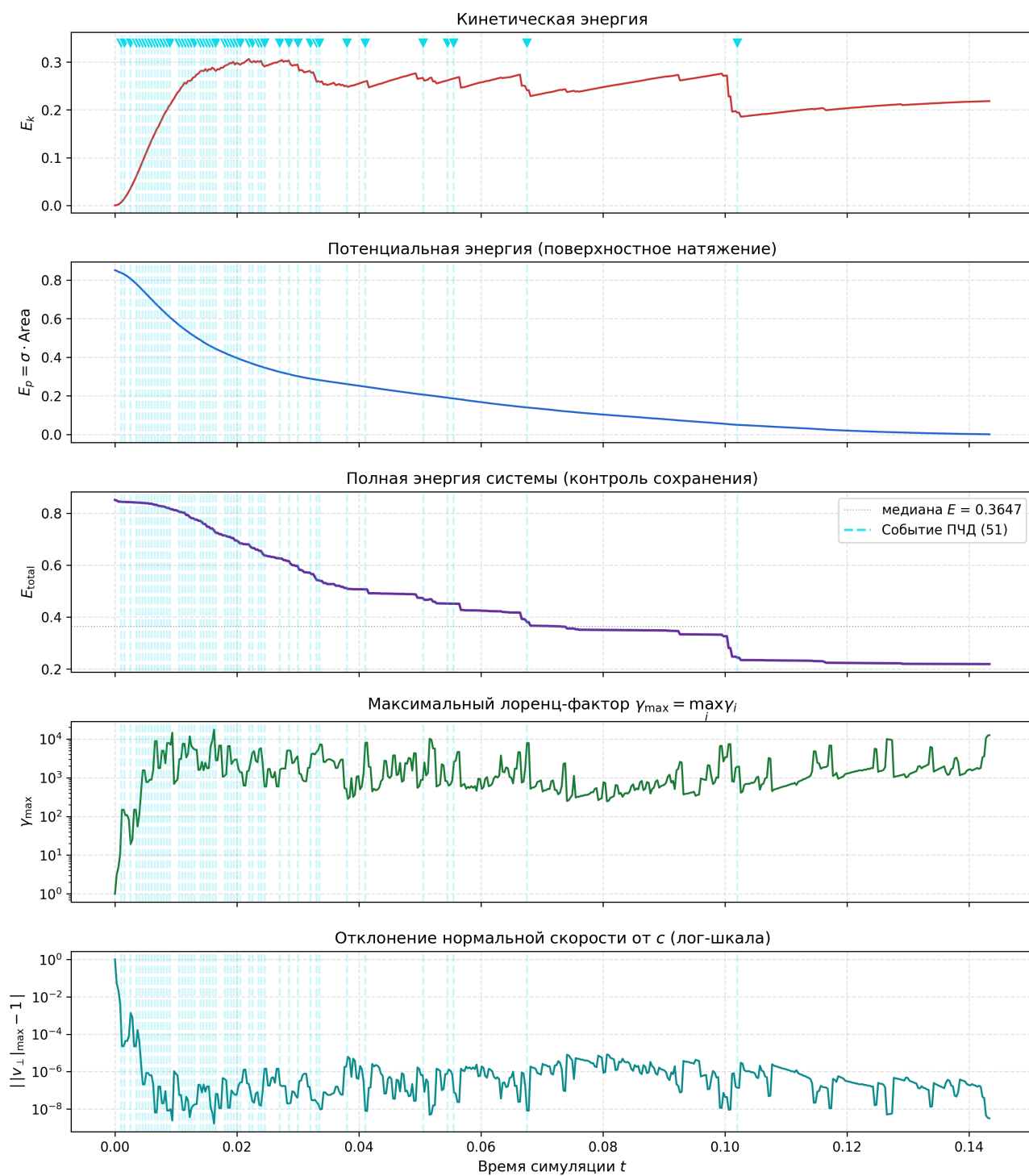


Рис. 5: Энергия, гамма-фактор и отклонение максимальной скорости

Спектр первичных чёрных дыр (N = 115; 2G = 0.05)

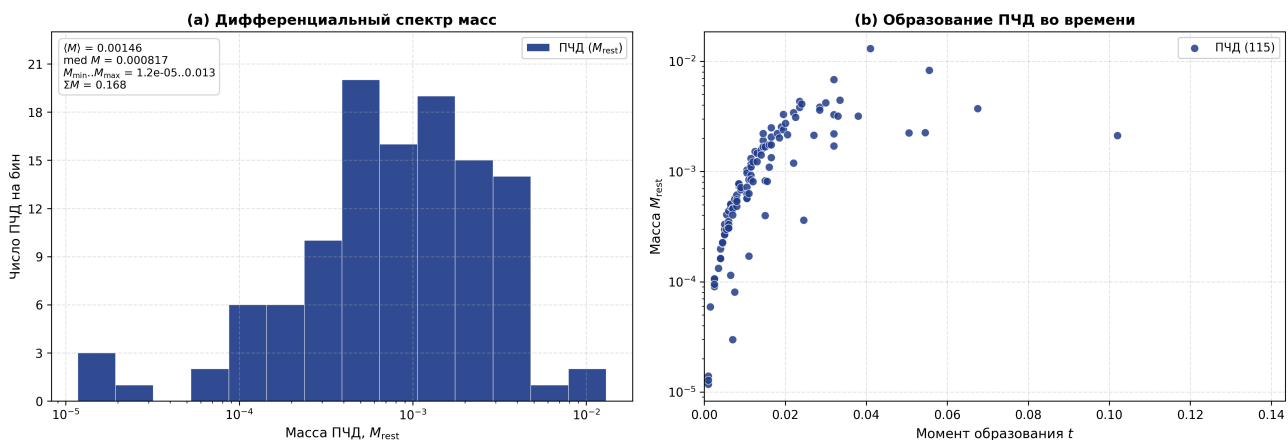


Рис. 6: Спектр ПЧД

Параметры второй симуляции: E-fold = 4, init = 2.4, spectrum =  $k^{-3}$

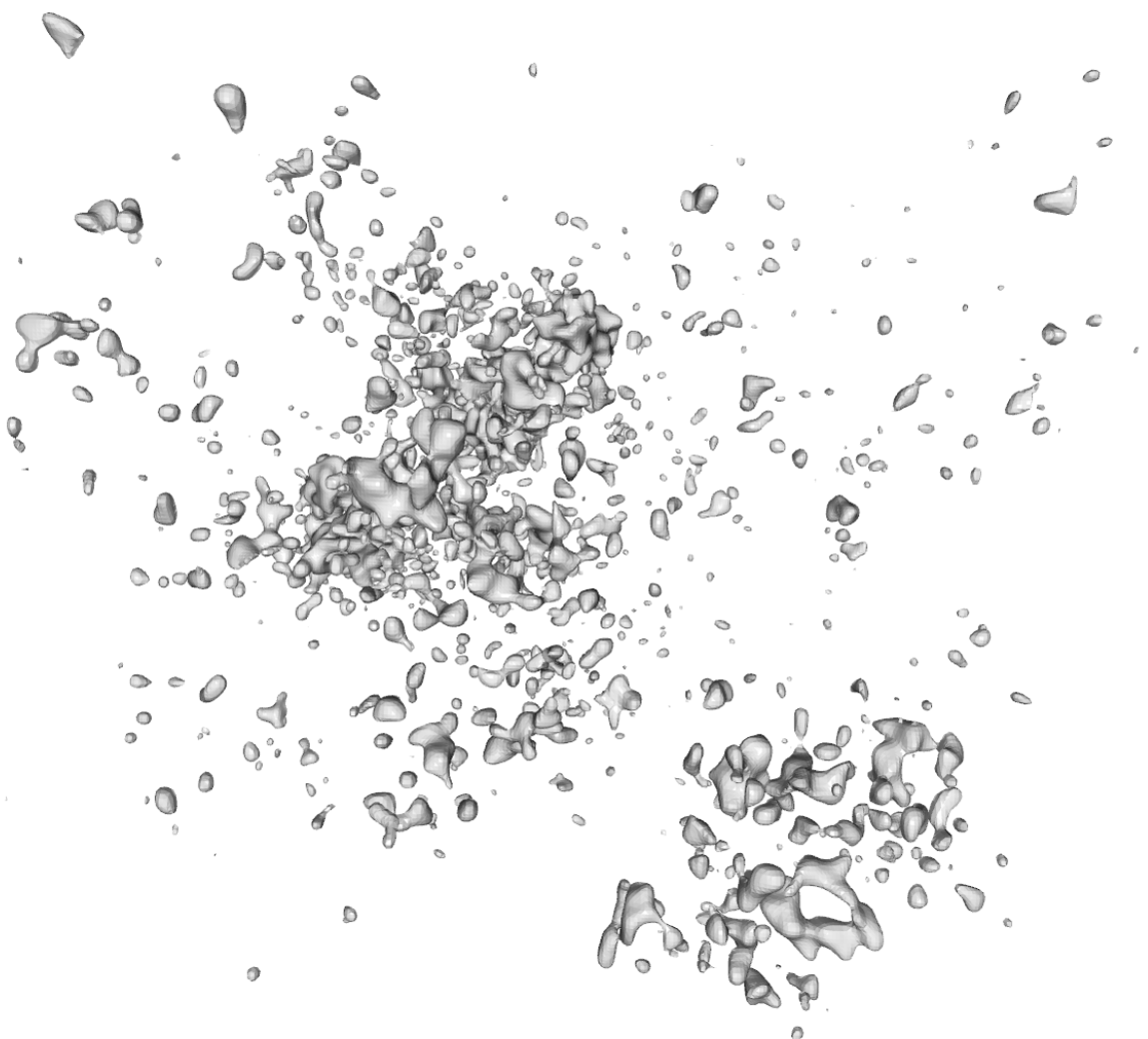


Рис. 7: Пространственное распределение кластеров

## Энергетика и кинематика доменной стенки

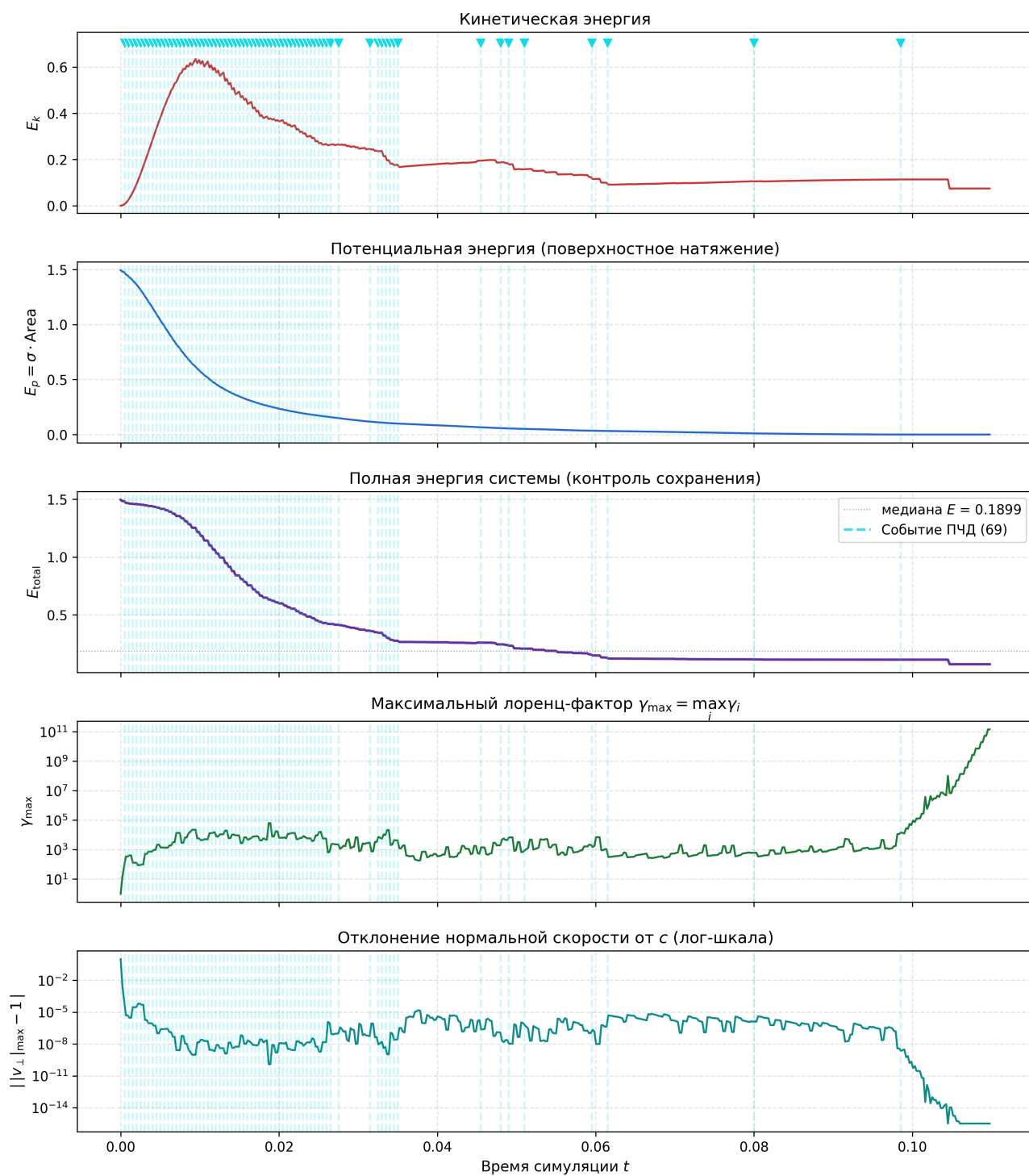


Рис. 8: Энергия, гамма-фактор и отклонение максимальной скорости

### Спектр первичных чёрных дыр (N = 865; 2G = 0.05)

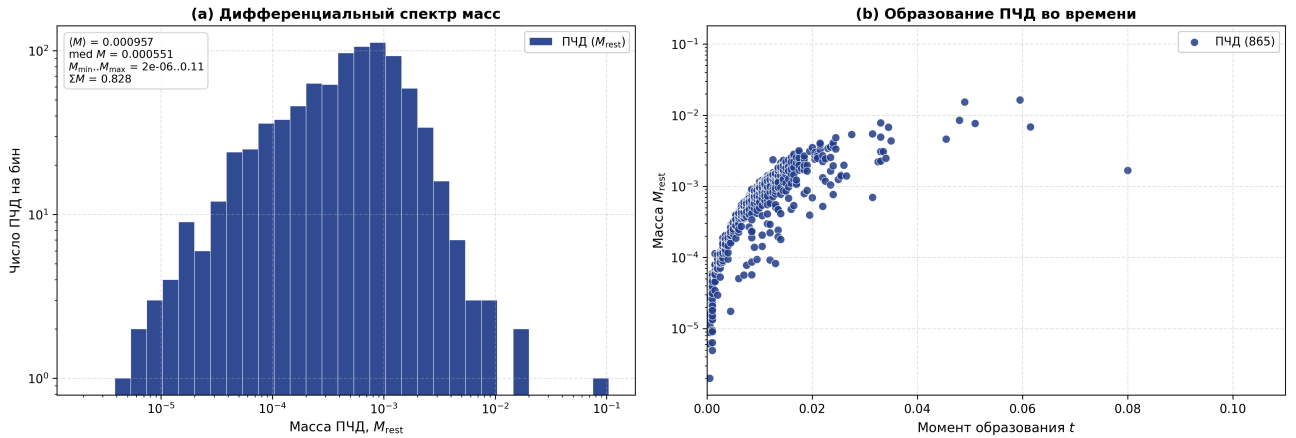


Рис. 9: Спектр ПЧД

## 9 Заключение

В течение данного семестра была решена задача симуляции доменных стенок во внешнем плоском пространстве. Созданная программа заметно выгоднее полевых симуляций по памяти, что позволяет симулировать большие участки Вселенной, а значит и набирать большую статистику об образовании ПЧД из коллапса кластеров доменных стенок.

Решённые задачи:

1. Написана программа, симулирующая эволюцию кластеров релятивистских стенок в модели без диссипации энергии
2. Построены первые простейшие спектры масс ПЧД

В следующем семестре будут решены задачи:

1. Учёт в численной симуляции эффектов трения из общего уравнения 42
2. Оптимизация программного кода для симуляции больших кластеров доменных стенок за меньшее время
3. Повышение устойчивости текущего решения

Итоговый результат исследования — точный спектр масс ПЧД, образованных коллапсом кластеров доменных стенок в ранней Вселенной.

# А Переход от действия Намбу-Гото к действию Полякова, обобщение действия Полякова для р-бран. Действие Хоу-Такера

Действие Намбу-Гото для струны имеет вид:

$$S_{NG}[X(\tau, \sigma)] = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma}, \text{ где } \gamma_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu} \quad (64)$$

Действие Полякова для струны имеет вид:

$$S_P[X(\tau, \sigma)] = -\frac{T}{2} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}, \quad (65)$$

где  $h^{ab}$  - теперь произвольная метрика на поверхности стенки <sup>2</sup>. Покажем, что уравнения, получаемые из вариации действия Полякова, будут эквивалентны уравнениям для Намбу-Гото. Для этого проварируем действие Полякова по  $h^{ab}$ :

$$\begin{aligned} \delta_h S_P &= -\frac{T}{2} \int d\tau d\sigma \delta(\sqrt{-h} h^{ab}) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu} = 0 \\ \delta(\sqrt{-h} h^{ab}) &= \sqrt{-h} \delta h^{ab} + h^{ab} \delta \sqrt{-h} = (\sqrt{-h} - \frac{1}{2} \sqrt{-h} h^{a'b'} h_{ab}) \delta h^{ab} \\ (\sqrt{-h} - \frac{1}{2} \sqrt{-h} h^{a'b'} h_{ab}) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu} &= 0 \implies \\ \frac{1}{2} h_{ab} (h^{a'b'} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}) &= \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu} \equiv \gamma_{ab} \implies \\ \frac{1}{2} h_{a'b'} h^{ab} \gamma_{ab} &= \gamma_{a'b'} \end{aligned} \quad (66)$$

Предположим, что  $h_{ab} = \Lambda(\tau, \sigma) \gamma_{ab}$  (\*). Тогда  $h^{ab} \gamma_{ab} = \Lambda(\tau, \sigma) \gamma^{ab} \gamma_{ab} = 2\Lambda(\tau, \sigma)$ , где коэффициент 2 возникает из размерности матрицы  $\gamma$ . Подставив данное предположение (\*) в уравнение (66), убедимся в его справедливости. Мы получили всё необходимое для доказательства эквивалентности  $S_{NG}$  и  $S_P$ .

$$\begin{aligned} h &= \det(\Lambda(\tau, \sigma) \gamma_{ab}) = \Lambda^2 \gamma \implies \sqrt{-h} = \Lambda \sqrt{-\gamma} \\ S_P &= -\frac{T}{2} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{ab} \gamma_{ab} = -\frac{T}{2} \int d\tau d\sigma \Lambda \sqrt{-\gamma} \Lambda^{-1} \gamma^{ab} \gamma_{ab} = \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Отдельно отметим, что греческие индексы задают глобальные координаты  $(t, \vec{r})$ , а латинские — локальные  $(\tau, \vec{s})$

$$= -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma} = S_{NG} \quad (67)$$

Стоит обратить внимание, что данное доказательство верно только для струн (1-бран). Покажем это, рассмотрев (66):

$$\begin{aligned} h_{ab} h^{cd} \gamma_{cd} = 2\gamma_{ab} &\implies \text{свернём с } h^{ab} \implies h^{ab} h_{ab} h^{cd} \gamma_{cd} = N h^{cd} \gamma_{cd} = 2h^{ab} \gamma_{ab} \\ \text{итога: } \boxed{N = 2} & \end{aligned} \quad (68)$$

Если рассматривать доменную стенку через переход от действия (21) к аналогу действия Полякова для 2-браны, то возникает противоречие при постановке уравнений на  $h_{ab}$ , что требует модификации действия. Можно выбрать действие для р-браны таким образом (действие Хоу-Такера):

$$S_{HT}[X(\tau, \sigma)] = -\frac{T}{2} \int d\xi^{p+1} \sqrt{-h} (h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu} - (p-1)), \quad (69)$$

где  $\xi = (\tau, \sigma^1, \dots, \sigma^p)$ , а  $h$  для удобства последующих вычислений выбирается в виде тензора сигнатуры  $(- + \dots +)$  (mostly minus)<sup>3</sup>.

Явно покажем, что действие Хоу-Такера эквивалентно действию Намбу-Гото:

$$\begin{aligned} \delta_h S_{HT}[X(\tau, \sigma)] &= -\frac{T}{2} \int d\xi^{p+1} \delta(\sqrt{-h} (h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu} - (p-1))) \\ &= (\text{заметим, что } \delta\sqrt{-h} = -\frac{1}{2} h_{cd} \delta h^{cd}) = \\ &= -\frac{T}{2} \int d\xi^{p+1} \left( \gamma_{ab} - \frac{1}{2} h_{ab} (h^{cd} \gamma_{cd} - (p-1)) \right) \delta h^{ab} = 0, \end{aligned} \quad (70)$$

где  $\gamma_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}$ .

Из произвольности вариации  $\delta h^{ab}$  получаем уравнение:

$$\gamma_{ab} - \frac{1}{2} h_{ab} (h^{cd} \gamma_{cd} - (p-1)) = 0. \quad (*)$$

Свёртывая (\*) с  $h^{ab}$ :

$$\begin{aligned} h^{ab} \gamma_{ab} - \frac{1}{2} h^{ab} h_{ab} (h^{cd} \gamma_{cd} - (p-1)) &= 0 \\ \mathcal{A} - \frac{p+1}{2} (\mathcal{A} - (p-1)) &= 0, \end{aligned} \quad (71)$$

---

<sup>3</sup>Данный выбор сигнатуры помогает упростить вычисления, не влияя на результат. Для сигнатуры  $(+ - \dots -)$   $\sqrt{-h}$  переходит в  $\sqrt{(-1)^p h}$ , а корень  $\sqrt{(-1)^p}$ , выйдя общим множителем, сократится.

где  $\mathcal{A} \equiv h^{ab}\gamma_{ab}$ . Отсюда

$$\mathcal{A} \cdot \frac{1-p}{2} - \frac{p^2-1}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{h^{ab}\gamma_{ab} = p+1}. \quad (**)$$

Подставим (\*\*) в (\*):

$$\begin{aligned} \gamma_{ab} - \frac{1}{2}h_{ab}((p+1) - (p-1)) &= 0 \\ \gamma_{ab} - h_{ab} &= 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\gamma_{ab} = h_{ab}}. \end{aligned} \quad (72)$$

Таким образом,

$$\sqrt{-h} = \sqrt{-\gamma}, \quad h^{ab}\gamma_{ab} - (p-1) = 2,$$

и действие Хоу-Такера приводится к стандартной форме Намбу-Гото:

$$S_{HT} = -T \int d\xi^{p+1} \sqrt{-\gamma} = S_{NG} \quad (73)$$

Для доменной стенки  $-p = 2 \Longrightarrow$  действие Хоу-Такера переходит в действие:

$$S_P[X(\tau, \mathbf{s})] = -\frac{\sigma}{2} \int d\tau d^2s (\sqrt{h} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu - \sqrt{h}), \quad (74)$$

где возвращена сигнатура  $h_{ab} = (+ - -)$ ,  $\sigma$  — натяжение стенки.

## Список литературы

- [1] Bernard Carr and Florian Kühnel. Primordial black holes as dark matter: Recent developments. Annual Review of Nuclear and Particle Science, 70(1):355–394, October 2020.
- [2] Konstantin M. Belotsky, Vyacheslav I. Dokuchaev, Yury N. Eroshenko, Ekaterina A. Esipova, Maxim Yu. Khlopov, Leonid A. Khromykh, Alexander A. Kirillov, Valeriy V. Nikulin, Sergey G. Rubin, and Igor V. Svadkovsky. Clusters of primordial black holes. The European Physical Journal C, 79(3), March 2019.
- [3] Emma Curtis-Lake and et al. Spectroscopic confirmation of four metal-poor galaxies at  $z=10.3-13.2$ , 2023.
- [4] Ya. B. Zel'dovich and I. D. Novikov. The Hypothesis of Cores Retarded during Expansion and the Hot Cosmological Model. Sov. Astron., 10:602, 1967.
- [5] Stephen Hawking. Gravitationally collapsed objects of very low mass. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 152:75, 1971.
- [6] Bernard J. Carr and S. W. Hawking. Black holes in the early Universe. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 168:399–415, 1974.
- [7] S. G. Rubin, A. S. Sakharov, and M. Yu. Khlopov. The formation of primary galactic nuclei during phase transitions in the early universe. Journal of Experimental and Theoretical Physics, 92(6):921–929, June 2001.
- [8] Arkady A. Popov, Sergey G. Rubin, and Alexander S. Sakharov. Primordial black holes from spatially varying cosmological constant induced by field fluctuations in extra dimensions. Universe, 10(4):166, March 2024.
- [9] Valery V. Nikulin, Maxim A. Krasnov, and Sergey G. Rubin. Compact extra dimensions as the source of primordial black holes, 2022.
- [10] Juan García-Bellido, Andrei Linde, and David Wands. Density perturbations and black hole formation in hybrid inflation. Physical Review D, 54(10):6040–6058, November 1996.
- [11] A. D. Linde. Elementary particle physics and inflationary cosmology. Nauka, 1990.
- [12] Jean-Guy Caputo, Tomasz Dobrowolski, Jacek Gatlík, and Panayotis G. Kevrekidis. Radial kinks in a schwarzschild-like geometry, 2024.
- [13] A.A. Kirillov, B.S. Murygin, and V.V. Nikulin. Soliton foam formation in the early universe. Physics Letters B, 860:139–201, January 2025.

- [14] A. Vilenkin and E.P.S. Shellard. Cosmic Strings and Other Topological Defects. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1994.
- [15] William Lorensen and Harvey Cline. Marching cubes: A high resolution 3d surface construction algorithm. ACM SIGGRAPH Computer Graphics, 21:163–, 08 1987.
- [16] Ulrich Pinkall and Konrad Polthier. Computing discrete minimal surfaces and their conjugates. Experimental Mathematics, 2, 11 1996.