

Моделирование динамики кластеров доменных стенок в ранней Вселенной

Летягин Иван Дмитриевич

Научный руководитель: к.ф.-м.н, доц., Никулин В.В.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Отчёт о научно-исследовательской работе

Москва, 8 мая 2026 г.

Первичные чёрные дыры (ПЧД) являются многообещающими кандидатами для объяснения происхождения чёрных дыр промежуточных масс, части скрытой массы Вселенной, стохастического фона гравитационных волн, а также могут являться центрами ранних галактик.

Рассматриваемый механизм образования ПЧД — коллапс кластеров массивных негравитирующих доменных стенок.

Раньше рассматривались только сферические доменные стенки, но интерес представляет эволюция произвольных геометрических конфигураций.

Цель: построить спектр ПЧД, полученный прямой симуляцией кластеров несферических доменных стенок

Задачи:

- Вывести уравнение, описывающее эволюцию стенки в тонкостенном приближении на фоне внешней метрики
- Разработать способ численного описания движения поверхности доменной стенки
- Написать симуляцию, описывающую движение стенки
- Провести моделирование кластера доменных стенок

Переход от полевого описания к поверхностному

$$\begin{aligned} S[\phi] &= \int d^4x \sqrt{-\eta} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right) \approx \\ &\approx -\sigma \int d\tau ds^2 \sqrt{|\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu|} = -\sigma \int \sqrt{\gamma} d\tau ds^2 = S_{NG}[X^\mu(\tau, \vec{s})] \end{aligned}$$

Варьируя действие, получаем уравнение движения:

Уравнение движения релятивистской мембраны

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \partial_a \left(\sqrt{h} h^{ab} \partial_b X^\sigma \right) + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu = 0 \quad (1)$$

где h^{ab} — метрика на поверхности доменной стенки.

Уравнение движения

Рассмотрим эволюцию стенок на фоне плоской статической Вселенной. Тогда уравнение движения принимает вид:

Релятивистское волновое уравнение

$$\ddot{\vec{X}} - \frac{1}{\gamma^2} \Delta_s \vec{X} = 0 \quad (2)$$

где Δ_s — оператор Лапласа-Бельтрами на поверхности стенки, $\gamma = \gamma(X)$ — гамма-фактор.

Поверхностная плотность гамильтониана в данном приближении:

Поверхностная плотность гамильтониана

$$\mathcal{H} = \sqrt{\pi^2 + \sigma^2} \quad (3)$$

где $\pi = \sigma v_{\perp} \gamma$ — нормальная составляющая импульса, σ — коэффициент поверхностного натяжения.

Дискретизация уравнения

Для точного описания спектра масс ПЧД требуется численный метод, который максимально точно сохраняет полную энергию системы. Классические схемы (схема Верле или методы Рунге-Кутты) являются несимплектическими для поставленной задачи.

В качестве приближенно симплектического метода был выбран метод leapfrog-интегратора с KDK (kick-drift-kick) реализацией, который сохраняет фазовый объём с высокой точностью по теореме о композициях симплектиков.

КДК-интегратор состоит из трёх шагов — два полушага по импульсу и один шаг по координате, которые описываются уравнениями Гамильтона:

Уравнения Гамильтона

$$\dot{\pi} = -\vec{n} \frac{\partial H}{\partial \vec{x}}, \quad \dot{v}_{\perp} = \frac{\partial H}{\partial \pi} \quad (4)$$

Таким образом совершается классический переход от одного уравнения второго порядка к двум уравнениям первого порядка.

Дискретизация уравнений будет иметь вид:

Дискретизация уравнений

$$\pi_i^{n+1/2} = \pi_i^n + \frac{h}{2} F_i, \quad \text{где } F_i = \frac{\sigma}{\gamma_i} \vec{n}_i L \vec{r}_i \quad (5)$$

$$\vec{r}_i^{n+1} = \vec{r}_i^n + h v_{\perp i} \vec{n}_i, \quad \text{где } v_{\perp i} = \pi_i^{n+1/2} / \sqrt{(\sigma A_i)^2 + (\pi_i^{n+1/2})^2} \quad (6)$$

Для регуляризации сетки используется три метода — флип рёбер, тангенциальная релаксация и коллапс вершин. Последний метод позволяет нарушать топологию сетки (разрыв) и регистрировать коллапс стенок.

В системе на данный момент нет каналов диссипации энергии (нет излучения скалярных квантов и гравитационных волн). Поэтому если между двумя проверками детектора пузырь полностью пропал из сетки (его сжал ремешинг до точки), его энергия не могла никуда исчезнуть и должна была сосредоточиться под гравитационным радиусом. В спектр заносится E^α , измеренная в последнем кадре, где пузырь ещё наблюдался.

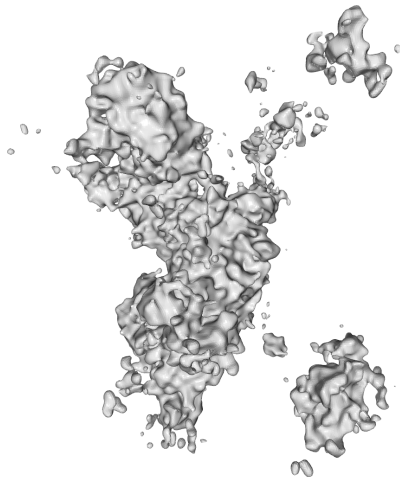


Рис.: Кластер с параметрами $e\text{-fold} = 4$, $\phi_{in} = 2.4$, $P(k) \propto k^{-4}$

Энергетика и кинематика доменной стенки

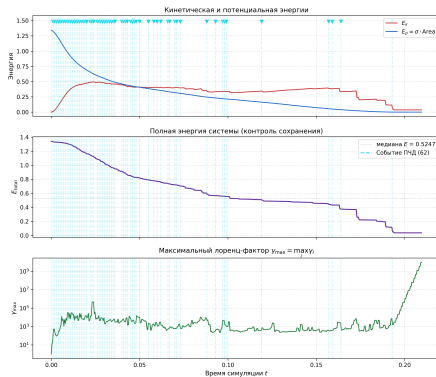


Рис.: Энергия, гамма-фактор, отклонение максимальной скорости

Спектр первичных чёрных дыр (N = 179)

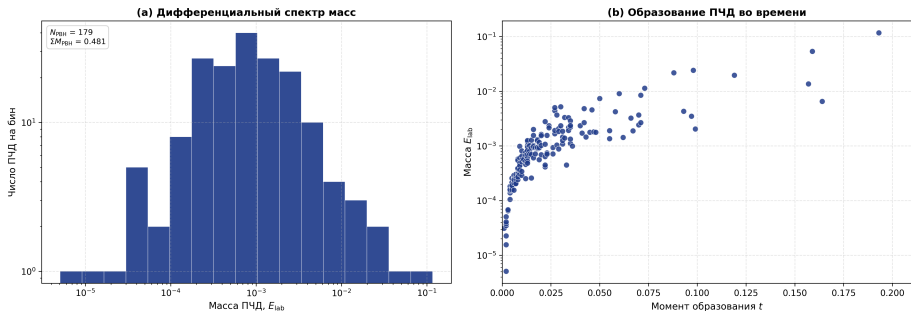


Рис.: Спектр ПЧД для параметров E-fold = 4, init = 2.4, spectrum = k^{-4}

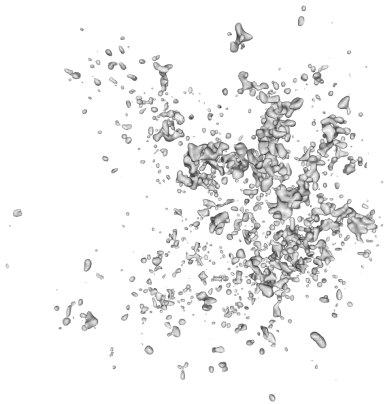


Рис.: Кластер с параметрами
e-fold = 4, $\phi_{in} = 2.4$, $P(k) \propto k^{-3}$

Энергетика и кинематика доменной стенки

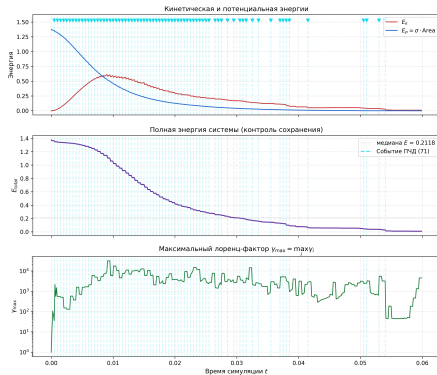


Рис.: Энергия, гамма-фактор,
отклонение максимальной скорости

Спектр первичных чёрных дыр (N = 929)

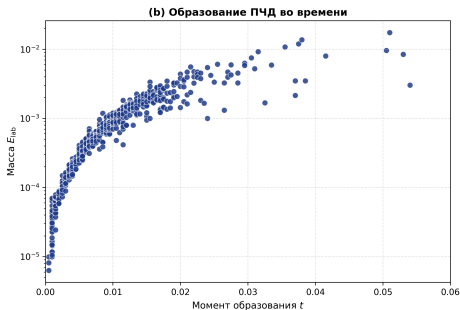
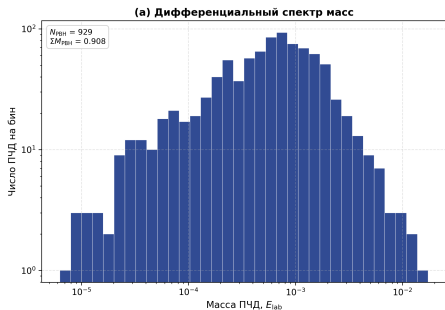


Рис.: Спектр ПЧД для параметров $e\text{-fold} = 4$, $\phi_{in} = 2.4$, $P(k) \propto k^{-3}$, наклон спектра в правой части $\approx -1,7 \pm 0,3$

Решённые задачи:

- 1 Написана программа, симулирующая эволюцию кластеров релятивистских стенок в модели без диссипации энергии в тонкостенном приближении
- 2 Сгенерированы кластеры стенок и для них построены спектры ПЧД

В дальнейшем будут решены задачи:

- 1 Учёт в численной симуляции эффектов диссипации, связанных с хаббловским потоком, излучением частиц и гравволн
- 2 Оптимизация программного кода для симуляции больших кластеров доменных стенок
- 3 Повышение стабильности и сходимости симуляции
- 4 Построение численного спектра масс ПЧД и сравнение с аналитическим спектром в кластере

Дано: (\vec{r}_i^n, π_i^n) , шаг h , натяжение σ

- **Геометрия в начале:** $L\vec{r}, A, \vec{n} \leftarrow \text{compute_geometry}(\vec{r}_i^n)$
- $\gamma_i = \sqrt{1 + (\pi_i^n / (\sigma A_i))^2}$, $F_i = \frac{\sigma}{\gamma_i} \vec{n}_i L\vec{r}_i$
- $\pi_i^{n+1/2} = \pi_i^n + \frac{h}{2} F_i$ (первый полу-кик)
- $v_{\perp i} = \pi_i^{n+1/2} / \sqrt{(\sigma A_i)^2 + (\pi_i^{n+1/2})^2}$ (точная связь)
- $\vec{r}_i^{n+1} = \vec{r}_i^n + h v_{\perp i} \vec{n}_i$ (дрейф)
- **Геометрия в конце:** $L\vec{r}', A', \vec{n}' \leftarrow \text{compute_geometry}(\vec{r}_i^{n+1})$
- $\gamma'_i = \sqrt{1 + (\pi_i^{n+1/2} / (\sigma A'_i))^2}$, $F'_i = \frac{\sigma}{\gamma'_i} \vec{n}'_i L\vec{r}'_i$
- $\pi_i^{n+1} = \pi_i^{n+1/2} + \frac{h}{2} F'_i$ (второй полу-кик)