

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»»

УДК 539.165.2

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
НОВЫЙ МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ СОЛИТОННЫХ
РЕШЕНИЙ В МНОГОПОЛЕВЫХ МОДЕЛЯХ.

Научный руководитель

д. ф.-м. н.

_____ В. А. Гани

Студент

_____ И. Н. Самощенко

Москва 2025

Содержание

I. Введение	3
II. Геометрия орбит	7
А. Геометрические свойства уравнений BPS	8
В. Двухполевой случай	8
С. Комплексный формализм в двухполевом случае	11
III. Гармонические морфизмы	14
IV. Получение дискретного набора вакуумов	20
V. Аппендикс А	24
Список литературы	25

I. ВВЕДЕНИЕ

В конце 1960-х годов в квантовой теории поля появился новый подход, позволяющий из классических нелинейных уравнений поля получать решения, которые могут интерпретироваться как частицы соответствующей квантованной теории. Свойства этих частиц во многом определяются свойствами классических решений, среди которых простейшим является кинк. Кинк — это полевая конфигурация в пространстве-времени размерности $(1 + 1)$, интерполирующая между парой нулей потенциала, определяющего взаимодействие и самодействие полей. Он имеет стационарную, отличную от нуля и конечную энергию, поэтому является устойчивым и не может быть непрерывно деформирован в тривиальное решение.

В общем случае, возникающие в теории нелинейные уравнения являются уравнениями в частных производных второго порядка двух переменных, что значительно усложняет их решение. Даже в статическом случае, наличие двух и более полей делает задачу в общем виде неразрешимой. Поэтому, важным открытием в теории кинков стали уравнения Богомольного-Прасада-Зоммерфельда (BPS), позволившие понизить порядок исходных уравнений при некоторых ограничениях на потенциал и энергию решения. Метод состоит в выражении исходного потенциала через градиент некоторой новой функцией, называемой суперпотенциалом. К сожалению, для одного потенциала могут существовать различные суперпотенциалы, что приводит к различным уравнениям BPS. Данное обстоятельство делает методы нахождения новых суперпотенциалов отдельной задачей, заслуживающей внимания.

Уравнения BPS оказываются удобны еще и тем, что орбиты им соответствующие обретают наглядный геометрический смысл, что также во многом упрощает решение и сводит задачу к алгебраической.

Кинковые решения могут быть легко вложены в пространство большей размерности $(1 + d)$, поэтому они могут быть применены в теориях с большим числом пространственных измерений.

Полезным для изучения космической инфляции является построение космологических моделей со скалярными полями. Теория космологической эволюции, основанная на скалярных полях, исследовалась в нескольких областях, охватывающих классический и квантовый уровни расширяющейся Вселенной.

Модели с одним скалярным полем применяются в квантовой теории поля (модель ϕ^4) и

для описания поведения кристаллических решеток (модель Синус-Гордона). Также, модели с $O(m)$ симметрией могут быть использованы для нахождения кинковых решений в моделях с большим числом полей.

В двухполевых теориях с $U(1)$ симметрией одним из самых известных примеров является модель “мексиканской шляпы”, необходимой для описания механизма Хиггса. Двухполевые модели используются также в космологии для описания взаимодействия D-бран.

Модели с множеством вещественных скалярных полей также имеют множество приложений. Примером такой модели является модель Тоды, обладающая сложной классификацией и служащая обобщением некоторых известных моделей таких как Синус- и Шинус- Гордон. Данная модель интересна тем, что является интегрируемой и описывает солитонные решения.

Недискретные вакуумные многообразия также исследуются в литературе. Однако зачастую берется достаточно простая компактная группа симметрий вакуумного многообразия. Например, вакуумы поля Хиггса имеют $U(1)$ -симметрию [1], также недискретные вакуумные многообразия рассматривались в работах [2, 3], где используются группы ортогональных и унитарных матриц соответственно. В первом случае группа приводит к вакуумному многообразию в виде сфер, а во втором — к его унитарному аналогу.[\[подробности сделанного в этих работах\]](#)

Также исследования в области супергравитации приводят к появлению некомпактных групп симметрий (см. [4]) потенциалов, что влечет за собой наличие некомпактных вакуумных многообразий. Поиск классических солитонных решений в подобных моделях является важной задачей, способствующей развитию не только классических, но и соответствующих им квантовых теорий.

Полевая модель определяется следующим образом. Пусть $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^m)$ — поля, определенные в пространстве размерности $(1 + 1)$ (одном пространственном, которое мы обозначим как $x \in \mathbb{R}$ и одним временным, $t \in [t_1, t_2]$), m — натуральное число. Пусть также $V = V(\phi)$ — неотрицательная функция, называемая *потенциалом*. Множество $\mathcal{V}$ нулей потенциала называется *вакуумным многообразием* модели. Никаких ограничений (за исключением физической целесообразности) на вакуумные многообразия не накладывается. Тем не менее, зачастую, солитонные решения ищут в моделях или с дискретными вакуумными многообразиями ([8–10]), или многообразиями с некоторой несложной матричной группой (см. [1–3]). Рассмотрению моделей с некомпактными вакуумными многообразиями уделе-

но значительно меньше внимания, что связано со сложностью их изучения. Некомпактные вакуумные многообразия естественным образом возникают в суперсимметричных моделях, важные примеры “конкретных” потенциалов приведены в работах [11–14], где обсуждались суперсимметричные модели с некомпактными вакуумными многообразиями в виде гиперболлических поверхностей и найдены солитонные решения.

Динамика полей определяется функционалом действия

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L} \left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dx dt \quad (1)$$

с лагранжианом

$$\mathcal{L} \left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \left[\left(\frac{\partial \phi^s}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi^s}{\partial x} \right)^2 \right] - V(\phi). \quad (2)$$

Уравнения движения (уравнения Эйлера-Лагранжа):

$$\frac{\partial^2 \phi^s}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi^s}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial \phi^s}(\phi) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

Нас будут интересовать статические (т.е. не зависящие от времени) кинковые решения $\phi_K(x)$, которые удовлетворяют системе

$$\frac{d^2 \phi^s}{dx^2} = \frac{\partial V}{\partial \phi^s}(\phi), \quad (4)$$

и, кроме того, должны удовлетворяться граничные условия

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi_K(x) = v_{\pm}, \quad (5)$$

где $v_- \neq v_+$, $v_{\pm} \in \mathcal{V}$. К кинковому решению также предъявляется условие конечности энергии, определяемой в статическом случае как функционал

$$E[\phi(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \left(\frac{d\phi^s}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right] dx. \quad (6)$$

Энергию статического кинка часто называют массой кинка: $M_K = E[\phi_K(x)]$. Заметим, что замена $x \rightarrow -x$ в кинковом решении дает снова кинковое решение. Далее в этой статье мы будем иметь дело только со статическими решениями, которые для краткости будем называть просто решениями.

Любое решение уравнений движения можно рассматривать как кривую (в случае вакуумного решения кривая вырождается в точку) в пространстве полей, задаваемую параметром x .

Эту кривую мы будем называть *орбитой* решения. Любая пара различных вакуумов определяет гомотопический класс эквивалентности кривых с фиксированными концами, который мы будем называть *топологическим сектором*. Орбита всякого кинкового решения принадлежит своему топологическому сектору.

Заметим, что порядок уравнений движения (4) можно понизить, выразив потенциал через новую функцию $W(\phi)$, называемую *суперпотенциалом*:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial W}{\partial \phi^s} \right)^2 (\phi) \quad (7)$$

После такой подстановки выделим в функционале энергии (6) полный квадрат и получим:

$$E = |W(\phi(+\infty)) - W(\phi(-\infty))| + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{s=1}^m \left(\frac{d\phi^s}{dx} - \frac{\partial W}{\partial \phi^s}(\phi) \right)^2 dx. \quad (8)$$

Первое слагаемое не влияет на экстремальность функционала энергии, оно зависит лишь от выбора топологического сектора. Таким образом, энергия экстремальна тогда, когда

$$\frac{d\phi^s}{dx} = \frac{\partial W}{\partial \phi^s}(\phi). \quad (9)$$

Эти уравнения называют уравнениями Богомольного–Прасада–Зоммерфельда или BPS (см., например, [6, 7]), в дальнейшем мы сосредоточимся на их решении. Уравнения BPS можно переписать в эквивалентной форме, исключив пространственную переменную x :

$$\frac{d\phi^1}{W_1(\phi)} = \dots = \frac{d\phi^m}{W_m(\phi)}, \quad (10)$$

где для удобства использовано обозначение $W_s(\phi) \equiv \frac{\partial W}{\partial \phi^s}(\phi)$.

Заметим, что суперпотенциал определен неоднозначно. Действительно, равенство (7) можно рассматривать как дифференциальное уравнение в частных производных на функцию $W(\phi)$ для заданного потенциала $V(\phi)$. Задача нахождения суперпотенциала по заданному потенциалу достаточно сложна, поэтому обычно мы будем начинать наши рассуждения, считая, что некоторый суперпотенциал (или несколько суперпотенциалов) уже известен, и определяет потенциал, для которого ищем кинковые решения¹.

¹ Стоит отметить, что в случае полиномиального потенциала степени p , суперпотенциал можно искать в виде полинома степени $\frac{p-2}{2}$. В этом случае задача сводится к чисто алгебраической, хотя может оказаться вычислительно громоздкой.

II. ГЕОМЕТРИЯ ОРБИТ

Несмотря на то, что уравнения BPS есть обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, в случае двух и более полей задача в общем виде неразрешима. Но, как мы помним, кинковое решение задает кривую в пространстве полей — орбиту, при этом координата x играет роль параметра. Уравнения BPS вместе с соответствующими граничными условиями, как и уравнения движения, определяют не только орбиту (ее геометрические свойства), но и фиксируют ее конкретную параметризацию.

Если нам каким-либо образом удалось найти орбиту, то после этого не представляет труда найти и само решение, т.е. построить параметризацию орбиты. На этом основан хорошо известный метод пробных орбит, см., например, [5, 8]. Действительно, зная кривую в m -мерном пространстве полей, заданную $m-1$ равенствами $F^1(\phi) = 0, \dots, F^{m-1}(\phi) = 0$, можно исключить $m-1$ поле из какого-либо из уравнений движения и получить обыкновенное дифференциальное уравнение для нахождения зависимости одного из полей от координаты x . Далее можно восстановить зависимости остальных полей от координаты.

Заметим, что первые интегралы характеристической системы (10), которые могут быть взяты в качестве упомянутых выше функций $F^1(\phi), \dots, F^{m-1}(\phi)$, задают орбиту некоторого решения.

Пусть $F(\phi) = 0$ уравнение гладкой поверхности $\mathcal{N}$ размерности $m-1$ в пространстве $\mathbb{R}^m$, причем орбита $\mathcal{M}$ некоторого кинкового решения $\phi_K(x)$ уравнений (9) принадлежит этой поверхности, $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Тогда, очевидно,

$$F(\phi_K(x)) = 0, \quad (11)$$

откуда дифференцированием по x получим:

$$\sum_{s=1}^m \frac{\partial F}{\partial \phi^s} \Big|_{\phi_K(x)} \frac{d\phi_K^s}{dx} = 0. \quad (12)$$

С учетом уравнений BPS (9) окончательно имеем:

$$(\nabla F \nabla W)|_{\phi_K(x)} = 0. \quad (13)$$

Геометрически это равенство означает, что в каждой точке орбиты градиент функции $F(\phi)$, задающей поверхность $\mathcal{N}$, ортогонален градиенту суперпотенциала $W(\phi)$. В статье [8] приведены подобные рассуждения для двухполевых моделей.

А. Геометрические свойства уравнений BPS

К сожалению, изложенный выше геометрический факт (ортогональность ∇F и ∇W на некоторой кривой) позволяет лишь предположить наличие решений. Проверка того, действительно ли полученная кривая является орбитой, осуществляется ее подстановкой в уравнения движения. В этой работе мы обобщаем данный метод, исключая необходимость проверки, если соблюдены некоторые условия, а именно:

Пусть дан m -полевой суперпотенциал $W(\phi)$, и пусть также известны функционально независимые функции $F^s(\phi): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $s = \overline{2, m^2}$ такие, что:

- (i) уравнение $F^s = 0$ определяет поверхность $\mathcal{N}_s$ размерности $m - 1$;
- (ii) пересечение всех поверхностей $\mathcal{N}_s$ есть некоторая кривая $\mathcal{M}$;
- (iii) $(\nabla W \nabla F^s)|_{\mathcal{M}} = 0$;
- (iv) частные производные суперпотенциала и функций F^s не равны нулю (за исключением быть может конечного числа точек) на кривой $\mathcal{M}$.

Тогда существует решение $\phi = \phi(x)$ уравнений BPS

$$\frac{d\phi}{dx} = \nabla W, \quad (14)$$

причем его орбита есть кривая $\mathcal{M}$. Доказательство смотри в Приложении А.

Сформулированное утверждение удобно тем, что позволяет проверить, является ли данная кривая орбитой некоторого решения уравнений BPS без необходимости решать сами уравнения. В то же время вопрос о том, как найти функции F^s , остается открытым.

В. Двухполевой случай

Посмотрим, как это работает в двухполевом случае. В случае двух полей удобно использовать обозначения $\phi^1 \equiv \phi$, $\phi^2 \equiv \chi$. Пусть $W(\phi, \chi)$ — суперпотенциал, определяющий потенциал $V(\phi, \chi)$. Из уравнений BPS получим

$$\frac{\partial W}{\partial \chi} d\phi - \frac{\partial W}{\partial \phi} d\chi = 0. \quad (15)$$

² Значения индекса s начинаются с двух, т.к. в дальнейшем удобно будет рассмотреть вектор-функцию, первой компонентой которой будет суперпотенциал, а последующие $m - 1$ — функции, задающие орбиты.

Это уравнение легко интегрируется, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции полей ϕ и χ . Это, в свою очередь, означает, что W — гармоническая функция. Пусть W — гармоническая, тогда можно ввести комплексный суперпотенциал $\mathcal{W}(\phi + i\chi) = W(\phi, \chi) + iM(\phi, \chi)$, где M — также гармоническая функция, сопряженная к W . В силу условий Коши–Римана (означающих ортогональность ∇W и ∇M) равенство $M(\phi, \chi) = \text{const}$ определяет уравнения орбит. Константа в этом равенстве находится из условия (5). Заметим, что ∇W и ∇M ортогональны не только на орбите, но всюду, и

$$\nabla W^2 = \nabla M^2 = 2V. \quad (16)$$

Неоднозначность выбора W для данного потенциала приводит к различным уравнениям BPS. Введем двухкомпонентную функцию

$$w = \begin{pmatrix} W \\ M \end{pmatrix}, \quad (17)$$

которую будем называть конформным суперпотенциалом³. Пусть также $O \in O(2)$ — ортогональная матрица и

$$Ow = \tilde{w} = \begin{pmatrix} \tilde{W} \\ \tilde{M} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Компоненты функции $\tilde{w}$ обладают теми же свойствами, что и компоненты w , т.е. их градиенты ортогональны, а модули градиентов равны, что позволяет получить новые уравнения BPS и новое уравнение орбиты:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \phi}, \quad (19)$$

$$\frac{d\chi}{dx} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \chi}, \quad (20)$$

$$\tilde{M}(\phi, \chi) = C. \quad (21)$$

Зачастую в приложениях известен не суперпотенциал, а потенциал V , для которого необходимо найти суперпотенциал. В случае гармонического суперпотенциала W , функция

$$\ln(2V) = \ln \left| \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \chi} \right)^2 \right| = \ln \left| \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial \phi} \right)^2 \right| \quad (22)$$

³ Заметим, что правильнее было бы называть функцию w *слабо конформным суперпотенциалом*, т.к. модуль градиента может обращаться в нуль (о понятии слабой конформности см. ниже).

есть вещественная часть комплексного логарифма, откуда получаем критерий существования гармонического суперпотенциала для данного потенциала:

$$\Delta \ln V = 0. \quad (23)$$

Рассмотрим конкретный пример двухполевой модели с потенциалом

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} [(\phi^2 - \chi^2 - 1)^2 + 4(\phi\chi)^2], \quad (24)$$

см. рис. 1 Вакуумы модели, т.е. нули потенциала (24) — это точки $v_{\pm} = (\pm 1, 0)$. Для этого

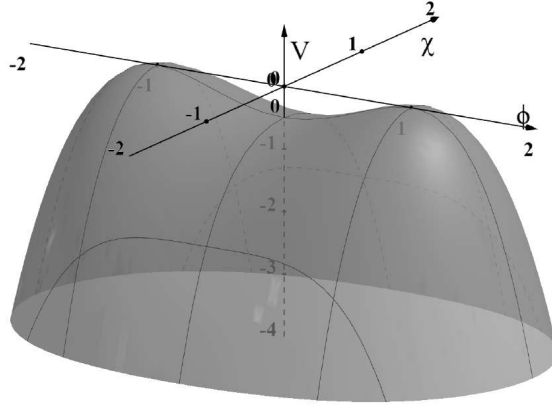


Рис. 1: График потенциала (24) (по вертикальной оси отложена величина $-V(\phi, \chi)$).

потенциала выполняется условие (23), т.е. для него существует гармонический суперпотенциал. Предположим, что суперпотенциал есть многочлен. Потенциал имеет степень четыре и представляет собой квадрат модуля градиента суперпотенциала, а также имеет пару известных нулей $v_{\pm}$. Следовательно, суперпотенциал должен иметь степень 3. Методами комплексного анализа несложно получить функции W и M — компоненты конформного суперпотенциала

$$w = \begin{pmatrix} W \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\phi^3 - \phi\chi^2 - \phi \\ -\frac{1}{3}\chi^3 + \chi\phi^2 - \chi \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Фиксировав W в качестве суперпотенциала, из уравнения $M = 0$ нетрудно найти орбиту кинкового решения, которой в данном случае является отрезок $-1 < \phi < 1$, $\chi = 0$, а само кинковое решение имеет вид

$$\phi_K(x) = \tanh x, \quad \chi_K(x) \equiv 0. \quad (26)$$

Заметим, что уравнение $M = 0$, помимо $\chi = 0$, дает еще $\phi^2 - \frac{1}{3}\chi^2 - 1 = 0$. Последнее есть уравнение пары гипербол, не соединяющих вакуумы $(\pm 1, 0)$, поэтому эти кривые не являются орбитами кинковых решений.

С. Комплексный формализм в двухполе-вом случае

Если суперпотенциал $W(\phi, \chi)$ двухполе-вой модели есть гармоническая функция, то, как уже упоминалось выше, можно ввести комплексный суперпотенциал

$$\mathcal{W}(z) = W(\phi, \chi) + iM(\phi, \chi), \quad (27)$$

где $z = \phi + i\chi$. Потенциал тогда можно записать в виде

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z} \right|^2. \quad (28)$$

Заметим, что комплексный суперпотенциал (27) определен с точностью до аддитивной константы и множителя $e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, что сразу дает параметрическое множество суперпотенциалов и орбит.

В качестве конкретного примера рассмотрим семейство моделей, близких к тем, что рассмотрены в работе [9], с комплексным суперпотенциалом

$$\mathcal{W}(z) = \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{k+2}z^{k+2}, \quad (29)$$

где $k = 0, 1, \dots$. Соответствующий потенциал

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}(\phi^2 + \chi^2) \prod_{s=1}^k \left(\left(\phi - \cos \frac{2\pi s}{k} \right)^2 + \left(\chi - \sin \frac{2\pi s}{k} \right)^2 \right) \quad (30)$$

имеет k нулей в точках $\sqrt[k]{1}$ (если отождествить пространство полей с комплексной плоскостью) и еще один нуль в начале координат. Каждая из этих моделей имеет орбиты в виде отрезков прямых с концами в нуле и одном из корней из единицы. В дальнейшем нам понадобятся случай $k = 4$, на котором мы остановимся подробнее.

При $k = 4$ метод комплексного суперпотенциала не дает никаких нетривиальных решений, т.е. единственные орбиты — это отрезки $[0, \pm 1]$, $[\pm 1, 0]$, т.е., кинковые решения будут иметь вид:

$$\phi_{K;0,\pm 1} = (\pm \phi_K, 0), \quad (31)$$

$$\phi_{K;\pm 1,0} = (0, \pm \phi_K), \quad (32)$$

где ϕ_K — функция, полученная интегрированием уравнений BPS:

$$\phi_K(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh 4x \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (33)$$

При $k = 4$ получаем следующий набор орбит:

$$\begin{aligned} -1 \leq \phi \leq 0, \quad \chi &\equiv 0, \\ 0 \leq \phi \leq 1, \quad \chi &\equiv 0, \\ \phi &\equiv 0, \quad -1 \leq \chi \leq 0, \\ \phi &\equiv 0, \quad 0 \leq \chi \leq 1. \end{aligned}$$

Соответствующие кинковые решения имеют вид:

$$\begin{aligned} \phi_K(x) &= -f_K(-x), \quad \chi_K(x) \equiv 0, \\ \phi_K(x) &= f_K(x), \quad \chi_K(x) \equiv 0, \\ \phi_K(x) &\equiv 0, \quad \chi_K(x) = -f_K(-x), \\ \phi_K(x) &\equiv 0, \quad \chi_K(x) = f_K(x), \end{aligned}$$

где

$$f_K(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh 4x \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (34)$$

Этот пример наглядно демонстрирует то, что задача упрощается, если вместо одного суперпотенциала известен конформный суперпотенциал, который в двухполевом случае был двухкомпонентным, в m -полевом же он представляет из себя n -компонентную функцию

$$w = \begin{pmatrix} W^1 \\ \vdots \\ W^n \end{pmatrix}, \quad n \leq m, \quad (35)$$

компоненты которой обладают свойством

$$\nabla W^k \cdot \nabla W^s = 2V \delta^{ks}, \quad (36)$$

где δ^{ks} — символ Кронекера. Отображения со свойством (36) называются *слабо конформными* отображениями [16], а функция $\lambda = |\nabla W^s|$ — *коэффициентом растяжения*. Первую компоненту W^1 в дальнейшем всегда будем выбирать в качестве суперпотенциала, тогда

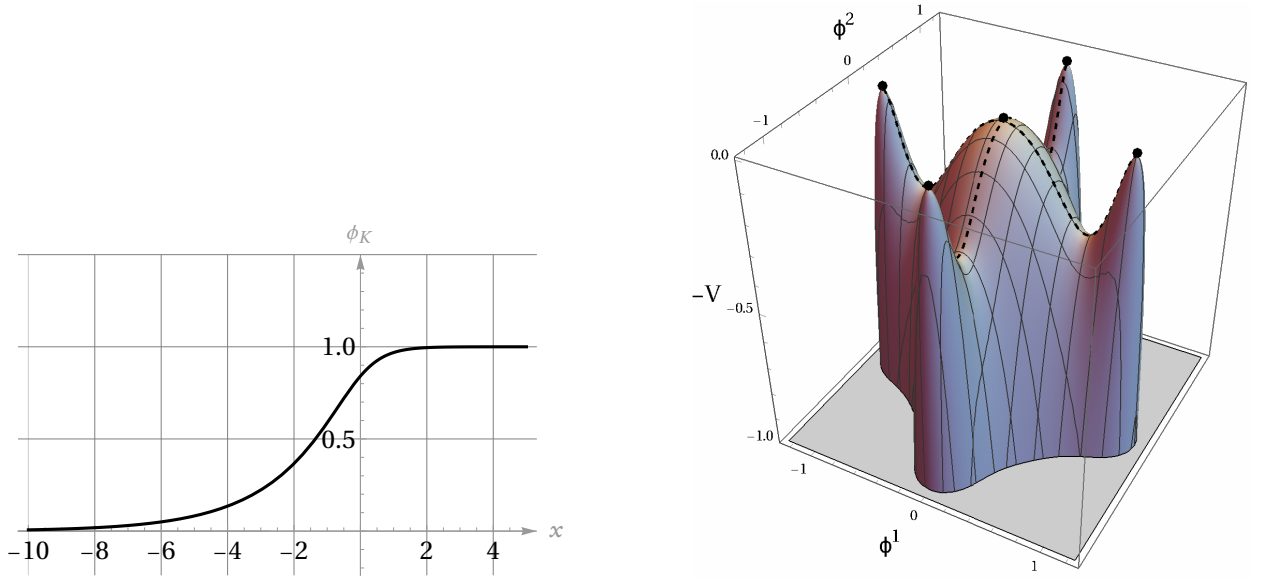


Рис. 2: График функции (34) (слева). График перевернутого потенциала (30) (справа); черными точками обозначены вакуумы модели, штриховыми линиями на поверхности потенциала показаны орбиты

уравнения $W^s = C^s$, $s = \overline{2, n}$, где C^s — константы, определяют поверхности $\mathcal{N}_s$ размерности $m - 1$ каждая, пересечению которых может принадлежать орбита решения. Аналогично двухполевому случаю действием ортогональных матриц $O \in O(n)$ можно получать новые конформные суперпотенциалы для того же потенциала V :

$$Ow = \tilde{w} = \begin{pmatrix} \widetilde{W}^1 \\ \vdots \\ \widetilde{W}^n \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Это дает параметрическое множество уравнений BPS и поверхностей, которым их решения могут принадлежать. Возможность получать новые уравнения BPS важна, т.к. один их набор может не дать всех кинковых решений. Убедиться в этом поможет следующий пример.

Пример. Снова выберем функцию w из примера выше, однако подействуем на него матрицей поворота на $-\pi/2$. Уравнения BPS тогда примут вид

$$\frac{d\phi}{dx} = 2\phi\chi, \quad (38)$$

$$\frac{d\chi}{dx} = -\chi^2 + \phi^2 - 1. \quad (39)$$

Очевидно, что (26) не является решением этой системы, т.е. при таком выборе конформного суперпотенциала получить кинковое решение (26) не удастся.

III. ГАРМОНИЧЕСКИЕ МОРФИЗМЫ

В этом разделе мы продемонстрируем, как концепция конформного суперпотенциала реализуется в случае многих (более, чем двух) полей, помогая находить кинковые решения.

Основная информация для этого раздела взята из магистерской диссертации Martin Svensson “Polynomial Harmonic Morphisms” [17] и книги Paul Baird и John C. Wood “Harmonic Morphisms Between Riemannian Manifolds” [16]. Изложение в обоих трудах имеет достаточно абстрактный характер, отображения рассматриваются между римановыми многообразиями. Мы же ограничимся случаем конечномерных вещественных пространств с евклидовой метрикой, в соответствии с чем и построим дальнейшее изложение.

Слабо конформные отображения естественным образом возникают при рассмотрении следующей задачи: какие условия необходимо наложить на компоненты вектор-функции m полей $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^n)$, $\psi^s = \psi^s(\phi^1, \dots, \phi^m)$, $m \geq n$, чтобы для любой гармонической функции $f(\psi)$ от n переменных их композиция $f(\psi(\phi))$ вновь была гармонической? Очевидно,

$$0 = \Delta_\phi f(\psi) \quad (40)$$

$$= \sum_s \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial \psi^s}(\psi) \cdot \nabla \psi^s \right) \quad (41)$$

$$= \sum_{s,k} \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^s \partial \psi^k}(\psi) \cdot \nabla \psi^s \nabla \psi^k + \frac{\partial f}{\partial \psi^s}(\psi) \cdot \Delta \psi^s \quad (42)$$

$$= \sum_{s \neq k} \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^s \partial \psi^k}(\psi) \cdot \nabla \psi^s \nabla \psi^k + \sum_s \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^{s2}}(\psi) \cdot (\nabla \psi^s)^2 + \frac{\partial f}{\partial \psi^s}(\psi) \cdot \Delta \psi^s. \quad (43)$$

Выберем функцию $f(\psi) = \psi^s$, тогда

$$\Delta \psi^s = 0. \quad (44)$$

Если же $f(\psi) = \psi^s \psi^k$, $s \neq k$, то

$$\nabla \psi^s \nabla \psi^k = 0. \quad (45)$$

И, наконец, $f(\psi) = (\psi^s)^2 - (\psi^k)^2$, $s \neq k$ для любых s, k даст

$$(\nabla \psi^s)^2 = (\nabla \psi^k)^2. \quad (46)$$

Отсюда получаем, что функция $f(\psi(\phi))$ гармоническая, если

$$\nabla \psi^s \nabla \psi^k = \lambda^2 \delta^{sk}, \quad (47)$$

$$\Delta \psi^s = 0. \quad (48)$$

Такие отображения ψ называются *гармоническими морфизмами* [16]. Как уже было упомянуто выше, в случае m -полевых моделей $\lambda^2 = 2V$, причем λ (как и потенциал V) определена всюду, что важно для дальнейших рассуждений. Для гармонических морфизмов, определенных на всем m -мерном пространстве полей, доказан [16, 17] целый ряд полезных теорем, которые мы сформулируем в качестве списка свойств:

1. Если $m = n \geq 3$, то гармонический морфизм есть композиция поворота, растяжения и параллельного переноса ([16, с.45]). Данное утверждение говорит о невозможности получить полноценное обобщение случая двухполевой модели с гармоническим суперпотенциалом, где для каждого суперпотенциала W существовала сопряженная функция M такая, что уравнение $M = \text{const}$ определяло орбиты решения.
2. ([16, с.146]). Если компоненты ψ — полиномы, обладающие свойством

$$\nabla \psi^s \nabla \psi^k = 2V \delta^{sk}, \quad (49)$$

то ψ — гармонический морфизм. Это сводит изучение полиномиальных суперпотенциалов со свойством (36) к изучению гармонических морфизмов (другими словами, полиномиальные слабоконформные отображения являются гармоническими морфизмами).

3. ([16, с.142]). Если $n \geq 3$, то компоненты гармонического морфизма ψ — полиномы степени не выше $\frac{m-2}{n-2}$. Это сводит изучение суперпотенциалов со свойством (36) к изучению гармонических морфизмов.

Таким образом, слабо конформные отображения оказываются тесно связанными со свойством гармоничности.

Прежде чем переходить к построению конкретных потенциалов, приведем несколько примеров гармонических морфизмов:

1. $\psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 :$

$$\begin{pmatrix} (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2 \\ 2\phi^1\phi^3 + 2\phi^2\phi^4 \\ 2\phi^1\phi^4 - 2\phi^2\phi^3 \end{pmatrix}, \quad (50)$$

для которой $\lambda^2 = 4|\phi|^2$.

К сожалению, нет надежного способа определить по произвольной неотрицательной функции, определяет ли она коэффициент растяжения некоторого гармонического морфизма, как и не дает возможности отыскать этот гармонический морфизм, как это было в случае двух полей. Тем не менее формула Бохнера дает необходимое условие существования гармонического суперпотенциала: если потенциал задается гармоническим суперпотенциалом, то потенциал — субгармоническая функция.

Рассмотрим пару гармонических морфизмов $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ с коэффициентами растяжения λ, μ соответственно. Легко показать, что композиция $\eta(\psi)$ есть вновь гармонический морфизм с коэффициентом растяжения $\nu = \mu(\psi) \cdot \lambda$. Заметим теперь, что в случае $n = l = 2$, η есть голоморфная функция, коэффициент растяжения которой есть квадрат модуля ее производной (см. пример ??). Нули голоморфных функций и их модулей в полиномиальном случае достаточно легко отслеживаются.

Таким образом, если имеется некоторый гармонический морфизм $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^2$, то подходящим выбором голоморфной функции можно получить потенциал, нулями которого будут поверхности уровня ψ (и нули коэффициента растяжения самого ψ).

Пример.[Построение полиномиального потенциала четырехполевой модели с парой поверхностей вакуумов]

Пусть $m = 4, n = 2$ и $\phi = (\phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^4)$ — поля.

Гармонические морфизмы $\psi = (a, b, c) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ есть полиномы степени не выше 2. Известный пример гармонического морфизма:

$$\psi = \begin{pmatrix} (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2 \\ 2\phi^1\phi^3 + 2\phi^2\phi^4 \\ 2\phi^1\phi^4 - 2\phi^2\phi^3 \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Коэффициент растяжения его имеет единственный нуль в нуле $(0, 0, 0, 0)$, поэтому конструируемый потенциал также будет иметь этот нуль. Потребуем также, чтобы нулями конструируемого потенциала были поверхности уровня, определяемые уравнениями $a = \pm 1, b = 0$. Выберем для этого суперпотенциал, рассмотренный в примере ??, тогда

$$w = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}a^3 - b^2a - a \\ -\frac{1}{3}b^3 + a^2b - b \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Соответствующий комплексный суперпотенциал будет иметь вид:

$$\omega = \frac{1}{3}z^3 - z, \quad (53)$$

где $z = a + ib$.

Наконец, положим потенциал V как:

$$V = 2|\phi|^2 \left\{ [(\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2 - 1]^2 + 4 [\phi^1 \phi^3 + \phi^2 \phi^4]^2 \right\} \quad (54)$$

$$\cdot \left\{ [(\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2 + 1]^2 + 4 [\phi^1 \phi^3 + \phi^2 \phi^4]^2 \right\} \quad (55)$$

Множество его вакуумов действительно включает точку $(0, 0, 0, 0)$ — нуль коэффициента растяжения ψ и две двумерные поверхности $\mathcal{N}_\pm$ — поверхности уровня (a, b) , каждую из которых определяет пара уравнений

$$\begin{cases} (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2 = \pm 1 \\ 2\phi^1 \phi^3 + 2\phi^2 \phi^4 = 0. \end{cases} \quad (56)$$

Действие группы $O(2)$ на W оставляет потенциал неизменным. Фиксируем $O \in O(2)$ и обозначим $OW = (W^1, W^2)$. Выберем W^1 в качестве суперпотенциала, тогда для любых $A, B \in \mathbb{R}$ уравнения

$$\begin{cases} W^2 = A \\ c = 2B \end{cases} \quad (57)$$

определяют двумерную поверхность, которой принадлежат орбиты решений (не обязательно кинковых) уравнений BPS.

Заметим, что гармонический морфизм $w = w(a, b)$ определяет уже рассмотренную модель из примера ??, для которого орбита определялась уравнением $b = 0$. Тогда, для нахождения кинковых решений выберем в качестве O матрицу поворота на угол, при котором поверхность $\mathcal{N}^2$ пересекает обе поверхности $\mathcal{N}_\pm$ при $A = 0$. Проверка показывает, что это угол 0. Заметим, что константа B ничем не фиксирована. Тогда суперпотенциал будет иметь вид

$$W^1 = ((\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2) \quad (58)$$

$$\cdot \left[\frac{1}{3} ((\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2)^2 - (2\phi^1 \phi^3 + 2\phi^2 \phi^4)^2 - 1 \right]. \quad (59)$$

Функции

$$W^2 = (2\phi^1 \phi^3 + 2\phi^2 \phi^4) \quad (60)$$

$$\cdot \left[\frac{1}{3} (2\phi^1 \phi^3 + 2\phi^2 \phi^4)^2 - ((\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2)^2 + 1 \right], \quad (61)$$

$$c = 2\phi^1 \phi^4 - 2\phi^2 \phi^3 \quad (62)$$

определяют поверхность $\mathcal{N}^2$, которой принадлежит орбита. Заметим, что поверхность уровня W^2 пересекает вакуумное многообразие только при $A = 0$. Это условие упрощает уравнение $W^2 = 0$, разбивая его на пару

$$\phi^1 \phi^3 + \phi^2 \phi^4 = 0 \quad (63)$$

$$\frac{1}{3} (2\phi^1 \phi^3 + 2\phi^2 \phi^4)^2 - ((\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2)^2 + 1 = 0 \quad (64)$$

Из этих двух уравнений только решения первого дадут топологические солитоны, поэтому воспользуемся им. Уравнение на $\mathcal{N}^2$ упростилось:

$$\begin{cases} \frac{b}{2} = \phi^1 \phi^3 + \phi^2 \phi^4 = 0 \\ \frac{c}{2} = \phi^1 \phi^4 - \phi^2 \phi^3 = B. \end{cases} \quad (65)$$

Очевидно,

$$\nabla W^1 = (a^2 - b^2 - 1) \nabla a - 2ab \nabla b \quad (66)$$

с учетом $b = 0$

$$\nabla W^1|_{b=0} = (a^2 - 1) \nabla a. \quad (67)$$

Т.е. для недостающего уравнения $\mathcal{M}$, функция F должна иметь градиент ортогональный ∇a почти всюду (чтобы не переопределить ситсему). Примером такой функции F является

$$F = F\left(\frac{\phi^1}{\phi^2}, \frac{\phi^3}{\phi^4}\right). \quad (68)$$

Итого, орбита $\mathcal{M}$ определяется системой уравнений

$$\phi^1 \phi^3 + \phi^2 \phi^4 = 0, \quad (69)$$

$$\phi^1 \phi^4 - \phi^2 \phi^3 = B, \quad (70)$$

$$F = C. \quad (71)$$

Тогда уравнение орбиты можно дать параметрически

$$\mathcal{M} = \{(\alpha\beta\frac{1}{t}, \beta\frac{1}{t}, t, -\alpha t) \in \mathbb{R}^4 | t \in I \subset \mathbb{R}\}, \quad (72)$$

где I — множество значений ϕ^3 , а α, β — некоторые новые константы, находимые для заданных вакуумов из условия $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}_\pm = v_\pm$, $v_\pm$ — нули потенциала на соответствующих поверхностях. Вычисления дадут:

$$\phi_K^3 = \phi_K^3(x) = \pm \left\{ \sqrt{\gamma^2 + \beta^4} + \gamma \tanh \left[8x (\alpha^2 + 1)^2 \gamma \right] \right\}^{\frac{1}{4}}, \quad (73)$$

где $\gamma = \frac{1}{(\alpha^2+1)^2} \sqrt{\beta^2(\alpha^2+1)^2 + \frac{1}{4}}$ Тогда решением будет

$$\phi_K = (\alpha\beta(\phi_K^3)^{-1}, \beta(\phi_K^3)^{-1}, \phi_K^3, -\alpha\phi_K^3). \quad (74)$$

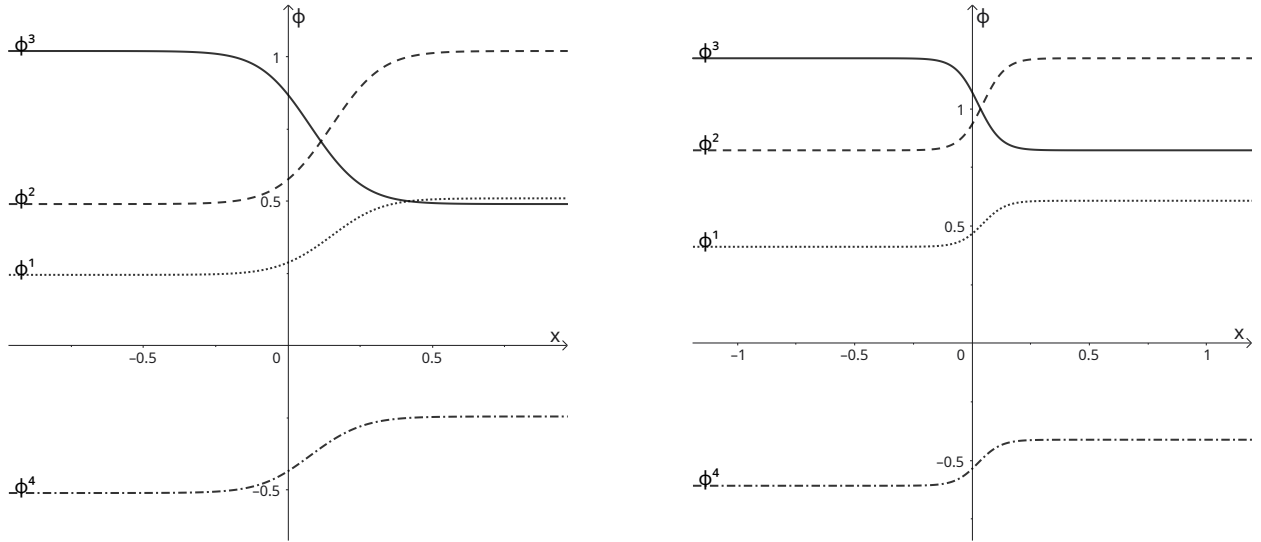


Рис. 3: Пара кинковых решений для констант $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ (слева) и для $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1$ (справа). С левой стороны каждого графика подписаны компоненты кинка.

Замечание

Интересно также рассмотреть “вырожденный” кинк при $\alpha = 0$. В этом случае решение будет иметь вид

$$\phi_K = (0, \beta(\phi_K^3)^{-1}, \phi_K^3, 0), \quad (75)$$

что позволит наглядно увидеть двумерное сечение четырехмерного пространства полей (Рис. 4).

Заметим также, что при $\beta = 0$ решение обретает вид

$$\phi_K(x) = (0, 0, \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh 4x\right)^{\frac{1}{4}}, 0), \quad (76)$$

т.е. третья компонента совпадает с ненулевой компонентой решения из примера ???. Связано это с тем, что ограничение градиента на плоскость $O_{\phi^2\phi^3}$ позволяет ввести комплексное поле $z = \phi^2 + i\phi^3$ и соответствующий комплексный суперпотенциал, совпадающий суперпотенциалом из примера ??.

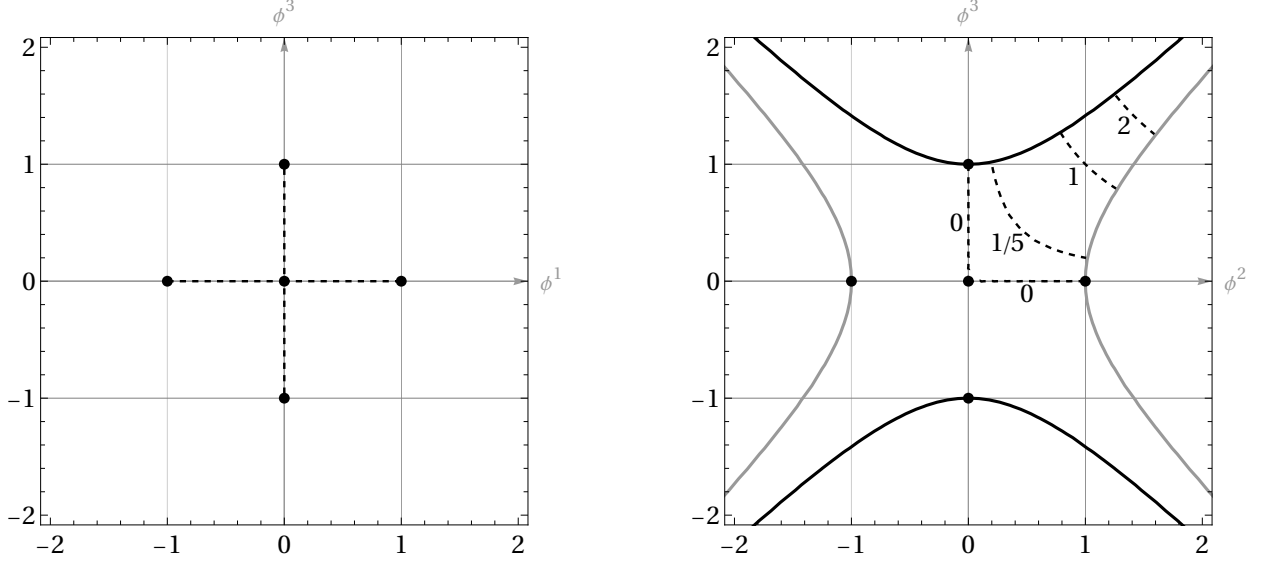


Рис. 4: Сечение пространства полей двумерной плоскостью $\phi^2 = 0, \phi^4 = 0$ (слева) и плоскостью $\phi^1 = 0, \phi^4 = 0$ (справа). Точками слева отмечены соответствующие вакуумы модели $??$. Пунктиром на обоих графиках отмечены орбиты кинковых решений для различных значений параметра B . Сплошными линиями справа представлены сечения вакуумного многообразия, представленного в виде двух гипербол, помеченных серым и черным цветом. Обратите внимание, что линии, помеченные одним цветом, являются сечением связного многообразия.

Примечательно, что в работе [11] рассматривалась двухполевая модель с потенциалом вида

$$V = \frac{1}{4} ((\phi^1)^2 - (\phi^2)^2 - 1)^2, \quad (77)$$

вакуумное многообразие которой представляет из себя пару гипербол. Анализ показал, что единственное возможное статическое кинковое решение должно иметь орбиту в виде прямой с уравнением $\phi^2 = 0$. В нашем случае ситуации координально меняется: существует целое параметрическое множество кинковых решений, соединяющих различные точки вакуумного многообразия.

IV. ПОЛУЧЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО НАБОРА ВАКУУМОВ

Приведем метод, позволяющий для данного потенциала получить новый потенциал с тем же набором решений.

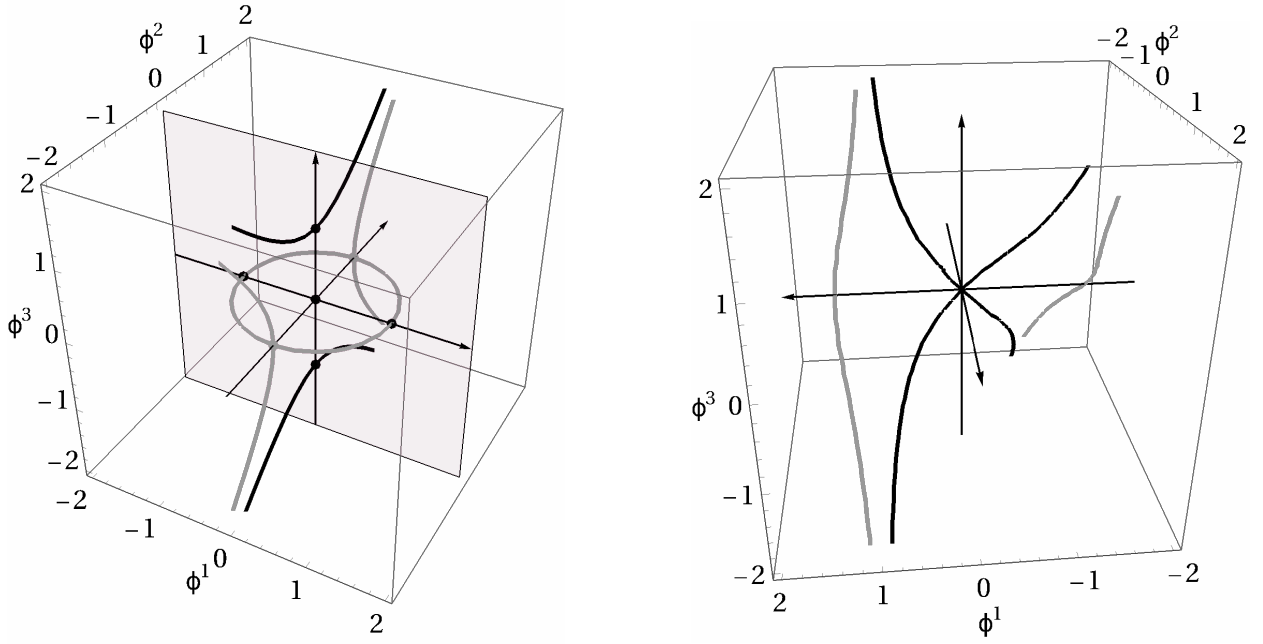


Рис. 5: Трехмерные сечения пространства полей трехмерной плоскостью $\phi^4 = 0$ (слева) и $\phi^4 = 1$ (справа). Накладно видно, что кривые одного цвета на рисунке 4 (справа) действительно являются сечениями связного вакуумного многообразия. Сечением графика плоскостью на рисунке слева является, очевидно, рисунок 4 (слева).

Пусть V — m -полевой потенциал, $v_{\pm}$ — нули потенциала, которым соответствует решение $\phi(x)$ уравнений движения $\phi_{xx} = \nabla V$, орбита $\phi(x)$ есть кривая $\mathcal{M}$. Пусть также F — неотрицательная функция, обращающаяся в ноль на орбите вместе со своими частными производными. Тогда можно рассмотреть новый потенциал

$$\tilde{V} = V + F, \quad (78)$$

имеющий ту же пару нулей $v_{\pm}$, и для которого уравнения движения обретут вид

$$\phi_{xx} = \nabla \tilde{V} \quad (79)$$

$$= \nabla V + \nabla F. \quad (80)$$

Подстановка решения $\phi(x)$ в них даст

$$\phi_{xx}(x) = \nabla V + (\nabla F)|_{\mathcal{M}} \quad (81)$$

$$= \phi_{xx}(x) + 0 \quad (82)$$

— верное тождество, т.е. $\phi(x)$ — решение уравнений движения для потенциала $\tilde{V}$.

Заметим, что при подобном построении потенциала $\tilde{V}$ можно сохранить и более одного решения. Для этого нужно выбрать аналогичный набор функций $F^1, \dots, F^n$ для каждого из n решений. Потенциал в таком случае будет иметь вид

$$\tilde{V} = V + F^1 \cdot \dots \cdot F^n. \quad (83)$$

Данный метод позволяет сохранять решения исходного потенциала, но не гарантирует отсутствия новых, в исходном потенциале не содержащихся.

Зачастую, в приложениях требуются потенциалы с дискретным набором нулей. Прибавление функции $F^1 \cdot \dots \cdot F^n$ позволяет из потенциала с поверхностью нулей выбрать необходимый набор из n решений и построить новый потенциал, среди решений которого будут все избранные.

Пример. Воспользуемся результатами из примера III. Фиксируем две пары констант

$$\alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{2}, \quad (84)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}, \beta_2 = 1, \quad (85)$$

для каждой из которых существует кинковое решение $\phi_K^{(1)}, \phi_K^{(2)}$ с орбитами $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ с концами в вакуумах

$$v_{\pm}^1 = \left(\frac{1}{4} \frac{\sqrt{10}}{(19 \cdot 3 \pm 8\sqrt{41})^{\frac{1}{4}}}, \frac{1}{2} \frac{\sqrt{10}}{(19 \cdot 3 \pm 8\sqrt{41})^{\frac{1}{4}}}, \right. \quad (86)$$

$$\left. \frac{(19 \cdot 3 \pm 8\sqrt{41})^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{2} \frac{(19 \cdot 3 \pm 8\sqrt{41})^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{10}} \right), \quad (87)$$

$$v_{\pm}^2 = \left(\frac{1}{2} \frac{\sqrt{5}}{(33 \pm 4\sqrt{29})^{\frac{1}{4}}}, \frac{\sqrt{5}}{(33 \pm 4\sqrt{29})^{\frac{1}{4}}}, \right. \quad (88)$$

$$\left. \frac{(33 \pm 4\sqrt{29})^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{5}}, -\frac{(33 \pm 4\sqrt{29})^{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{5}} \right). \quad (89)$$

Размерность $\mathcal{N}_{\pm}$ равна двум, т.е. для получения дискретных нулей потенциала требуется найти еще две пары функций $F^s, G^s, s = 1, 2$ для каждой $\mathcal{M}_s$ соответственно. Функция $F = F(\frac{\phi^1}{\phi^2}, \frac{\phi^3}{\phi^4})$ определяет орбиты обоих решений. Пусть тогда $F = \frac{\phi^1}{\phi^2} + \frac{\phi^3}{\phi^4}$. Для каждо-

го решения получим

$$F|_{\mathcal{M}_1} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}, \quad (90)$$

$$F|_{\mathcal{M}_2} = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}. \quad (91)$$

Т.е., орбиты решений удовлетворяют уравнениям $F = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$. Для устранения сингулярностей домножим каждое из них на $\phi^2\phi^4$, получим функции F^1, F^2 :

$$F^1 = \phi^1\phi^4 + \phi^2\phi^3 + \frac{1}{2}\phi^2\phi^4, \quad (92)$$

$$F^2 = \phi^1\phi^4 + \phi^2\phi^3 + \frac{3}{2}\phi^2\phi^4. \quad (93)$$

Для нахождения функций G^s , заметим, что для любых кинковых решений

$$\phi_K^1\phi_K^3 = \alpha\beta, \quad (94)$$

$$\phi_K^2\phi_K^4 = -\alpha\beta, \quad (95)$$

откуда

$$[\phi^1\phi^3 - \phi^2\phi^4]_{\mathcal{M}_s} = 2\alpha_s\beta_s. \quad (96)$$

Таким образом:

$$G^1 = \phi^1\phi^3 - \phi^2\phi^4 - \frac{1}{2}, \quad (97)$$

$$G^2 = \phi^1\phi^3 - \phi^2\phi^4 - 1. \quad (98)$$

Градиенты полученных функций F^s, G^s не обращаются в ноль на $\mathcal{M}_s$, однако, это можно исправить, возведя каждую из функций в квадрат. Тогда новый потенциал $\tilde{V}$ может быть получен как

$$\tilde{V} = V + (F^1F^2)^2 + (G^1G^2)^2 \quad (99)$$

$$= 2|\phi|^2 \left\{ [(\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2 - 1]^2 + 4[\phi^1\phi^3 + \phi^2\phi^4]^2 \right\} \quad (100)$$

$$\cdot \left\{ [(\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2 + 1]^2 + 4[\phi^1\phi^3 + \phi^2\phi^4]^2 \right\} \quad (101)$$

$$+ \left[\phi^1\phi^4 + \phi^2\phi^3 + \frac{1}{2}\phi^2\phi^4 \right]^2 \left[\phi^1\phi^4 + \phi^2\phi^3 + \frac{3}{2}\phi^2\phi^4 \right]^2 \quad (102)$$

$$+ \left[\phi^1\phi^3 - \phi^2\phi^4 - \frac{1}{2} \right]^2 [\phi^1\phi^3 - \phi^2\phi^4 - 1]^2 \quad (103)$$

V. АППЕНДИКС А

Геометрические свойства уравнений BPS Пусть дан m -полевой суперпотенциал W , и пусть также известны функционально независимые функции $F^s : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, s = \overline{2, m}$ такие, что

1. Уравнение $F^s = 0$ определяет поверхность $\mathcal{N}_s$ размерности $m - 1$;
2. Пересечение всех поверхностей $\mathcal{N}_s$ есть некоторая кривая $\mathcal{M}$;
3. $(\nabla W \nabla F^s)|_{\mathcal{M}} = 0$;
4. Частные производные суперпотенциала и функций F^s не равны нулю (за исключением быть может конечного числа точек) на кривой $\mathcal{M}$

Тогда существует решение $\phi = \phi(x)$ уравнений BPS

$$\phi_x = \nabla W, \quad (104)$$

причем его орбита есть кривая $\mathcal{M}$.

Доказательство

Из уравнений BPS получим систему

$$\frac{d\phi^1}{W_1} = \dots = \frac{d\phi^m}{W_m}. \quad (105)$$

Данная система есть характеристическая система дифференциального уравнения

$$\nabla W \nabla F = 0 \quad (106)$$

на неизвестную функцию F . Очевидно, для функций F^s на кривой $\mathcal{M}$ данное уравнение обращается в тождество. Пусть $\phi(a), a \in A$ — параметризация $\mathcal{M}$, и пусть система (105) не обращается в тождество на $\mathcal{M}$, т.е.

$$W_s(\phi) = \phi_a^s A_s, \quad (107)$$

где $A_s = A_s(a)$ — некоторые функции, причем $A_s \neq A_k$ для некоторой пары s, k . Множество A определяет семейство линейных оболочек $L(a) = L\{\nabla(F^s)(\phi(a)) | s = \overline{2, m}\}$, причем $\dim L(a) = m - 1$, т.е. существует одномерное ортогональное дополнение $L^\perp(a)$ оболочки $L(a)$. Очевидно, $L^\perp(a) = L\{\phi_a(a)\}$. По условию, $\nabla(W)(\phi) \perp \nabla(F^s)(\phi)$, т.е.

$\nabla(W)(\phi) \in L^\perp(a)$, т.е., ввиду одномерности $L^\perp(a)$, $W_s(\phi) = \phi_a^s \cdot B$ для некоторой функции $B = B(a) : A \rightarrow \mathbb{R}$, что неверно ввиду (107). Полученное противоречие доказывает утверждение.

-
- [1] P. W. Higgs, *Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons*, [Phys. Rev. Lett. **13**, 508 \(1964\)](#).
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.13.508>
 - [2] A. Alonso Izquierdo, M. A. González León, J. Mateos Guilarte, *Kinks from dynamical systems: domain walls in a deformed $O(N)$ linear sigma model*, [Nonlinearity **13**, 1137 \(2000\)](#).
<https://doi.org/10.1088/0951-7715/13/4/309>
 - [3] R. Guerrero, R. O. Rodriguez, R. Chavez, *A $SU(5) \times Z_2$ kink solution and its local stability*, [arXiv arXiv:1903.10634 \(2019\)](#). <https://arxiv.org/abs/1903.10634>
 - [4] C. M. Hull, *New gauged $N = 8$, $D = 4$ supergravities*, [Class. Quantum Grav. **20**, 5407 \(2003\)](#).
<https://doi.org/10.1088/0264-9381/20/24/013>
 - [5] R. Rajaraman, *Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля*, Москва: Мир, 1985, 414 с.
 - [6] E. B. Bogomolny, *Stability of Classical Solutions*, *Sov. J. Nucl. Phys.* **24**, 449 (1976) [*Yad. Fiz.* **24**, 861 (1976)].
 - [7] M. K. Prasad, C. M. Sommerfield, *Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon*, [Phys. Rev. Lett. **35**, 760 \(1975\)](#). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.35.760>
 - [8] D. Bazeia, W. Freire, L. Losano, R. F. Ribeiro, *Topological Defects and the Trial Orbit Method*, [Mod. Phys. Lett. A **17**, 1945 \(2002\)](#). <https://doi.org/10.1142/S0217732302008435>
 - [9] A. Alonso Izquierdo, M. A. González León, J. Mateos Guilarte, *$N=2$ supersymmetric kinks and real algebraic curves*, [Phys. Lett. B **480**, 373 \(2000\)](#). [https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(00\)00406-8](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(00)00406-8)
 - [10] V. I. Afonso, D. Bazeia, M. A. Gonzalez León, L. Losano, J. Mateos Guilarte, *Construction of Topological Defect Networks with Complex Scalar Fields*, [Nucl. Phys. B **810**, 427 \(2009\)](#).
<https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2008.09.026>
 - [11] J. Striet, F. A. Bais, *Dynamical vacuum selection in field theories with flat directions in their potential*, [J. High Energy Phys. **2003**, 032 \(2003\)](#). <https://doi.org/10.1088/1126-6708/2003/01/032>
 - [12] A. A. Penin, V. A. Rubakov, P. G. Tinyakov, S. V. Troitsky, *What becomes of vortices in theories with flat directions*, [Phys. Lett. B **389**, 13 \(1996\)](#). [https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(96\)01234-8](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(96)01234-8)
 - [13] A. Achúcarro, A. C. Davis, M. Pickles, J. Urrestilla, *Vortices in theories with flat directions*, [Phys. Rev.](#)

- D 66, 105013 (2002). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.66.105013>
- [14] M. Pickles, J. Urrestilla, *Nielsen-Olesen strings in Supersymmetric models*, *J. High Energy Phys.* **2003**, 052 (2003). <https://doi.org/10.1088/1126-6708/2003/01/052>
- [15] Harmonic maps group, *Publications by the Harmonic Maps group*, matematik.lu.se/harmonic/publications.html. — Страница на сайте университета Matematikcentrum LTH, Lunds Tekniska Högskola & Naturvetenskapliga fakulteten с большим количеством ссылок на статьи о гармонических морфизмах. Я так понял, это какая-то исследовательская группа по этой теме.
- [16] P. Baird, J. C. Wood, *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds*, London Mathematical Society Monographs, New Series, vol. 29, Oxford University Press, 2003. — основная книга по гармоническим морфизмам
- [17] M. Svensson, *Polynomial harmonic morphisms*, Master's dissertation, Lund University, 1998. matematik.lu.se/.../Martin-Svensson-MSc.pdf. — Магистерская диссертация Мартина Свенссона, очень хорошее и краткое описание теории.
- [18] N. Manton and P. Sutcliffe, *Topological Solitons*, Cambridge University Press, Cambridge U.K., 2004. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511617034>
- [19] Y. M. Shnir, *Topological and Non-Topological Solitons in Scalar Field Theories*, Cambridge University Press, Cambridge U.K., 2018. <https://doi.org/10.1017/9781108555623>
- [20] J. Cuevas-Maraver, P. G. Kevrekidis, F. L. Williams (eds.), *The sine-Gordon Model and its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High Energy Physics*, Part of the Nonlinear Systems and Complexity book series (vol. 10), Springer-Verlag, Heidelberg, 2014. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-06722-3>