

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»»

УДК 539.165.2

ОТЧЁТ  
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ  
ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМА РЕЗОНАНСНОГО  
ОБМЕНА ЭНЕРГИЕЙ В СТОЛКНОВЕНИЯХ  
СОЛИТОНОВ

Научный руководитель  
д.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_ В. А. Гани

Студент

\_\_\_\_\_ А. С. Никифоров

Москва 2026

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Теоретическая часть</b>	<b>3</b>
1.1 Основные сведения о кинке . . . . .	3
1.2 Явление резонансного обмена энергией . . . . .	4
1.3 Постановка задачи о спектре возбуждений . . . . .	4
1.4 Схема численного решения задачи о спектре возбуждений . . . . .	5
<b>2 Основная часть</b>	<b>6</b>
2.1 Постановка задачи о столкновениях солитонов . . . . .	6
2.2 Процедура минимизации . . . . .	7
2.3 Спектр возбуждений системы кинк–антикинк . . . . .	8
2.3.1 Явный вид потенциала $U(x)$ в модели $\varphi^8$ . . . . .	8
2.3.2 Дискретный и непрерывный спектры . . . . .	9
2.3.3 Полученный спектр . . . . .	9
2.4 Постановка численного эксперимента . . . . .	10
<b>3 Результаты численного моделирования</b>	<b>11</b>
<b>Заключение</b>	<b>15</b>
<b>Список использованных источников</b>	<b>16</b>

# ВВЕДЕНИЕ

Кинк представляет собой полевую конфигурацию, интерполирующую между двумя состояниями, отвечающими минимумам самодействия поля, то есть потенциала теоретико-полевой модели. При этом кинк имеет наименьшую возможную энергию среди всех конфигураций, соединяющих эти два минимума [1, 2].

Изучение механизма резонансного обмена энергией необходимо для объяснения резонансных явлений в столкновениях, или рассеянии, кинков. В свою очередь, резонансные явления важны для описания столкновений доменных стенок. Целью данной и последующих работ является объяснение причин резонансной природы столкновения солитонов в моделях высоких порядков.

Для достижения этой цели решались следующие задачи:

- ознакомление с основной литературой, посвящённой данной тематике;
- постановка задачи о столкновении кинка и антикинка;
- написание программы для численного решения поставленной задачи с учётом процедуры минимизации;
- исследование спектра возбуждений системы кинк–антикинк в модели  $\varphi^8$ .

## 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### 1.1 Основные сведения о кинке

Рассмотрим скалярное поле  $\varphi(x, t)$ , развитие которого описывается лагранжианом в пространстве-времени размерности  $\mathcal{D} = 1 + 1$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - V(\varphi), \quad \mu = 0, 1. \quad (1.1)$$

Здесь  $V(\varphi)$  — потенциал системы, который обращается в нуль в конечном числе точек. Из лагранжиана получим уравнение движения:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\varphi} = 0. \quad (1.2)$$

Для стационарного случая, когда  $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$  и  $\varphi(x, t) \equiv \varphi(x)$ , получим:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{dV}{d\varphi} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{d\varphi}, \quad (1.3)$$

$$\frac{d\varphi_K}{dx} = \sqrt{2V(\varphi)}. \quad (1.4)$$

## 1.2 Явление резонансного обмена энергией

При столкновениях солитонов в основном реализуются два различных случая, зависящих от их начальных скоростей  $v$ . Первый случай соответствует превышению некоторой критической скорости  $v > v_{\text{cr}}$ : солитоны сталкиваются и затем разлетаются на бесконечность. Во втором случае, при скоростях ниже критической,  $v < v_{\text{cr}}$ , солитоны после столкновения образуют связанное состояние, или бийон, которое медленно распадается. Однако при численном изучении столкновений был обнаружен ещё один возможный сценарий взаимодействия, получивший название резонансного обмена энергией. При некоторых скоростях ниже критической столкнувшиеся солитоны после первого соударения разлетаются на некоторое расстояние, а затем снова сталкиваются. Таких повторных столкновений может быть произвольное конечное число; после этого солитоны вновь разлетаются на бесконечность.

## 1.3 Постановка задачи о спектре возбуждений

Рассмотрим скалярное поле  $\varphi(x, t)$  как стационарное решение  $\varphi_K(x)$  с малым возмущением  $\delta\varphi(x, t)$ , то есть

$$\varphi(x, t) = \varphi_K(x) + \delta\varphi(x, t), \quad \|\delta\varphi\| \ll \|\varphi_K\|. \quad (1.5)$$

Подставим это выражение в уравнение (1.2). Тогда получим:

$$\left. \frac{\partial^2 \delta\varphi}{\partial t^2} - \frac{d^2 \varphi_K}{dx^2} - \frac{\partial^2 \delta\varphi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\varphi} \right|_{\varphi_K(x) + \delta\varphi} = 0. \quad (1.6)$$

Выполним разложение  $\frac{dV(\varphi_K + \delta\varphi)}{d\varphi}$  по степеням  $\delta\varphi$ , поскольку  $\|\delta\varphi\| \ll \|\varphi_K\|$ :

$$\frac{dV(\varphi_K + \delta\varphi)}{d\varphi} \approx \frac{dV(\varphi_K)}{d\varphi} + \frac{d^2 V(\varphi_K)}{d\varphi^2} \delta\varphi, \quad \frac{dV(\varphi_K)}{d\varphi} = \frac{d^2 \varphi_K}{dx^2}. \quad (1.7)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \delta\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \delta\varphi}{\partial x^2} + \frac{d^2 V}{d\varphi^2} \right|_{\varphi_K(x)} \delta\varphi = 0. \quad (1.8)$$

Будем искать возмущение в форме

$$\delta\varphi(x, t) = \psi(x) \cos(\omega t). \quad (1.9)$$

Тогда уравнение для малых возмущений принимает вид [3]:

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2V}{d\varphi^2} \Big|_{\varphi_K(x)} \right] \psi(x) = \omega^2 \psi(x), \quad \psi(x) \in C^2, \quad \psi(x) \in L^2. \quad (1.10)$$

Переобозначим

$$\frac{d^2V}{d\varphi^2} \Big|_{\varphi_K(x)} = U(x) \quad (1.11)$$

и примем:

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + U(x). \quad (1.12)$$

Рассмотрим случай нулевого собственного значения. Тогда возмущение примет вид

$$\delta\varphi = \psi(x). \quad (1.13)$$

Очевидно, что в таком случае соответствующей ему собственной функцией будет

$$\psi_0 = \frac{d\varphi_K}{dx}. \quad (1.14)$$

## 1.4 Схема численного решения задачи о спектре возбуждений

Рассмотрим численное решение задачи на собственные значения и собственные функции для уравнения Шрёдингера с произвольным потенциалом:

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + U(x) \right] \psi(x) = \omega^2 \psi(x). \quad (1.15)$$

Преобразуем непрерывное пространство в дискретное. Зададим границы области  $x \in [-a, a]$  и разобьём пространство следующим образом:

$$\begin{aligned} x_0 &= -a, \\ x_1 &= -a + \Delta x, \\ &\dots, \\ x_{N-1} &= a. \end{aligned}$$

Введём обозначение  $f(x_i) = f_i$ . Тогда для граничных условий имеем:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 0, \\ &\dots, \\ \psi_{N-1} &= 0. \end{aligned}$$

Преобразуем уравнение Шрёдингера, аппроксимировав вторую производную конечными разностями [4]:

$$\begin{cases} -\frac{\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}}{\Delta x^2} + U_j \psi_j = \omega^2 \psi_j + O(\Delta x^2), \\ j = 1, \dots, N-2. \end{cases} \quad (1.16)$$

Полученную систему уравнений перепишем в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\Delta x^2} + U_1 & -\frac{1}{\Delta x^2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{\Delta x^2} & \frac{2}{\Delta x^2} + U_2 & -\frac{1}{\Delta x^2} & \ddots & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{\Delta x^2} & \frac{2}{\Delta x^2} + U_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{\Delta x^2} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{\Delta x^2} & \frac{2}{\Delta x^2} + U_{N-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \\ \psi_{N-2} \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \\ \psi_{N-2} \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Для численного нахождения собственных значений и собственных функций полученной

трёхдиагональной симметричной матрицы используется библиотека LAPACK, а именно функция `dsteve()`.

## 2. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

### 2.1 Постановка задачи о столкновениях солитонов

Рассмотрим столкновение кинка и антикинка в модели  $\varphi^8$  с потенциалом

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} \varphi^4 (1 - \varphi^2)^2. \quad (2.1)$$

Для этой модели кинк и антикинк задаются следующими уравнениями соответственно:

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \varphi_K}{1 - \varphi_K} - \frac{1}{\varphi_K} = x, \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \varphi_{\bar{K}}}{1 - \varphi_{\bar{K}}} - \frac{1}{\varphi_{\bar{K}}} = -x. \quad (2.3)$$

В данной работе рассматривается столкновение кинка и антикинка, соединяющих топологические секторы  $(-1, 0)$  и  $(0, -1)$  соответственно. Для решения уравнения движения

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \frac{dV}{d\varphi} = 0 \quad (2.4)$$

необходимо сконструировать начальные и граничные условия. Получим их из анзаца следующего вида:

$$\varphi_s(x, t) = \varphi_K(\gamma(x + x_0 - vt)) + \varphi_{\bar{K}}(\gamma(x - x_0 + vt)) - \varphi_{\text{vac}}. \quad (2.5)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_K(\gamma(x + x_0)) + \varphi_{\bar{K}}(\gamma(x - x_0)) - \varphi_{\text{vac}}. \quad (2.6)$$

$$\varphi_t(x, 0) = -v\gamma\varphi'_K(x + x_0) + v\gamma\varphi'_{\bar{K}}(x - x_0). \quad (2.7)$$

Граничные условия стандартно задаются как

$$\varphi(\pm\infty, 0) = -1. \quad (2.8)$$

Однако такое задание начальных условий не является допустимым из-за перекрывающихся степенных асимптотик кинков, то есть их «хвостов». Для решения этой проблемы используется процедура минимизации начальных условий, как показано в работе [5].

## 2.2 Процедура минимизации

Для моделей с полиномиальными хвостами, в частности для модели  $\varphi^8$ , стандартный суперпозиционный анзац вида

$$\varphi(x, 0) \approx \varphi_K(x + x_0) + \varphi_{\bar{K}}(x - x_0) - \varphi_{\text{vac}} \quad (2.9)$$

порождает паразитные возбуждения уже при  $t > 0$ . Причина состоит в том, что хвосты уединённых решений спадают степенным образом и при любом разумном конечном  $x_0$  существенно перекрываются. Поэтому начальная конфигурация не является даже приближённым решением стационарного уравнения движения, что приводит к «старту» с лишней радиацией и может качественно исказить картину столкновения.

Для получения корректного решения используется процедура минимизации, предложенная в [5]: в качестве начального приближения берётся *split-domain* анзац

$$\varphi_{\text{init}}(x) = [1 - H(x)]\varphi_{(-1,0)}(x + x_0) + H(x)\varphi_{(0,-1)}(x - x_0), \quad (2.10)$$

где  $H(x)$  — функция Хевисайда. Данный анзац правильно воспроизводит вакуумы слева и справа, но имеет излом в окрестности  $x = 0$ , то есть разрыв производной, поэтому далее он используется только как стартовое приближение в вариационной процедуре.

Ищется функция  $\varphi(x)$ , минимизирующая функционал

$$I[\varphi] = \|(1 - v^2)D_2\varphi - V'(\varphi)\|_2^2 + C|\varphi(-x_0) - \tilde{\varphi}|^2 + C|\varphi(x_0) - \tilde{\varphi}|^2. \quad (2.11)$$

Здесь  $\|\cdot\|_2$  — евклидова норма,  $\tilde{\varphi} = \varphi(\pm x_0)$ , а  $C \gg 1$  — эмпирическая константа.

После нахождения минимизатора  $\varphi(x, 0) = \varphi_{\min}(x)$  задаётся начальная скорость поля. Простейший выбор, согласованный со знаком скоростей кинка и антикинка, имеет вид

$$\varphi_t(x, 0) = v\gamma \operatorname{sgn}(x) \frac{d\varphi_{\min}}{dx}. \quad (2.12)$$

Этот выбор корректно задаёт противоположные направления движения, однако может создавать слабую «засечку» в  $\varphi_t$  в окрестности  $x = 0$ . При необходимости её можно дополнительно сгладить второй минимизацией по  $\varphi_t$ ; см. [5].

## 2.3 Спектр возбуждений системы кинк–антикинк

Анализ резонансной структуры, то есть окон многократных столкновений, проводится по переходу кинетической энергии, связанной с нулевой модой, в колебательные моды после первого удара и по её последующему возвращению в поступательное движение при повторном столкновении. В классической картине для модели  $\varphi^4$  эту роль играет внутренняя мода одиночного кинка. Однако, как показано в работе [6] для модели  $\varphi^6$ , резонансные окна могут существовать даже при отсутствии внутренней моды у одиночного кинка: энергия может временно переходить в локализованные моды малых колебаний вокруг составной конфигурации кинк–антикинк.

Зафиксируем параметрически расстояние между солитонами и рассмотрим квазистационарную конфигурацию кинк–антикинк, зависящую от параметра полурасстояния  $a > 0$ ; центры солитонов находятся в точках  $x = \pm a$ . Для выбранного топологического сектора  $(-1, 0) + (0, -1)$  естественная суперпозиция широко разнесённых решений имеет вид

$$\varphi_s(x) \approx \varphi_{(-1,0)}(x+a) + \varphi_{(0,-1)}(x-a), \quad a \gg 1. \quad (2.13)$$

В практических вычислениях, особенно в моделях со степенными хвостами, вместо суперпозиции удобно использовать минимизированный профиль  $\varphi_s(x)$ , получаемый процедурой минимизации стационарного уравнения; см. предыдущий раздел.

### 2.3.1 Явный вид потенциала $U(x)$ в модели $\varphi^8$

В данной работе используется потенциал

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} \varphi^4 (1 - \varphi^2)^2 = \frac{1}{2} (\varphi^4 - 2\varphi^6 + \varphi^8), \quad (2.14)$$

поэтому

$$V'(\varphi) = 2\varphi^3 - 6\varphi^5 + 4\varphi^7, \quad V''(\varphi) = 6\varphi^2 - 30\varphi^4 + 28\varphi^6. \quad (2.15)$$

Следовательно,

$$U(x) = 6 \varphi_s^2(x) - 30 \varphi_s^4(x) + 28 \varphi_s^6(x). \quad (2.16)$$

### 2.3.2 Дискретный и непрерывный спектры

При  $x \rightarrow \pm\infty$  поле стремится к вакууму, соответствующему рассматриваемому сектору. Если внешние границы отвечают вакууму  $\varphi_{\text{vac}} = -1$ , то

$$U(\pm\infty) = V''(\varphi_{\text{vac}}) = V''(-1) = 4, \quad (2.17)$$

и непрерывный спектр начинается с порога  $\omega^2 \geq 4$ . Локализованные, или связанные, моды, способные аккумулировать энергию в области взаимодействия, соответствуют собственным значениям

$$0 \leq \omega^2 < 4 \quad (2.18)$$

и имеют собственные функции, экспоненциально или быстрее убывающие при  $|x| \rightarrow \infty$ .

### 2.3.3 Полученный спектр

Результаты получены для параметра  $a = 15$ . Эффективный потенциал имеет следующий вид:

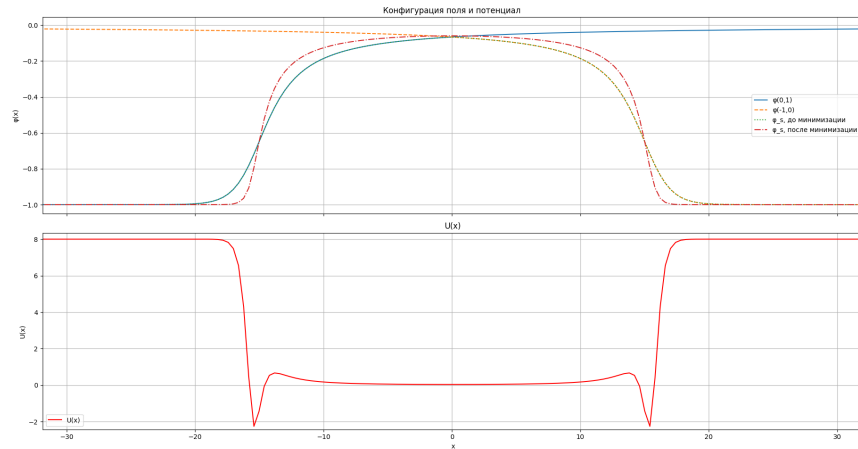


Рисунок 1 — График зависимости скалярного поля и потенциала от координаты.

В результате численного эксперимента было получено 32 собственных значения, не превышающих верхнего предела. Несколько первых собственных функций приведены на рис. 2.

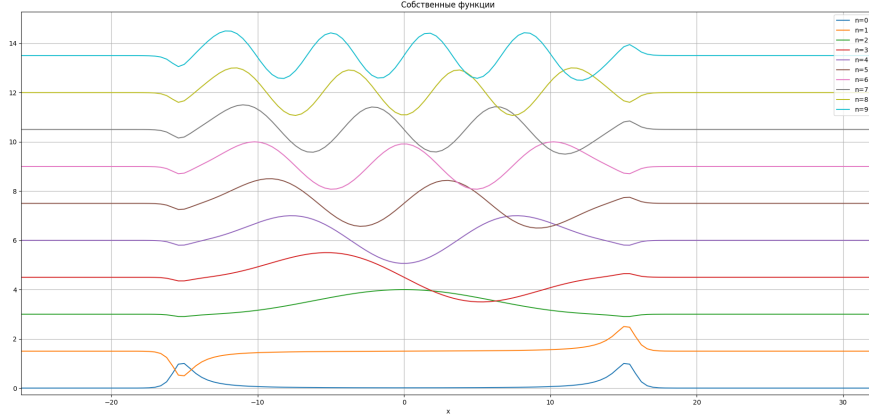


Рисунок 2 — График зависимости собственных функций от координаты.

## 2.4 Постановка численного эксперимента

Динамика поля описывается уравнением

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + V'(\varphi) = 0, \quad V(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi^4(1 - \varphi^2)^2. \quad (2.19)$$

Численное моделирование проводится на конечном интервале  $x \in [-L, L]$  с граничными условиями, соответствующими выбранному топологическому сектору:

$$\varphi(-L, t) = \varphi(L, t) = -1. \quad (2.20)$$

Начальные условия  $\varphi(x, 0)$  и  $\varphi_t(x, 0)$  строятся по процедуре минимизации, описанной выше.

Пространственная производная аппроксимируется конечными разностями второго порядка на сетке  $x_j = -L + j\Delta x$ ,  $j = 0, \dots, N - 1$ :

$$\varphi_{xx}(x_j, t^n) \approx \frac{\varphi_{j+1}^n - 2\varphi_j^n + \varphi_{j-1}^n}{\Delta x^2}. \quad (2.21)$$

По времени используется явная разностная схема:

$$\varphi_j^{n+1} = 2\varphi_j^n - \varphi_j^{n-1} + \Delta t^2 \left( \frac{\varphi_{j+1}^n - 2\varphi_j^n + \varphi_{j-1}^n}{\Delta x^2} - V'(\varphi_j^n) \right). \quad (2.22)$$

Шаг по времени выбирается из условия устойчивости  $\Delta t \leq \sigma \Delta x$ , где  $\sigma < 1$ .

Для контроля корректности расчёта мониторится закон сохранения энергии:

$$E(t) = \int_{-L}^L \left[ \frac{1}{2}\varphi_t^2 + \frac{1}{2}\varphi_x^2 + V(\varphi) \right] dx, \quad (2.23)$$

а также величина поля в центре столкновения  $\varphi(0, t)$ . Времена последовательных столкновений определяются по локальным экстремумам  $\varphi(0, t)$  либо по минимумам расстояния между центрами кинка и антикинка.

Положение кинка  $x_K(t)$  и антикинка  $x_{\bar{K}}(t)$  удобно определять как уровень поля  $\varphi(x, t) = \tilde{\varphi}$ , где  $\tilde{\varphi}$  — фиксированное значение между вакуумами. После этого расстояние между солитонами равно

$$R(t) = x_{\bar{K}}(t) - x_K(t). \quad (2.24)$$

Финальный режим классифицируется как: (i) однократное рассеяние, или один «удар», при  $v > v_{\text{cr}}$ ; (ii) захват с образованием биона; (iii) многоударные окна, характеризующиеся числом столкновений до разлёта. Структура многоударных окон является аналогом структуры, наблюдаемой в других моделях [6, 5].

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для анализа столкновений были рассмотрены обе ориентации начальной конфигурации: кинк–антикинк и антикинк–кинк. Численные расчёты показывают, что динамика существенно зависит от порядка расположения солитонов. В одном секторе столкновение при докритических скоростях приводит преимущественно к захвату пары и формированию долгоживущего осциллирующего связанного состояния, тогда как в другом секторе солитоны после конечного числа соударений уходят на бесконечность.

Такое различие естественно связать с асимметрией спектра малых возмущений вокруг составной конфигурации. Хотя отдельный кинк не обладает собственной внутренней колебательной модой, для пары кинк–антикинк возникает эффективная потенциальная яма, поддерживающая дискретные связанные состояния. Поэтому энергия, потерянная поступательной степенью свободы при первом соударении, может временно накапливаться не во внутренней моде отдельного кинка, а в коллективной моде всей пары. При выполнении резонансного условия часть этой энергии возвращается в поступательное движение при последующем соударении, что и приводит к появлению окон разлёта. Такой механизм согласуется с интерпретацией, предложенной для  $\varphi^6$ -модели, где резонансные окна возникают несмотря на отсутствие внутренних мод у изолированных кинков. Аналогичная феноменология многоударных окон обсуждается и для более высоких полиномиальных моделей поля.

На рис. 3 приведена зависимость модуля выходной скорости  $|v_{\text{out}}|$  от начальной скорости  $v_{\text{in}}$  с классификацией траекторий по числу соударений.

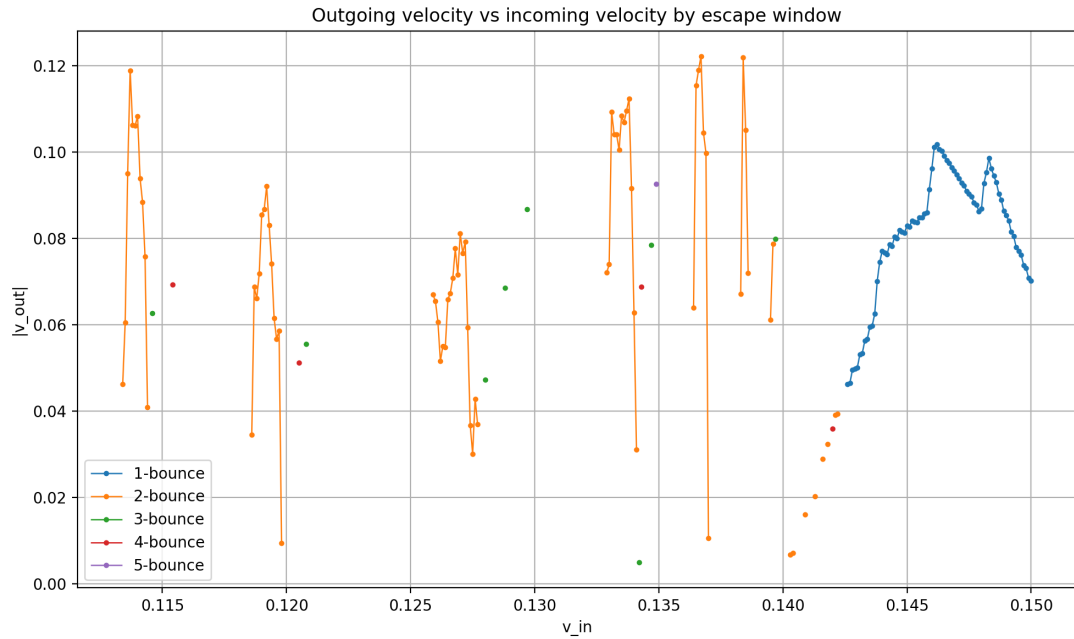


Рисунок 3 — Зависимость выходной скорости  $|v_{out}|$  от начальной скорости  $v_{in}$ . Цветом показано число соударений до окончательного разлёта.

Видно, что область одноударного разлёта формирует сравнительно регулярную ветвь при больших  $v_{in}$ , тогда как при меньших скоростях разлёт возможен только в узких многоударных окнах. Основной вклад дают двухударные окна, однако на их границах появляются более тонкие окна с тремя и большим числом соударений.

Отдельно был рассмотрен случай, соответствующий центру двухударного окна:

$$v_{in} = 0.11920.$$

Пространственно-временная картина  $\varphi(x, t)$ , показанная на рис. 4, демонстрирует двухударный сценарий.

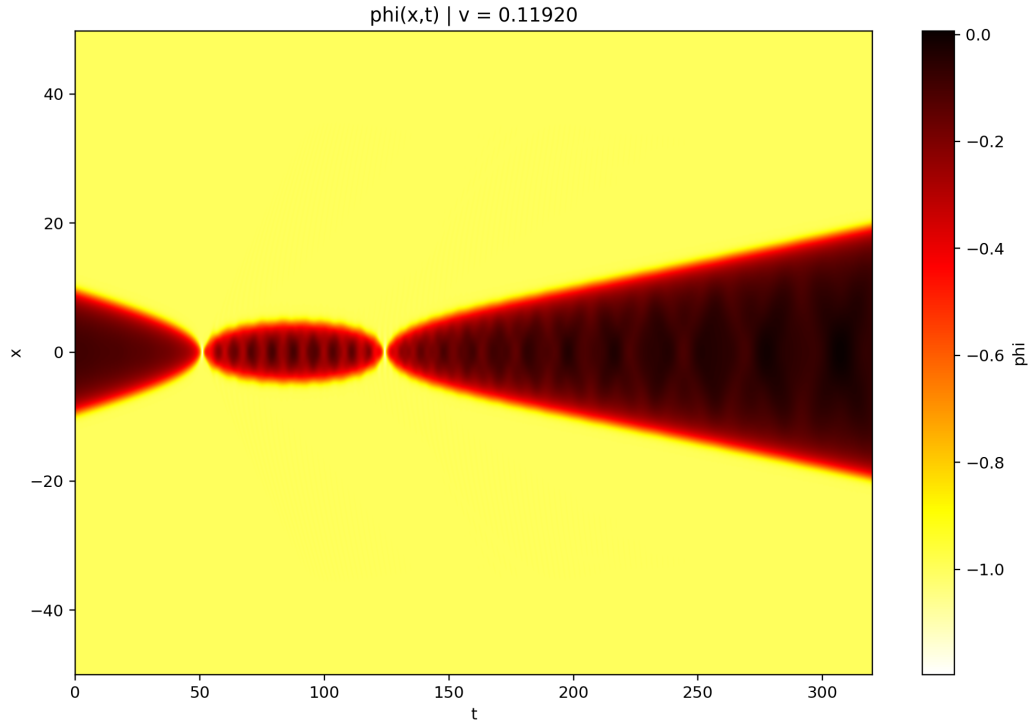


Рисунок 4 — Пространственно-временная эволюция поля  $\varphi(x, t)$  при  $v_{\text{in}} = 0.11920$ .

Первое столкновение происходит при  $t \simeq 50$ , после чего формируется промежуточное осциллирующее состояние пары. В интервале примерно  $50 \lesssim t \lesssim 125$  наблюдается серия колебаний поля в центральной области, соответствующая временной передаче энергии из поступательного движения в коллективную степень свободы. Затем происходит повторное столкновение, после которого солитоны расходятся. Из графика видно, что после первого соударения максимальное полурасстояние между кинком и антикинком  $a = 5$ . Таким образом, расчёт при  $v_{\text{in}} = 0.11920$  соответствует окну разлёта с двумя основными соударениями.

Дополнительное подтверждение резонансной природы этого процесса даёт спектральный анализ. На рис. 5 слева показан спектр Фурье колебаний поля, а справа — зависимость дискретных уровней  $\omega^2$  от параметра полурасстояния  $a$  между солитонами.

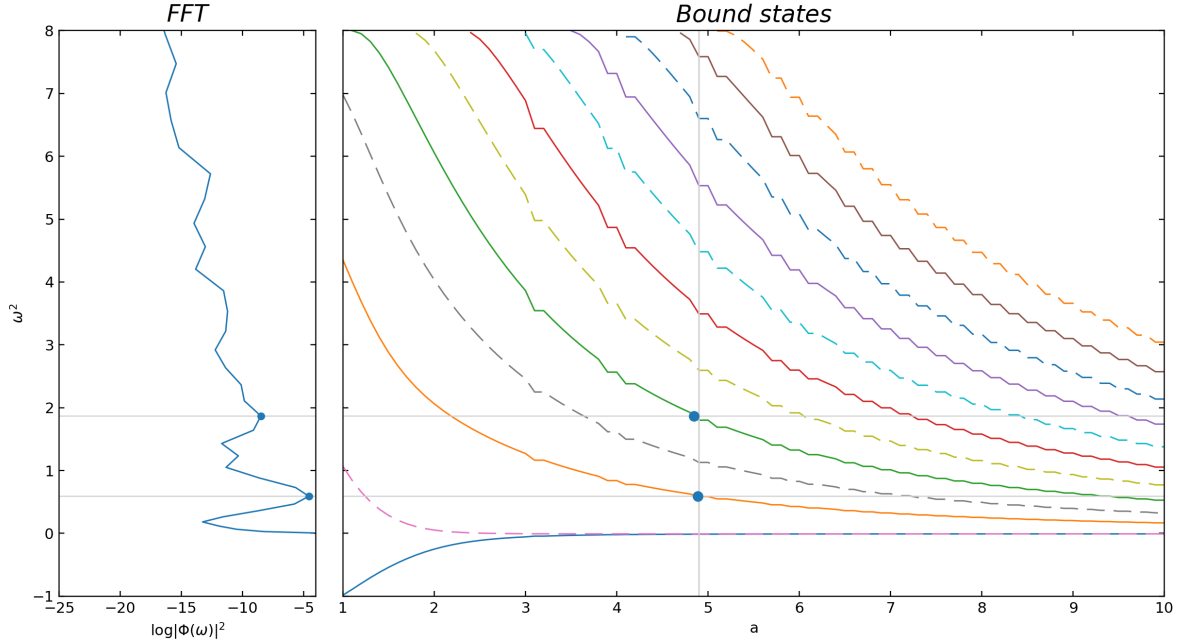


Рисунок 5 — Слева: спектр Фурье колебаний поля в промежутке между первым и вторым соударениями. Справа: зависимость дискретных уровней  $\omega^2$  составной конфигурации от параметра полурасстояния  $a$  между солитонами. Сплошными линиями показаны чётные связанные моды, пунктирными — нечётные связанные моды.

Для конфигурации, соответствующей рассматриваемому столкновению, существенные пики Фурье-спектра находятся вблизи связанных уровней составной пары. В частности, отмеченные значения  $\omega^2$  согласуются с ветвями дискретного спектра при  $a \simeq 4.9$ . Это означает, что в промежутке между первым и вторым соударениями возбуждаются именно коллективные связанные состояния пары, а не внутренние моды одиночного кинка.

Таким образом, результаты численного моделирования показывают, что наличие окон разлёта определяется не спектром изолированного солитона, а спектром всей конфигурации.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача о столкновениях кинка и антикинка в теоретико-полевой модели  $\varphi^8$  с потенциалом  $V(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi^4(1 - \varphi^2)^2$ . В теоретической части сформулированы основные сведения о кинках как топологических дефектах в  $(1 + 1)$ -мерной модели, а также изложена идея резонансного обмена энергией при столкновениях солитонов, приводящая к существованию окон многократных столкновений при скоростях ниже критической.

Для интерпретации резонансных явлений поставлена и рассмотрена задача о спектре малых возмущений. Проведена линеаризация уравнения движения в окрестности стационарного решения и получена спектральная задача Шрёдингера с эффективным потенциалом  $U(x) = V''(\varphi(x))$ . Описана численная схема вычисления собственных значений и собственных функций методом конечных разностей с последующим нахождением спектра симметричной трёхдиагональной матрицы стандартными средствами LAPACK.

В основной части обоснована необходимость специального построения начальных условий для моделирования столкновения кинк–антикинк в модели  $\varphi^8$ . Из-за степенного убывания хвостов уединённых решений прямая суперпозиция кинка и антикинка приводит к заметным паразитным возмущениям уже на ранних временах. Для подавления этих эффектов использована процедура минимизации начальной конфигурации, основанная на *split-domain* анзаце и минимизации невязки стационарного уравнения, что позволяет получить более корректный старт для динамических расчётов.

Кроме того, исследован спектр малых колебаний вокруг составной конфигурации кинк–антикинк при фиксированном расстоянии между солитонами. Для выбранного значения параметра полурасстояния  $a = 15$  построен эффективный потенциал  $U(x)$  и численно получен набор дискретных собственных значений в диапазоне  $\omega^2 < 4$ , соответствующий локализованным модам ниже порога непрерывного спектра. Показаны примеры собственных функций низших уровней. Наличие локализованных мод составной конфигурации является важным элементом механизма резонансного обмена энергией, аналогичного обсуждаемому в литературе для моделей, где резонансные окна наблюдаются даже при отсутствии внутренней моды у одиночного кинка.

Результаты численного моделирования показали, что динамика столкновений зависит от наличия колебательных мод связанного состояния конфигурации кинк–антикинк. На примере скорости  $v_{\text{in}} = 0.11920$ , соответствующей центру окна двухударного столкновения объяснен механизм резонансной передачи энергии между трансляционной и колебательной модами.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Nicholas Manton и Paul Sutcliffe. *Topological Solitons*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004. DOI: 10.1017/CB09780511617034. URL: <https://doi.org/10.1017/CB09780511617034>.
- [2] Yakov M. Shnir. *Topological and Non-Topological Solitons in Scalar Field Theories*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2018. DOI: 10.1017/9781108555623. URL: <https://doi.org/10.1017/9781108555623>.
- [3] Vakhid A. Gani, Vadim Lensky и Mariya A. Lizunova. “Kink excitation spectra in the (1+1)-dimensional  $\varphi^8$  model”. В: *Journal of High Energy Physics* 2015.8 (2015), с. 147. DOI: 10.1007/JHEP08(2015)147. arXiv: 1506.02313 [hep-th]. URL: [https://doi.org/10.1007/JHEP08\(2015\)147](https://doi.org/10.1007/JHEP08(2015)147).
- [4] Josh Izaac и Jingbo Wang. *Computational Quantum Mechanics. Part of the Undergraduate Lecture Notes in Physics book series*. Springer Nature Switzerland, 2018. DOI: 10.1007/978-3-319-99930-2. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-99930-2>.
- [5] Ivan C. Christov и др. “Kink-Antikink Collisions and Multi-Bounce Resonance Windows in Higher-Order Field Theories”. В: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 97 (2021), с. 105748. arXiv: 2005.00154 [hep-th]. URL: <https://arxiv.org/abs/2005.00154>.
- [6] Patrick Dorey и др. “Kink-antikink collisions in the  $\varphi^6$  model”. В: *Physical Review Letters* 107.9 (2011), с. 091602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.091602. arXiv: 1101.5951 [hep-th]. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.091602>.
- [7] Vakhid A. Gani и др. “Scattering of the double sine-Gordon kinks”. В: *The European Physical Journal C* 78 (2018), с. 345. DOI: 10.1140/epjc/s10052-018-5813-1. arXiv: 1711.01918 [hep-th]. URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-5813-1>.
- [8] Alberto Alonso-Izquierdo и Juan Mateos Guilarte. “On a family of (1+1)-dimensional scalar field theory models: Kinks, stability, one-loop mass shifts”. В: *Annals of Physics* 327 (2012), с. 2251–2274. DOI: 10.1016/j.aop.2012.04.014. arXiv: 1205.3069 [hep-th]. URL: <https://doi.org/10.1016/j.aop.2012.04.014>.