Исследование механизма резонансного обмена энергией в столкновениях солитонов

Никифоров А. С.
Б22-102
Научный руководитель:
Д. ф.-м. н.
Гани В. А.

Москва, 2026

Введение

MEPhI

Цель работы:

Объяснение причин резонансной природы столкновения солитонов в моделях высоких порядков.

Задачи:

- Постановка задачи о столкновении солитонов
- Постановка задачи о спектре возбуждений кинка
- Минимизация начальных условий
- Получение спектра возбуждений связанного состояния солитонов
- Численное исследование столкновений
- Установление связи спектра с резонансными явлениями

Введение

Лагранжиан, описывающий динамику скалярного поля $\varphi(x)$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - V(\varphi), \quad \mu = 0, 1.$$

Уравнение движения:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\varphi} = 0,$$

где $V(\varphi) \geq 0$ и имеет два или более минимумов, в которых обращается в ноль.

Кинковое решение соединяет минимумы потенциала $V(\varphi)$ и зависит только от x.

$$\frac{d\varphi_k}{dx} = \sqrt{2V(\varphi_k)}.$$

$$V(\varphi_\pm) = 0, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \varphi(x) = \varphi_\pm.$$

Постановка задачи о малых возбуждениях

Запишем скалярное поле как сумму кинкового решения с малым возмущением:

$$\varphi(x,t) = \varphi_K(x) + \delta\varphi(x,t).$$

Ищем возмущение в виде:

$$\delta\varphi(x,t) = \psi(x)\ cos(\omega t).$$

Подставляя это в уравнение движения, получим:

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2V}{d\varphi^2}\bigg|_{\varphi_K(x)}\right]\psi(x) = \omega^2\,\psi(x), \quad \psi(x) \in C^2,\ \psi(x) \in L^2.$$

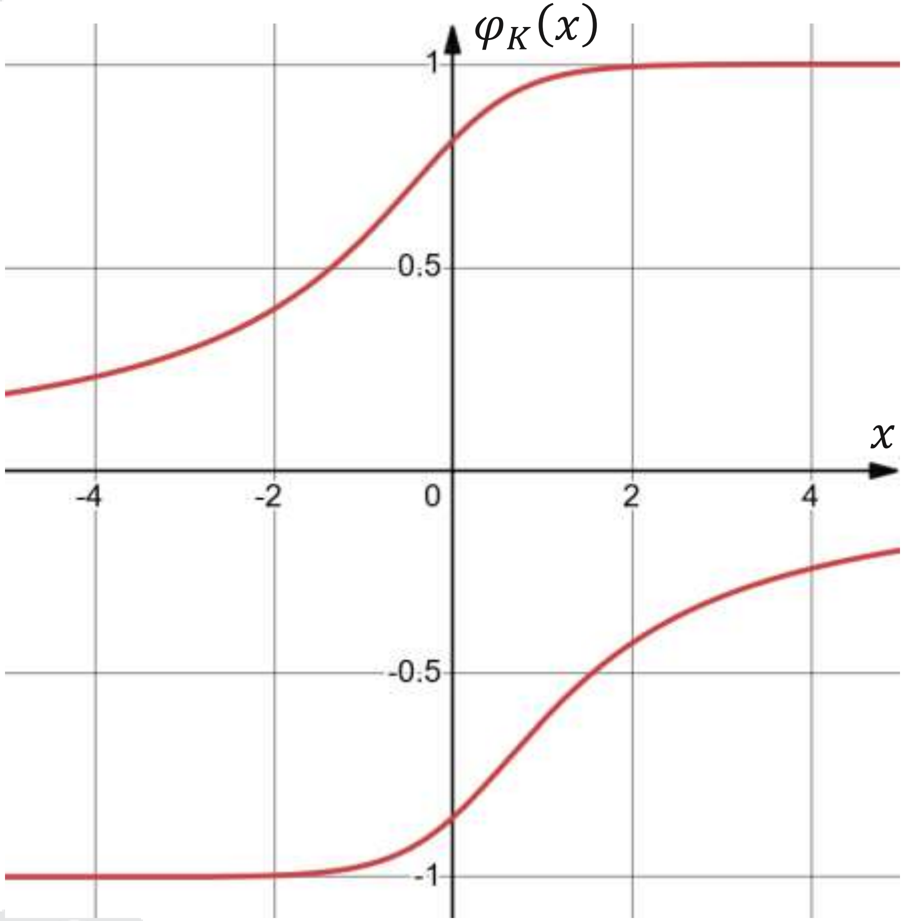
Переобозначим $\frac{d^2V}{d\varphi^2}\Big|_{\varphi_K(x)}$, как $U(x)$.

Будем искать собственные функции, соответствующие дискретному спектру

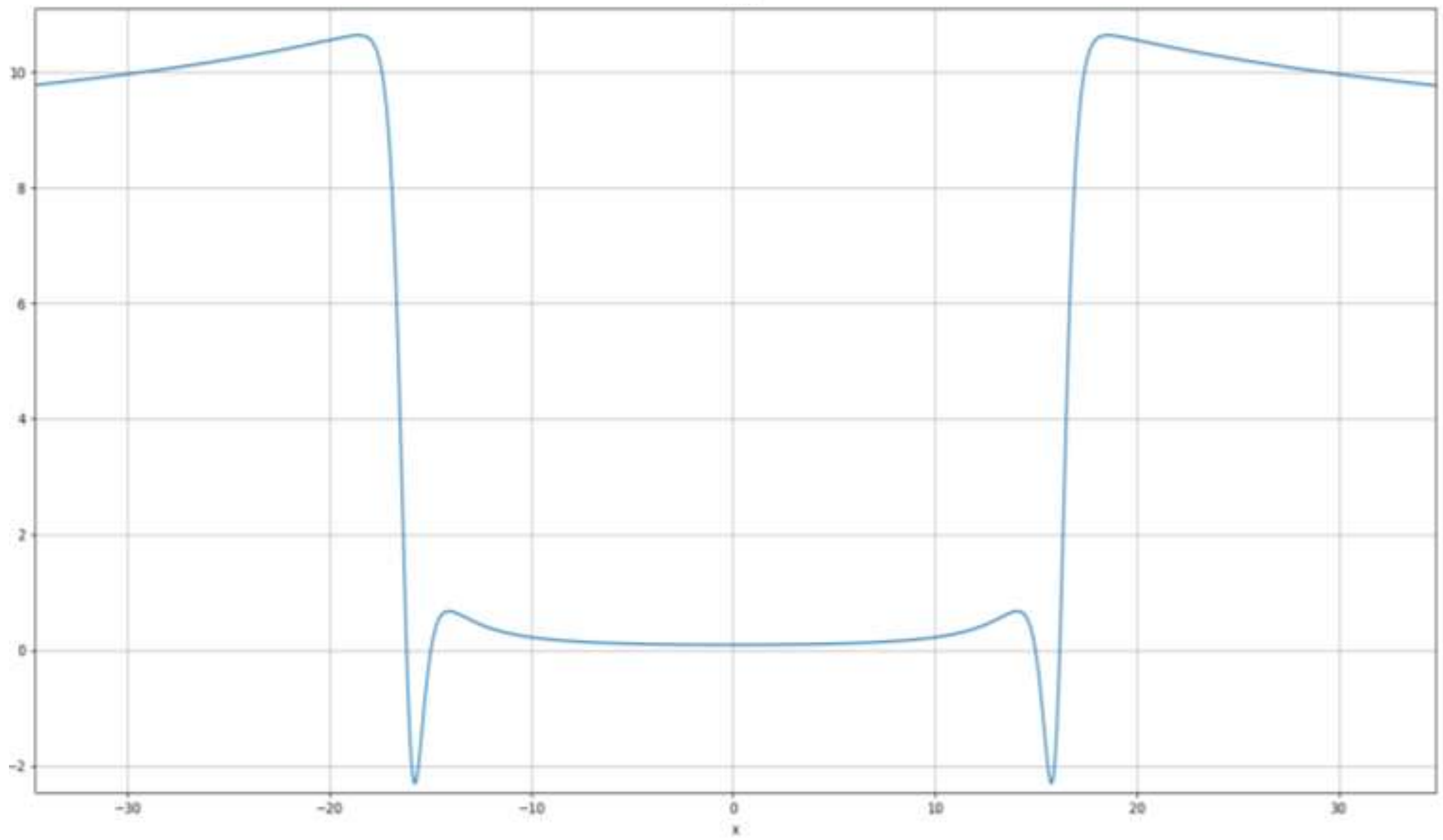
Рассматриваемая модель φ^8

Для $\varphi^{\mathbf{8}}$ модели, $V(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi^{\mathbf{4}}\,(1-\varphi^2)^2$. Численно получены графики зависимости кинков и потенциала U от координаты

В отличии от φ^4 у кинка φ^8 нет собственных колебательных мод, поэтому потенциал U(x) строится для суммы



$U(x)$



Минимизация начальных данных

Для решения уравнения движения необходимы начальные и граничные условия. В качестве первого приближения используется анзац следующего вида

$$\varphi_{\text{init}}(x) = [1 - H(x)]\, \varphi_{(-1,0)}(x + x_0) + H(x)\, \varphi_{(0,-1)}(x - x_0),$$

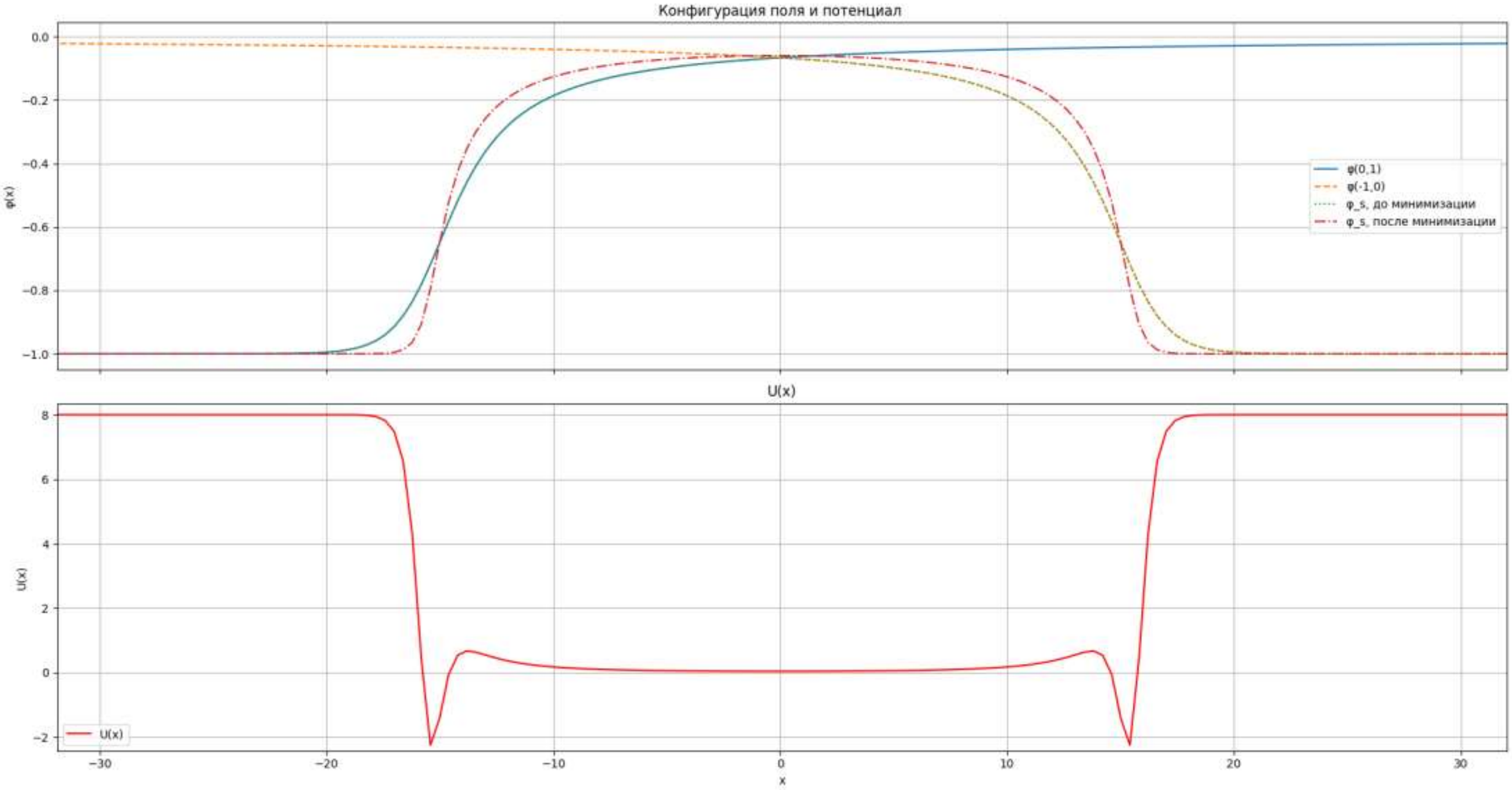
Начальные условия

$$\varphi(x, 0) = \varphi_K\left((x + x_0)\right) - \varphi_{\bar{K}}\left((x - x_0)\right) \qquad \varphi_t(x, 0) = -v\ \varphi'_K\left((x + x_0)\right) + v\ \varphi'_{\bar{K}}\left((x - x_0)\right)$$

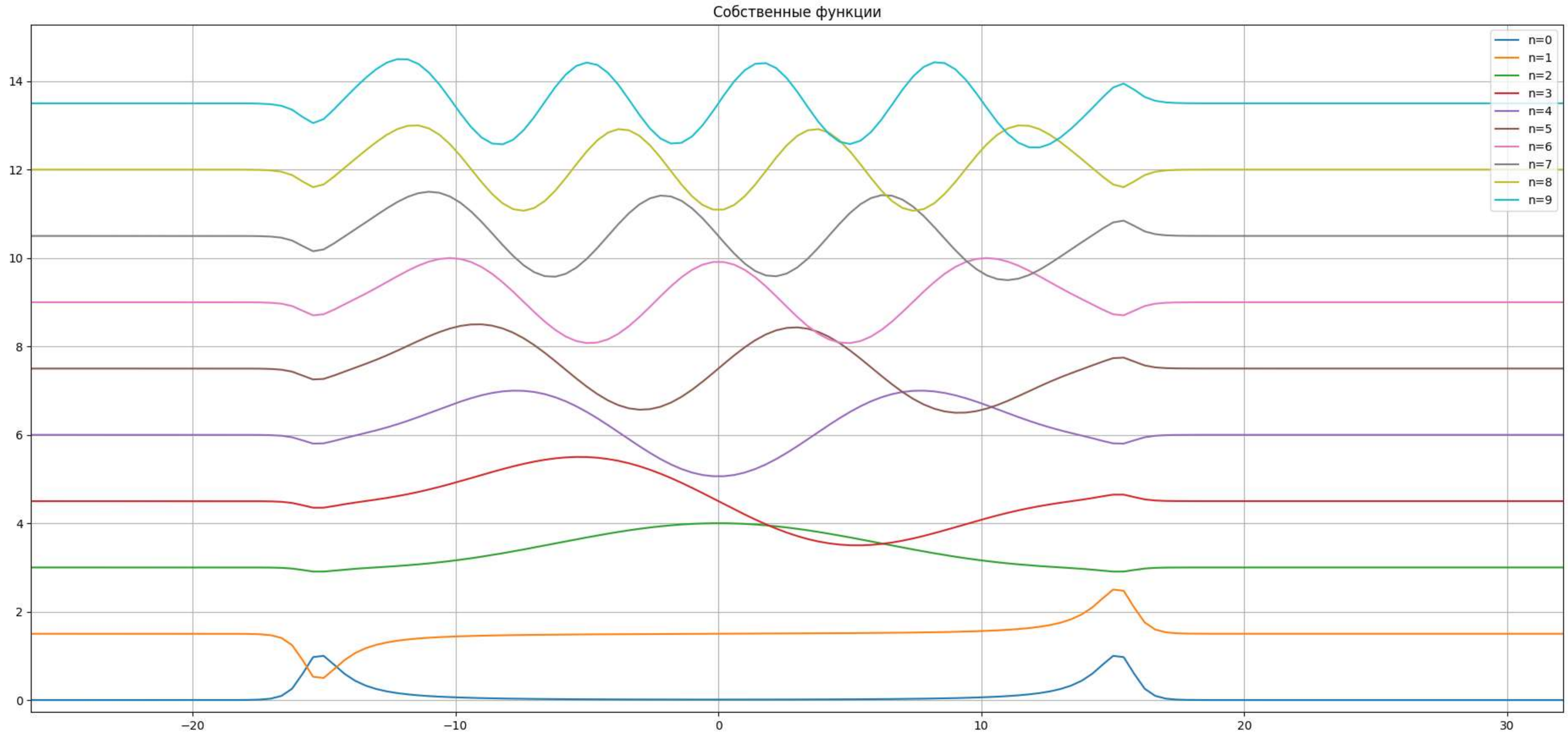
Однако для степенных “хвостов” кинков, такие начальные данные не подходят. Поэтому проводится минимизация

$$I[\varphi] = \left\|(1 - v^2)D_2\varphi - V'(\varphi)\right\|_2^2 + C\left|\varphi(-x_0) - \tilde{\varphi}\right|^2 + C\left|\varphi(x_0) - \tilde{\varphi}\right|^2$$

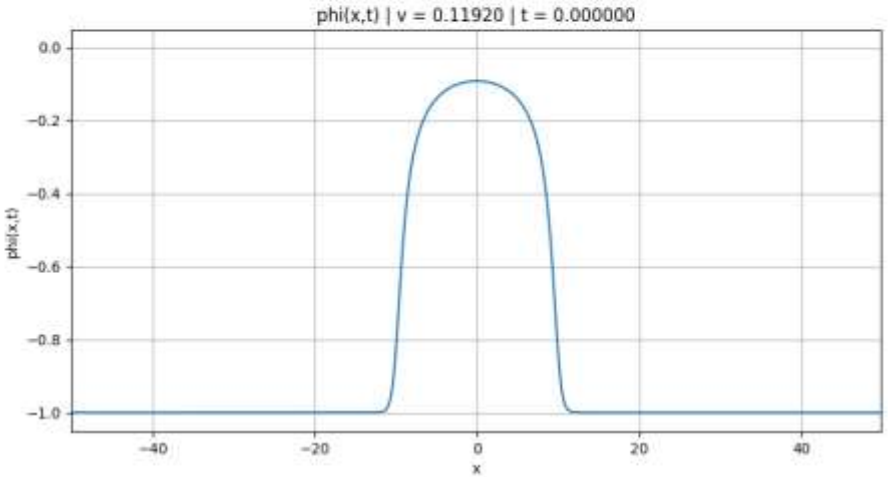
Полученный спектр после минимизации

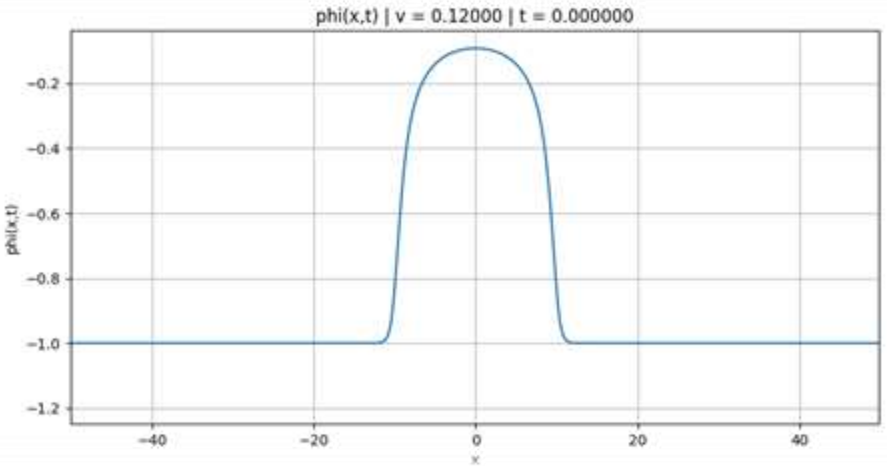


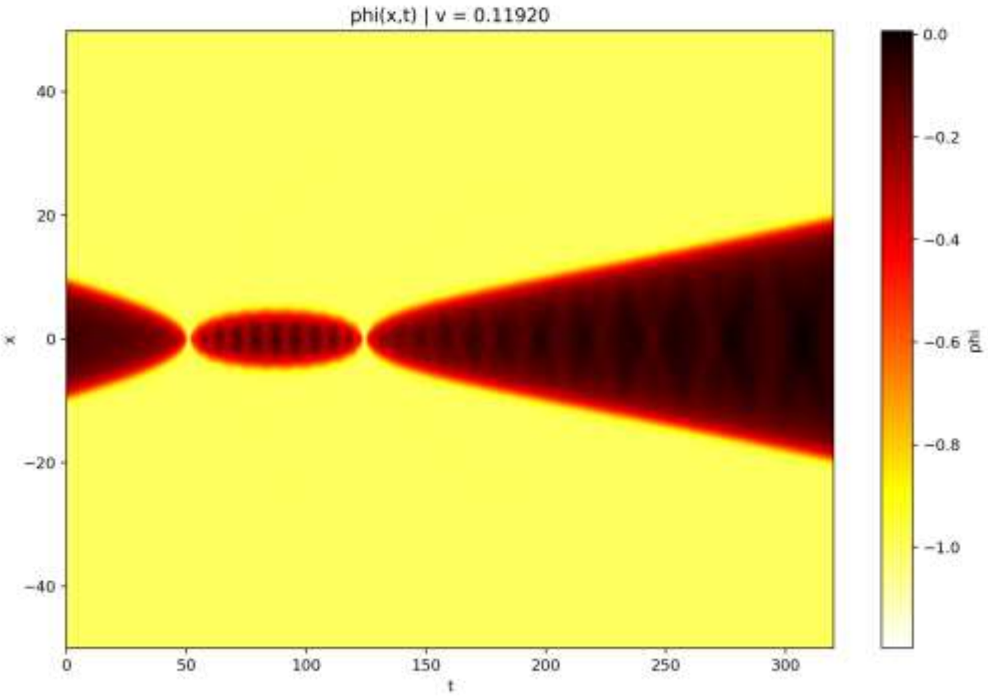
Полученный спектр при минимизации

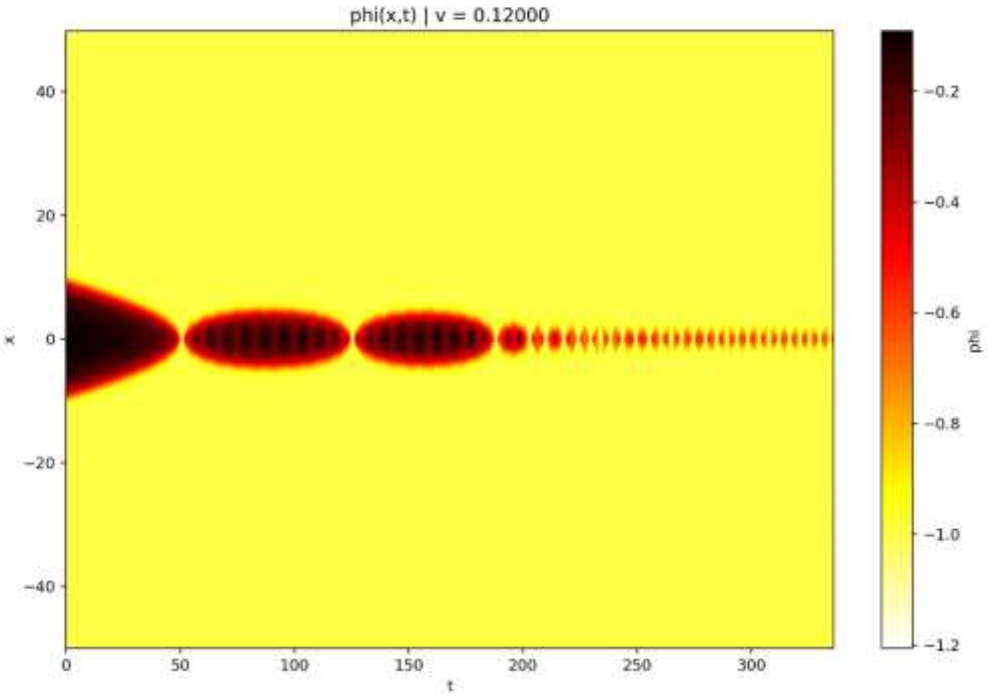


Столкновение кинков

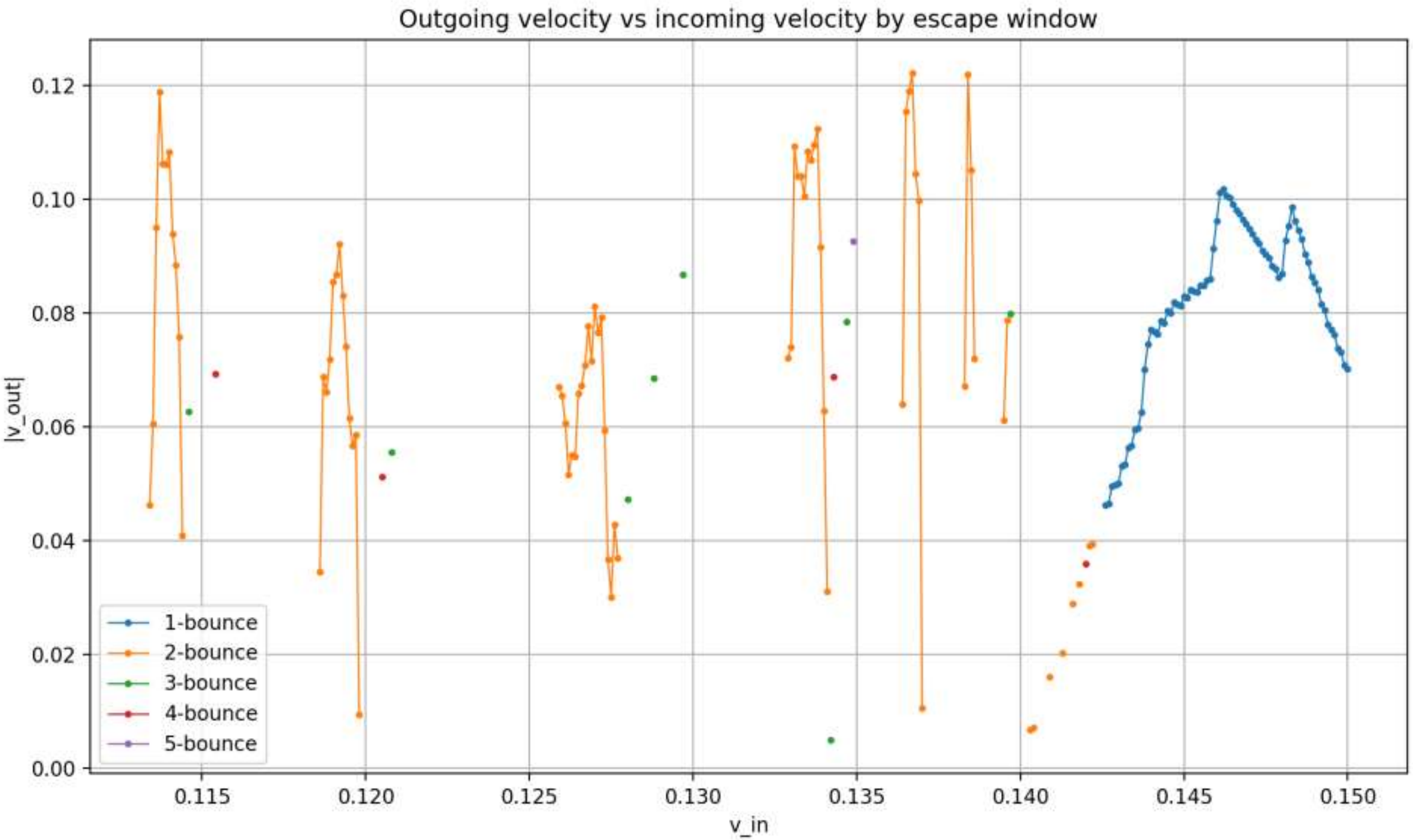




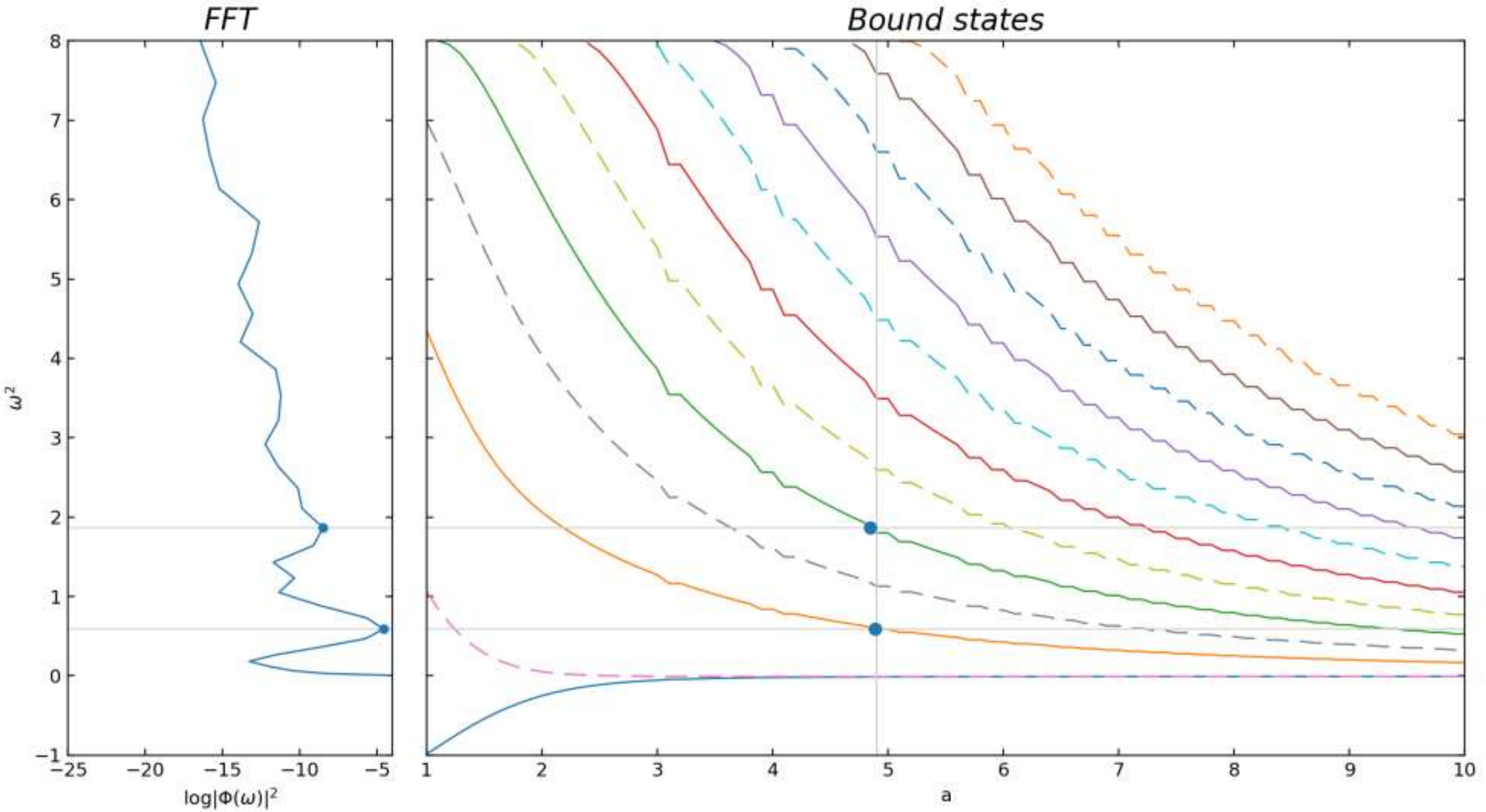




Окна столкновений



Спектральный анализ



Заключение

В работе рассмотрена задача о столкновениях кинка и антикинка в теоретико-полевой модели φ^8

- Рассмотрена задача о спектре малых возбуждений
- Получен набор дискретных собственных значений соответствующих локализованным модам ниже порога непрерывного спектра с учетом процедуры минимизации.
- Получена структура окон, найдена критическая скорость
- Проведен спектральный анализ, доказан переход энергии в колебательные моды после первого столкновения

Полученные результаты позволяют объяснить резонансные явления в модели φ^8. Помимо этого разработанные методы исследования могут быть в дальнейшем обобщены на другие модели со степенными ассимптотиками более высоких порядков.

MEPhI
National Research
Nuclear University

Спасибо за внимание!