

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования
«Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ»
в городе Алматы (АФ НИЯУ МИФИ)

УДК 539.1

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

Образование солитонных структур в инфляционных фазовых переходах в приближении массивного поля

Научный руководитель _____ Кириллов А.А.

Студент _____ Жамбыл Д.К.

Москва 2026

Содержание

1	Введение	2
1.1	Механизм образование РНД	3
2	Функция плотности вероятности с учетом классического движения поля	5
2.1	Приближение к случаю плоского потенциала	7
3	Динамика поля	10
3.1	Квантовое распывание безмассового поля	10
3.2	Динамика массивного поля	11
4	Заключение	14
5	Список Литературы	15

1 Введение

Современная космологическая теория хорошо объясняет множество явлений и процессов во всей Вселенной и на протяжении всей её истории, однако всё ещё остаются многочисленные наблюдательные данные, требующие объяснения и не укладывающиеся в рамки современной теории. Примером может служить факт того что при наблюдении скоплений галактик с помощью гравитационного линзирования, различие между наблюдаемой массой скопления и массой светящегося вещества, приводит к гипотезе о наличии дополнительной гравитирующей компоненты, скрытой массы (темная материя (DM)) в скоплениях. Мы знаем относительный вклад тёмной материи (DM) в плотность энергии современной Вселенной: $\Omega_{DM} \approx 27\%$ [1]

Данная гипотеза позволяет объяснить и множество других явлений, таких как движение звёзд на периферии галактик и др. Пока остаётся неясной природа тёмной материи (DM) (или скрытой массы (SM)), состоящей из небарионного вещества. Однако выдвигаются различные кандидаты на роль тёмной материи, такие как частицы тёмной материи [13] или первичные чёрные дыры (PHD) [4], также представляют интерес и гибридные модели. В рамках данной работы рассматривается подход к расчету массового спектра первичных черных дыр в ранней Вселенной. Как сказано выше, первичные черные дыры могут рассматриваться как кандидаты в скрытую массу, однако есть жесткие ограничения на массовый спектр таких черных дыр (см на рис. 1).

Красным отмечено ограничение по излучению Хокинга, синим ограничения по гравитационному линзированию и другие экспериментальные ограничения [4]. Но все еще остаются промежутки масс, которыми можно полностью объяснить темную материю первичными черными дырами. Таким образом, развитие подходов к расчету массового спектра черных дыр в рамках различных полевых теорий является крайне важным.

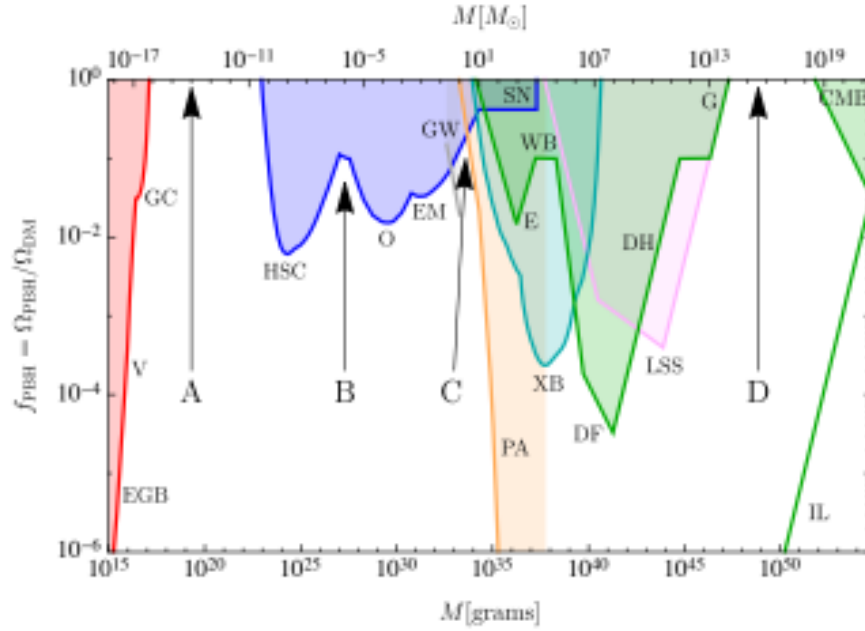


Рис. 1: Ограничения для РВН

1.1 Механизм образование РНД

Идея существования первичных чёрных дыр (ПЧД) впервые рассматривалась в работах Я. Б. Зельдовича и И. Д. Новикова [8], а затем получила развитие в работах С. Хокинга, Б. Карра и Г. Чаплина [9, 10, 11].

На данный момент на первичную природу чёрных дыр указывает целый ряд наблюдательных данных, в первую очередь — существование сверхмассивных чёрных дыр в центрах галактик, особенно в ранних квазарах.

Существует множество различных моделей образования первичных чёрных дыр, одной из которых является их образование за счёт коллапса замкнутых доменных стенок. Доменные стенки — это нетривиальные топологические конфигурации поля, возникающие в различных теориях поля при фазовых переходах.

В качестве наглядного примера рассмотрим скалярный потен-

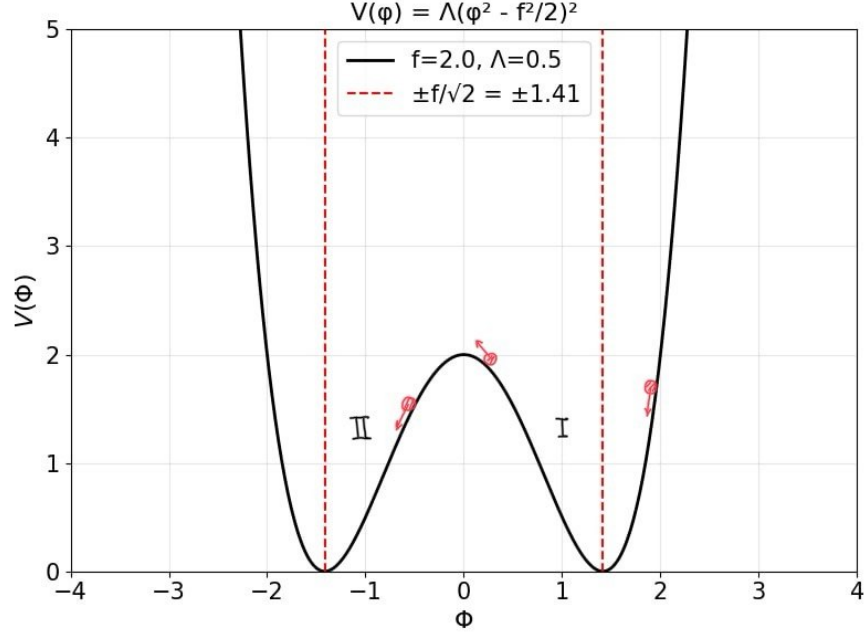


Рис. 2: Потенциал со скатывающимся полем

циал вида:

$$V(\phi) = \Lambda \left(\phi^2 - \frac{f^2}{2} \right)^2 \quad (1)$$

Лагранжиан соответствующего скалярного поля имеет вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \Lambda \left(\phi^2 - \frac{f^2}{2} \right)^2 \quad (2)$$

В этом потенциале имеются два вакуумных состояния:

$$\phi = +\frac{f}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \phi = -\frac{f}{\sqrt{2}}.$$

В результате переходов поля между данными вакуумными состояниями I и II (см. рис. 2, где ϕ откладывается в единицах $H = 10^{13}$ Gev на момент инфляций) образуются доменные стенки (не обязательно сферической формы) которые разделяют эти два вакуумных состояния. В дальнейшем за счёт поверхностного натяжения доменная стенка начинает сжиматься и приобретает всё

более сферическую форму, после того как энергия доменной стенки окажется внутри гравитационного радиуса образуется чёрная дыра [12].

2 Функция плотности вероятности с учетом классического движения поля

Рассматривая динамику поля, нужно понимать, что поле может переходить между вакуумами за счёт квантовых флуктуаций поля и как показано на рис. 2 (нарисовано красным), за счёт своего классического движения. Поэтому эволюцию поля можно описывать на языке вероятностей, учитывая его классическое движение, а также рассматривать его динамику по аналогии с диффузионным расплыванием. То есть уравнение, описывающее вероятность нахождения поля в данном состоянии и в данный момент времени, должно соответствовать стохастическому уравнению Фоккера–Планка.

В случае, когда учитываются только квантовые флуктуации, поле при своей эволюции не чувствует форму или вид потенциала. Его эволюция заключается в том, что оно расплывается с некоторой начальной точки Φ_u , и функция плотности распределения имеет вид [5][2]:

$$f(\phi, t) = \sqrt{\frac{2\pi}{H^3 t}} \exp\left(-\frac{2\pi^2(\phi - \phi_u)^2}{H^3 t}\right), \quad (3)$$

где явно расписана флуктуация

$$\sigma(t) = \frac{\sqrt{H^3 t}}{2\pi}. \quad (4)$$

Рассматривая действие со скалярным полем ϕ массой m (расчеты ведутся в системе единиц $\hbar = k_B = c = 1$), можно получить функцию плотности распределения вероятности с учетом класси-

ческого движения поля.

$$S = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g_4} [R + (\partial\Phi)^2 - m^2\Phi^2] \quad (5)$$

где, R - Скалярная кривизна, M_{pl}^2 - масса планка

Уравнение для поля, в пространстве де-Ситтера, имеет вид [2], [1]

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{3H} \left[e^{-2Ht} \Delta\Phi - \frac{\partial V(\Phi)}{\partial\Phi} \right] = y(t) \quad (6)$$

$$y(x, t) \equiv \left(-\frac{1}{3H} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{3H} e^{-2Ht} \Delta \right) Q(x, t).$$

где $Q(x, t)$, быстрая часть разложения Фурье-поля, подробнее можно посмотреть в [3] Как было выше, движение поля рассматривается как сумма двух составляющих, классического поля и квантового.

$$\Phi = \Phi_{\text{cl}} + \phi$$

Подставляя её в уравнения (2), получим соответственно уравнения движения для классического и квантового поля. Покажем это.

$$\frac{\partial(\Phi_{\text{cl}} + \phi)}{\partial t} - \frac{1}{3H} \left[e^{-2Ht} \Delta(\Phi_{\text{cl}} + \phi) - \frac{\partial V(\Phi_{\text{cl}} + \phi)}{\partial(\Phi_{\text{cl}} + \phi)} \right] = y(x, t)$$

$$\frac{\partial\Phi_{\text{cl}}}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{3H} \left[e^{-2Ht} (\Delta\Phi_{\text{cl}} + \Delta\phi) - \frac{\partial V}{\partial\Phi_{\text{cl}}} \Big|_{\Phi=\Phi_{\text{cl}}} - \frac{\partial^2 V}{\partial\Phi_{\text{cl}}^2} \Big|_{\Phi=\Phi_{\text{cl}}} \phi \right] = y(x, t)$$

Окончательно получим

$$\frac{\partial\Phi_{\text{cl}}}{\partial t} - \frac{1}{3H} \left[e^{-2Ht} \Delta\Phi_{\text{cl}} - \frac{\partial V(\Phi_{\text{cl}})}{\partial\Phi_{\text{cl}}} \right] = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{3H} \left[e^{-2Ht} \Delta\phi - V''(\Phi_{\text{cl}})\phi \right] = y(\mathbf{x}, t) \quad (8)$$

Проводя ту же процедуру как в [2], придем к функции распределения плотности вероятности поля.

$$f(\Phi, t) = \frac{dP(\Phi, t)}{d\Phi} = \sqrt{\frac{q^2}{\pi}} \exp \left[-q^2 (\Phi - \Phi_{cl}(t) - (\Phi_1 - \Phi_{cl}(t_1)) e^{-M(t)})^2 \right]. \quad (9)$$

$$q^2 \equiv \frac{1}{2\sigma^2 \sinh^2(M(t))} \int_{t_1}^{t_2} \mu^2(t) e^{2M(t)} dt.$$

$$\sigma = \frac{H^{3/2}}{2\pi}.$$

$$\mu = \frac{m^2}{3H} = \frac{V''(\Phi_{cl})}{3H}$$

$$M(t) = \int_{t_1}^t \mu(t) dt$$

Хорошо видно, что получается похожая функция распределения вероятности, как и в случае только квантовых флуктуаций (плоского потенциала), но отличие в выражении для флуктуаций: в показателе экспоненты стоит разность между критическим значением поля (то есть значением поля в точке перехода в другое вакуумное состояние) и значением поля при классическом движении в данный момент времени. Покажем, что данная формула (8) переходит в (3) при малости массы поля, т.е. $V'' \ll H^2$

2.1 Приближение к случаю плоского потенциала

Случай плоского потенциала: $\mu \ll H$ (в единицах параметра Хаббла: $\mu \ll 1$). Поэтому для интеграла в $q(t)$ будет справедливо

следующее приближение:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mu^2 e^{2M(t)} dt \simeq \int_{t_1}^{t_2} \mu^2 (1+2M(t)) dt = \int_{t_1}^{t_2} \mu^2 dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} \mu^2 M(t) dt \simeq \int_{t_1}^{t_2} \mu^2 dt.$$

Здесь пренебрегли слагаемым

$$\int_{t_1}^{t_2} \mu^2 M(t) dt \sim O\left(\left(\frac{\mu}{H}\right)^3\right).$$

Интереснее выглядит ситуация для гиперболического синуса. Здесь, применяя формулу Коши (вывод данной формулы можно найти в [6]), получим:

$$\begin{aligned} (\sinh M(t_2))^2 &\simeq M^2(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t) dt \int_{t_1}^{t_2} \mu(t) dt = \\ &\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^{t_2} dt \mu^2(t) = \frac{1}{(2-1)!} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (t-\tau) \mu^2(\tau) d\tau \simeq \\ &(t-\tau) \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu^2(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Очевидно, что параметр τ имеет размерность времени, и нет разницы в обозначениях интеграла, поэтому справедлива следующая запись:

$$q^2 = \frac{1}{2\sigma^2(\tau-t) \int_{t_1}^{t_2} \mu^2(t) dt} \int_{t_1}^{t_2} \mu^2 dt = \frac{1}{2\sigma^2(\tau-t)}. \quad (10)$$

Подставляя полученное в уравнение (9), полагая $(\tau - t) = \Delta t$, явно раскрывая σ , а также устремляя к нулю Φ_{cl} , получим классическую формулу для плотности вероятности распределения поля:

$$f(\Phi, \Delta t) = \sqrt{\frac{2\pi}{H^3 \Delta t}} \exp\left(-\frac{2\pi^2(\Phi - \Phi_u)^2}{H^3 \Delta t}\right). \quad (11)$$

Заодно получим и уравнение для функции плотности распределения. Для простоты переобозначим $\Phi(t)$ в $\phi(t)$:

$$f(\phi(t), t) = \frac{q}{\sqrt{\pi}} \exp\left\{-q^2 \left(\phi - \phi_0 e^{-M(t)}\right)^2\right\} = \frac{q}{\sqrt{\pi}} e^{-q^2 \alpha^2}, \quad (12)$$

где

$$\alpha = \phi - \phi_0 e^{-M(t)}.$$

Далее, вычисляя производные по полю ϕ и времени от функции плотности распределения вероятности, получим:

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = \frac{q}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 q^2} (-2\alpha q^2) = -2\alpha q^2 f.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = -2q^2 f - 2\alpha q^2 \frac{\partial f}{\partial \phi} = -2q^2 f + 4\alpha^2 q^4 f = f (4\alpha^2 q^4 - 2q^2). \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\dot{q}}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 q^2} + \frac{q}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 q^2} \left(-2q\dot{q}\alpha^2 - 2\alpha\dot{\alpha}q^2\right) = \\ &= f \left(\frac{\dot{q}}{q} - 2q\alpha(\dot{q}\alpha + \dot{\alpha}q)\right). \end{aligned}$$

Откуда находим:

$$f = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{1}{\frac{\dot{q}}{q} - 2q\alpha \partial_t(q\alpha)}. \quad (14)$$

Подставляя в (13), получим классическое уравнение Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{1}{D(\phi, t)}.$$

Где $D(\phi, t)$ — коэффициент диффузии:

$$\frac{1}{D(\phi, t)} = \frac{4\alpha^2 q^4 - 2q^2}{\dot{q} - 2q\alpha \partial_t(q\alpha)}.$$

В приближении плоского потенциала, как было показано выше, флуктуации становятся

$$q \simeq \frac{1}{\sqrt{2}\sigma t^{1/2}},$$

соответственно,

$$\dot{q} = -\frac{1}{2\sqrt{2}\sigma t^{3/2}},$$

и

$$\alpha \simeq \phi \ll 1.$$

Учитывая всё это и пренебрегая бесконечно малыми высших порядков, получим:

$$\frac{1}{D} \simeq -\frac{1}{\sigma^2 t}(-2t) = \frac{2}{\sigma^2} = \frac{8\pi^2}{H^3}.$$

Окончательно получаем:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \cdot \frac{H^3}{8\pi^2} = \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (15)$$

3 Динамика поля

3.1 Квантовое расплывание безмассового поля

Рассмотрим поведение безмассового поля (под массой поля понимается выпуклость либо вогнутость потенциала в рассматриваемой точке) в потенциале вида (1). Как было сказано выше, функция плотности вероятности найти поле со значением Φ в момент

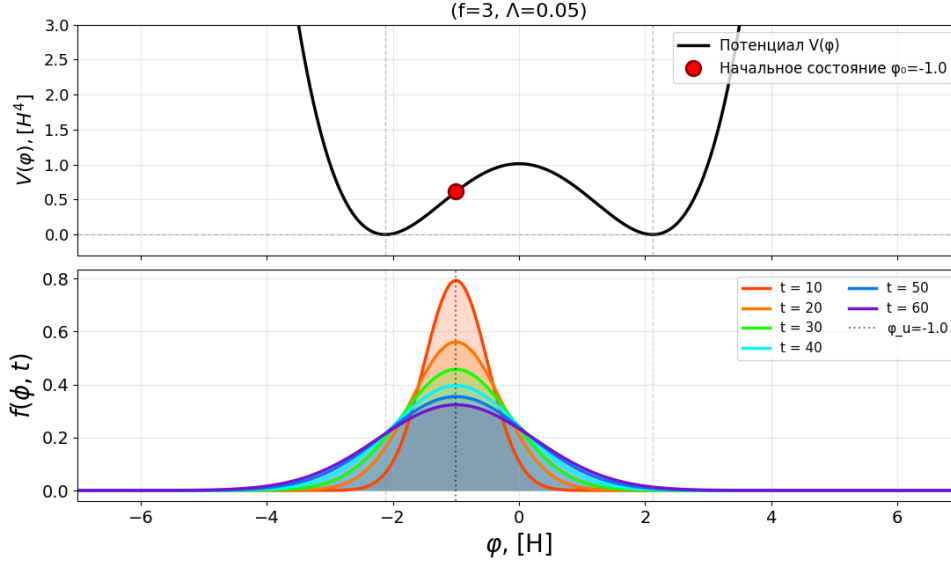


Рис. 3: Квантовая эволюция безмассового поля

времени t задаётся формулой (3). При такой эволюции существенную роль играют только квантовые флуктуации, так как их величина значительно больше, чем вклад массы поля $m \ll \sigma$. Поэтому можно пренебречь классической динамикой поля.

На рисунке 3, изображено начальное состояние поля и его расплывание за счёт флуктуаций за разное количество e-folds (в системе $H = 1$, $t = N_{\text{e-folds}}$). Очевидно, что если описывать динамику поля только в приближении безмассового поля, будет сильное перепроизводство доменных стенок, так как рано или поздно поле перескочит через пик потенциала из-за того, что флуктуации поля также растут со временем, и поле вскоре окажется в другом вакуумном состоянии. Ниже приведён график с вероятностью и спектром масс PHD, образующихся в данном приближении.

3.2 Динамика массивного поля

В случае, когда $m \sim \sigma$, используется формула (12), где Φ_{cl} есть решение уравнения:

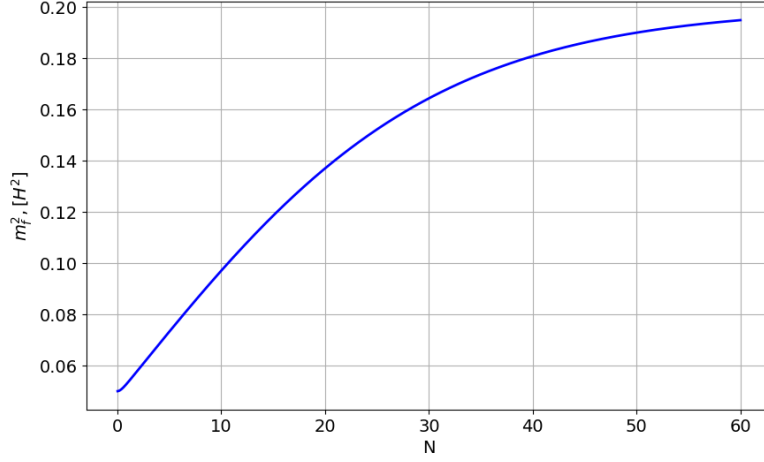


Рис. 4: Зависимость массы поля от времени ($f = 10, \Lambda = 0.0005, \Phi_u = -5$)

$$\ddot{\Phi}_{cl} + 3H\dot{\Phi}_{cl} + 4\Lambda\left(\Phi_{cl}^2 - \frac{f^2}{2}\right)\Phi_{cl} = 0$$

Надо также заметить важный момент: масса поля не является фиксированной, она зависит от времени, что на самом деле является очевидным фактом (см. рис. 4).

$$\mu = \frac{m^2(t)}{3H} = \frac{V''(\Phi_{cl})}{3H} = \frac{4\Lambda[3\Phi_{cl}^2(t) - \frac{f^2}{2}]}{3H}$$

Поэтому в разные моменты времени она может принимать различные значения, как сравнимые с флуктуациями поля, так и меньшие их. Поэтому корректнее применять гибридный подход к описанию динамики поля.

На рисунке 5 изображена классическая траектория поля на потенциале, поле скатывается к минимуму, также присутствуют и квантовые флуктуации поля, за счет которых поле может оказаться в другом вакууме и образуется доменная стенка, но эти флуктуации могут как подавляться, так и усиливаться за счет формы потенциала и классической траектории поля (см. рис. 6),

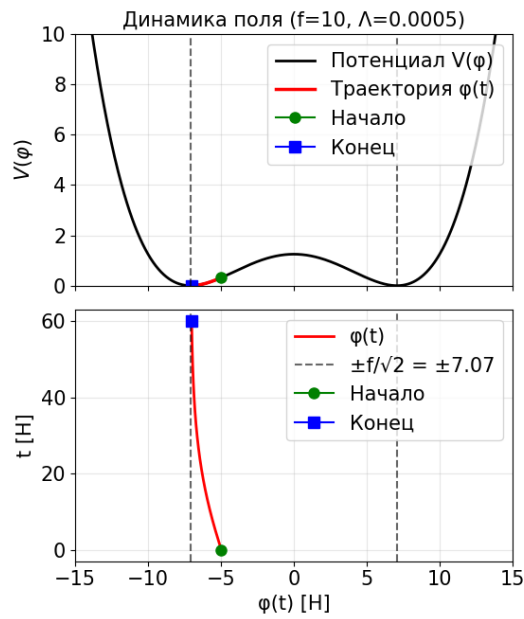


Рис. 5: Динамика массивного поля

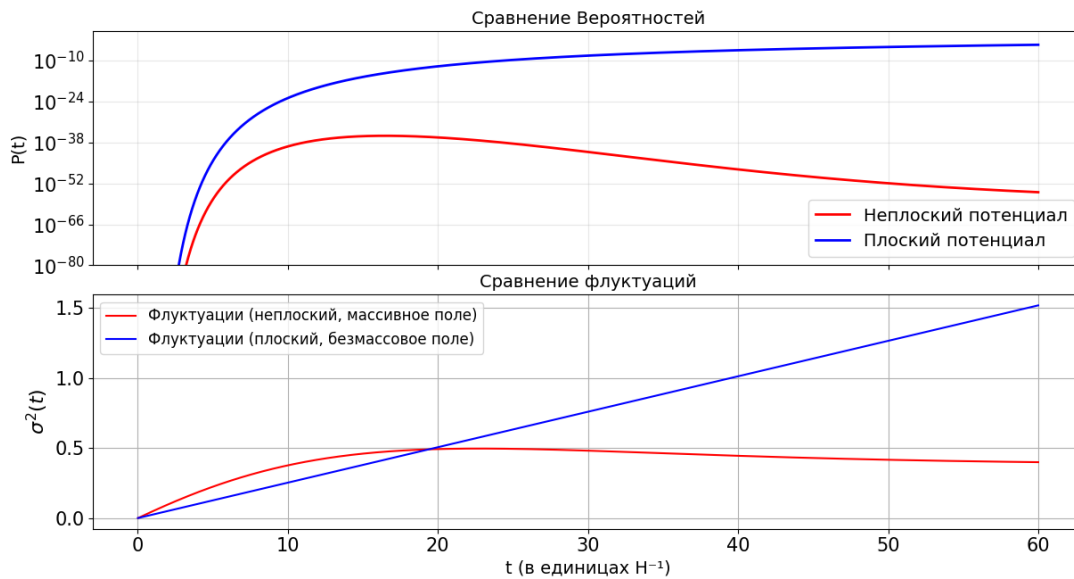


Рис. 6: Флуктуации и вероятности поля

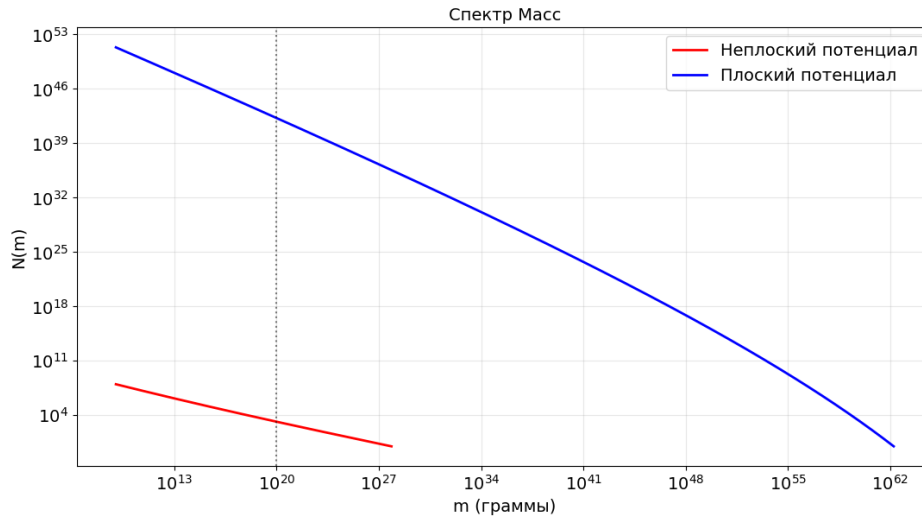


Рис. 7: Спектр Масс PHD

и эти корреляции существенны, ими можно подавлять перепроизводство доменных стенок, следовательно, и черных дыр, которые получаются при приближении плоского потенциала (см. рис. 7).

4 Заключение

Анализ функции распределения показывает, что форма потенциала и классическая траектория поля существенно влияют на вероятность переходов между вакуумными состояниями. В зависимости от параметров модели квантовые флуктуации могут как усиливаться, так и подавляться. Это приводит к изменению вероятности образования доменных стенок и, следовательно, влияет на массовый спектр первичных чёрных дыр.

Таким образом, учёт корреляции между классическим движением поля и квантовыми флуктуациями позволяет более точно описывать процессы формирования первичных чёрных дыр в ранней Вселенной и может играть важную роль при построении реалистичных моделей скрытой массы.

5 Список Литературы

1. Горбунов Д. С., Рубаков В. А. Введение в теорию ранней Вселенной. – Учреждение Российской академии наук Ин-т ядерных исследований РАН, 2009.
2. Alexander A. Kirillov, Sergey G. Rubin "On mass spectra of primordial black holes" [arXiv:2109.02446](https://arxiv.org/abs/2109.02446) [astro-ph.CO]
3. M. Y. Khlopov and S. G. Rubin, Cosmological pattern of microphysics in the stationary universe (Kluwer Academic Publishers, P.O. Box 17, 3300 AA Dordrecht, The Netherlands, 2004).
4. Bernard Carr, Florian Kuhnel "Primordial Black Holes as Dark Matter: Recent Developments" [arXiv:2006.02838](https://arxiv.org/abs/2006.02838) [astro-ph.CO]
5. Линде А. Д. Физика элементарных частиц и инфляционная космология. – Наука, 1990.
6. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – 1959.
7. Горбунов Д. С., Рубаков В. А. Введение в теорию ранней Вселенной: Космологические возмущения. Инфляционная теория // М.: КРАСАНД. – 2010.
8. Zel'dovich Y. B., Novikov I. D. The Hypothesis of Cores Retarded during Expansion and the Hot Cosmological Model // Sov. Astron. 1967. T. 10. C. 602.
9. Hawking S. Gravitationally collapsed objects of very low mass // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1971. T. 152. C. 75
10. Hawking S. W. Black hole explosions? // Nature. 1974. T. 248, №5443. C. 30–31.
11. Hawking S. W. Particle creation by black holes // Commun. Math. Phys. 1975. T. 43, № 3. C.199–220.

12. Belotsky K. M., Dokuchaev V. I., Eroshenko Y. N., Esipova E. A., Khlopov M.Y., Khromykh L.A., Kirillov A.A., Nikulin V.V., Rubin S.G., Svadkovsky I. V. Clusters of Primordial Black Holes // Eur. Phys. J. C. 2019. Vol. 79, no. 3. P. 246. arXiv:1807.06590 [astro-ph.CO]
13. Axions and Other Similar Particles Revised PDG C.A.J. O'Hare (Sydney U.), G. Rybka (U. Washington), B. Safdi (UC Berkeley) and L. Winslow (MIT)