

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»»

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ЭВОЛЮЦИИ СЕТИ ДОМЕННЫХ СТЕНОК

Научный руководитель
(проф., д.ф-м.н.)

_____ М. Ю. Хлопов

Студент

_____ И. В. Грачев

Москва 2026

Содержание

Введение	3
Теоретические основы эволюции доменных стенок	3
Добавление возмущения	4
Генерация гравитационных волн	4
Практическая часть	7
Численное моделирование в CosmoLattice	7
Результаты	8
Заключение	15
Список литературы	16

ВВЕДЕНИЕ

Теоретические основы эволюции доменных стенок

В ходе космологических фазовых переходов, сопровождающихся спонтанным нарушением симметрии возникают различные космологические дефекты. Рассматриваемые доменные стенки образуются в моделях со спонтанным нарушением дискретной симметрии. Такие модели включают набор вещественных скалярных полей ϕ_i с лагранжианом:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_i)^2 - V(\phi_i), \quad (1)$$

где потенциал $V(\phi_i)$ имеет дискретный набор вырожденных минимумов.

В данной работе исследуется формирование сети доменных стенок на стадии радиационного доминирования (рд-стадии) с одним скалярным полем со спонтанным нарушением Z_2 симметрии- топологический дефект, известный как ϕ^4 -кинк, возникающий если выбрать потенциал V :

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - \eta^2)^2, \quad (2)$$

где λ - постоянная самодействия, η - вакуумное ожидаемое значение. Потенциал изображен на рисунке 1. В данном потенциале поле имеет два ожидаемых равновесных состояния: $\phi = \eta$ и $\phi = -\eta$, в ходе случайных флуктуаций поле переходит в один из этих минимумов, а так как флуктуации различны в разных областях пространства, то возникают ситуации, когда соседние объёмы попадают в противоположные минимумы. Тогда между ними как граница образуется кинк- доменная стенка.

Для данной модели известно точное статическое решение [1]:

$$\phi(z) = \eta \tanh \left(\left(\frac{\lambda}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \eta z \right) \quad (3)$$

Физическая толщина такой стенки приблизительно равна:

$$\delta \simeq (\sqrt{\lambda} \eta)^{-1} \quad (4)$$

Поверхностное натяжение:

$$\sigma = \int T_{00} dz = \int (\phi')^2(z) dz = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\lambda} \eta^3 \quad (5)$$

Добавление возмущения

При расширении Вселенной сеть стабильных стенок выходит на режим скейлинга (самоподобия), достигает релятивистских скоростей и в какой то момент их характерный масштаб становится сравнимым с горизонтом. Вклад стенок в плотность энергии Вселенной:

$$\rho_w \sim \frac{\sigma R^2}{R^3} \sim \sigma H, \quad (6)$$

то есть плотность энергии сети доменных стенок пропорциональна параметру Хаббла, в то время как плотность энергии других компонент, подчиняющихся уравнениям Фридмана квадрату параметра Хаббла. Таким образом, в расширяющейся Вселенной с уменьшением параметра Хаббла доменные стенки начинают доминировать в плотности энергии Вселенной, что привело бы к противоречию с наблюдательными данными, например изотропии реликтового излучения. Одно из решений этой проблемы представлено в работе [2]. Другим решением является введение незначительного возмущения, явно нарушающего Z_2 симметрию, которое привело бы к распаду сети доменных стенок и сформировало бы излучение, которое можно было бы пронаблюдать[3]. В данной работе введен линейный член, нарушающий симметрию:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - \eta^2)^2 + \epsilon\eta^3\phi, \quad (7)$$

где $\epsilon > 0$ - малый параметр. Вид потенциала со смещением изображен на рисунке 1. Симметрия вакуумов нарушается. Глобальным и предпочтительным минимумом становится $\phi \approx -\eta$ с потенциалом $V(-\eta) = -\epsilon\eta^4$. Разность энергий $V_{bias} = \Delta V \approx 2\epsilon\eta^4$ создает давление, стремящееся расширить истинный вакуум за счет ложного. Коллапс наступает, когда давление превышает поверхностное натяжение, что дает время коллапса:

$$t_{ann} \sim \frac{1}{V_{bias}} \sim \epsilon^{-1} \quad (8)$$

Генерация гравитационных волн

В процессе эволюции и последующего распада доменных стенок из-за столкновения, аннигиляции огромных пространственных структур, дефектов, при

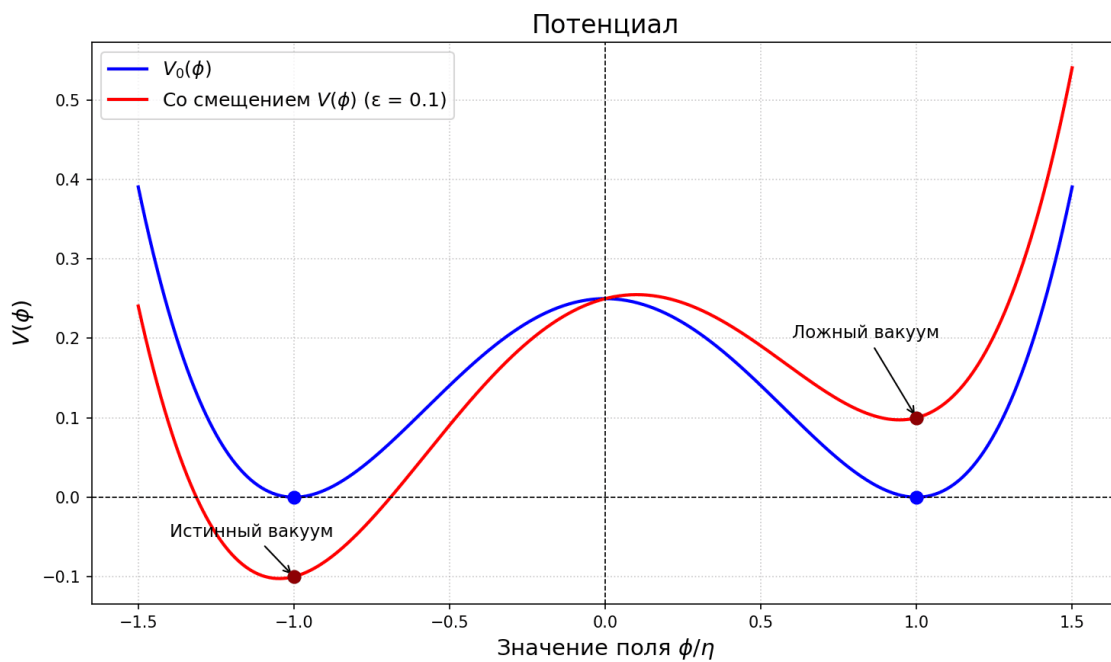


Рисунок 1

распаде возникают квадрупольные переменные моменты тензора энергии- импульса, что согласно квадрупольной формуле для мощности гравитационного излучения $P \sim G \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij}$, где Q_{ij} - квадрупольный момент доменных стенок, порождает сильный стохастический фон гравитационных волн. В работе [4] получено:

Плотность энергии гравитационных волн от доменных стенок в режиме скейлинга, когда $\rho_w = A \frac{\sigma}{t}$ (A- почти постоянный параметр):

$$\rho_{gw} \sim GA^2 \sigma^2 \quad (9)$$

Безразмерный спектр мощности гравитационных волн на логарифмический интервал сопутствующих импульсов:

$$\Omega_{gw}(k, \tau) = \frac{1}{\rho_c(\tau)} \frac{d\rho_{gw}}{d(\ln k)}, \quad (10)$$

что может быть использовано для сравнения результатов моделирования с данными гравитационно-волновых детекторов.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Численное моделирование в CosmoLattice

Численное моделирование эволюции сети доменных стенок было произведено при помощи CosmoLattice [5, 6] на решетке 1024^3 . Моделирование происходит в программных единицах (обозначены с тильдой): $t \rightarrow \tilde{\eta}$, $x^i \rightarrow \tilde{x}^i$, $\phi \rightarrow \tilde{\phi}$. Преобразование физических единиц в программные происходит следующим образом:

$$\tilde{\phi} \equiv \frac{\phi}{f_*}, \quad d\tilde{\eta} \equiv a^{-1}w_*dt, \quad d\tilde{x}^i \equiv w_*dx^i, \quad (11)$$

где w_* , f_* - константы размерности энергии. Для рассматриваемой модели ϕ^4 -кинка выбраны: $f_* = \eta$, $w_* = \sqrt{\lambda}\eta$.

Так как рассматривается рд-стадия, то:

$$a(t) \sim \sqrt{t} \quad (12)$$

Для удобства выбрано: $\tilde{\eta}_i = 1$, $a(\tilde{\eta}_i) = 1$, $H(\tilde{\eta}_i) = 1$,

где $\tilde{\eta}_i$ - начальное время симуляции в программных единицах. Подставляя это в 12, получаем: $a(\tilde{\eta}) = \tilde{\eta}$, $H = \frac{\dot{a}}{a} \rightarrow H(\tilde{\eta}) = \frac{1}{\tilde{\eta}^2}$.

Два условия, которые необходимы для успешной симуляции и избежания численных артефактов: 1)Толщина стенок должна оставаться больше размера между соседними ячейками решетки (возьмём с запасом в $\sqrt{2}$ раз; 2)Размер горизонта не должен превышать размер симулируемой решетки. Считая, что оба условия нарушаются в один момент, найдем финальное время симуляции $\tilde{\eta}_f$. Ширина стенок: $\delta_w = (\sqrt{\lambda}\eta)^{-1}$. Расстояние между соседними ячейками: $\frac{2L_i}{N} \frac{a(\tau_f)}{a(\tau_i)}$, L_i - начальный физический размер решетки. $L_i = \frac{2\pi}{k_{IR}}$ Переходя к программным единицам, получаем:

$$1) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}\eta} \sqrt{\lambda}\eta > \frac{4\pi}{k_{IR}N} \frac{\tilde{\eta}_f}{\tilde{\eta}_i};$$

$$2) R_{hor}(\tilde{\eta}_f) = \frac{1}{H_f} = \tilde{\eta}_f^2 < \frac{2\pi}{k_{IR}} \frac{\tilde{\eta}_f}{\tilde{\eta}_i}$$

Решая совместно два неравенства, получаем, что минимальный инфракрасный безразмерный момент равен:

$$k_{IR} = \sqrt{\frac{8\pi^2}{\sqrt{2}N}} = 0.23 \quad (13)$$

Максимальное допустимое время симуляции:

$$\tilde{\eta}_f = 26 \tag{14}$$

В качестве начальных условий системы выбраны квантовые вакуумные флуктуации около нулевого значения поля, вшитые в код CosmoLattice. Для того, чтобы отследить возможное появление артефактов численных симуляций были проведены симуляции до $\tilde{\eta}_f = 26$ и $\tilde{\eta}_f = 11$. Для отсеечения артефактов в ультрафиолетовой области обрез спектра флуктуаций выбран: $k_{cut} = 1.0$

Результаты

В данном разделе речь идет о программных единицах, если не указано другое. Программное время ниже обозначено как τ .

Получены снимки сети доменных стенок в различные моменты симуляции. На рисунке 2 представлена эволюция сети при $\epsilon = 0$. На рисунке 3 представлена эволюция сети при $\epsilon = 0.02$. Как видно к моменту $\tau = 3$ сеть уже сформирова-

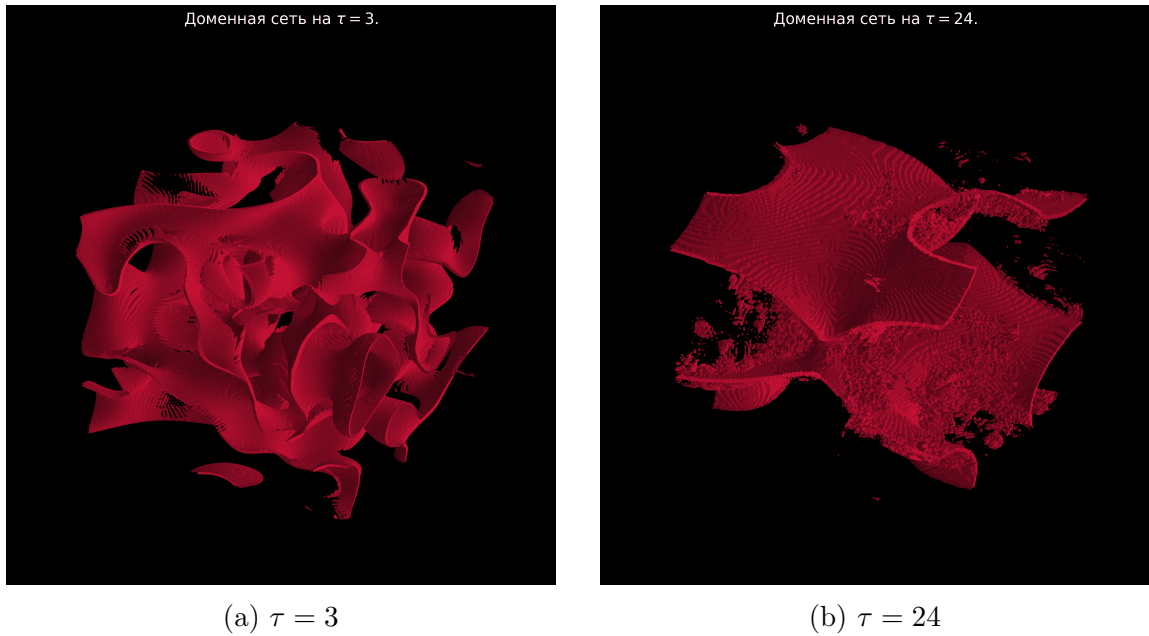
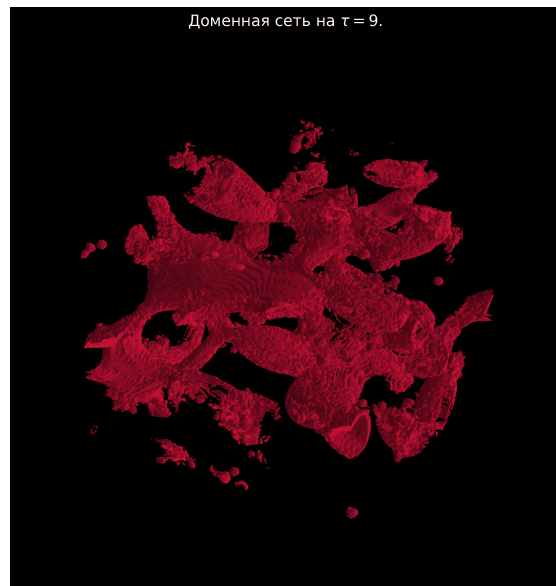


Рисунок 2 — Эволюция сети доменных стенок с $\epsilon = 0$

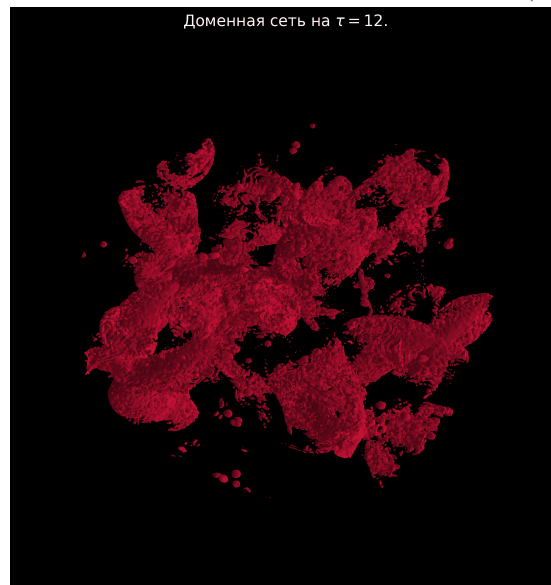
лась, а к моменту $\tau = 24$ достигла скейлинга, так как присутствует одна большая



(a) $\tau = 6$



(b) $\tau = 9$



(c) $\tau = 12$

Рисунок 3 — Эволюция сети доменных стенок с $\epsilon = 0.02$

открытая стенка на весь объем симуляции. Также наблюдается некоторое количество маленьких закрытых стенок. Как видно с появлением возмущения сеть, уже сформировавшаяся к $\tau = 6$ распадается уже к $\tau = 12$.

Также для исследования эволюции сети проведен анализ пространственно усредненной градиентной энергии поля ($E_G = (\nabla\phi)^2$). Поскольку стенки представляют собой локализованные градиенты поля, величины градиентной энергии прямо пропорциональна суммарной площади сети в сопутствующем объеме. Для фиксации распада сети был также построен график отношения градиентной энергии в сети со смещением к градиентной энергии сети без смещения от времени. Также так как в режиме скейлинга

$$\rho_w \sim t^{-1} \implies E_G \sim t^{-1} \implies E_G \sim \tau^{-2} \quad (15)$$

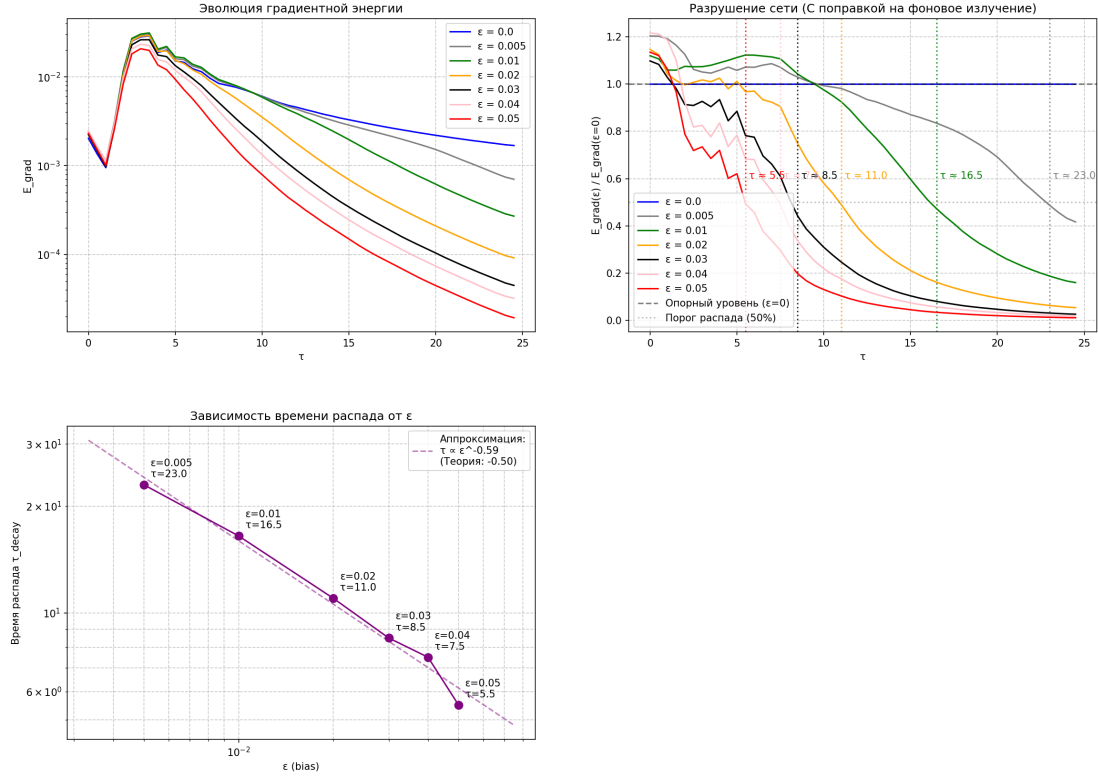


Рисунок 4 — Анализ градиентной энергии сети для симуляции с $\tau_f = 26$

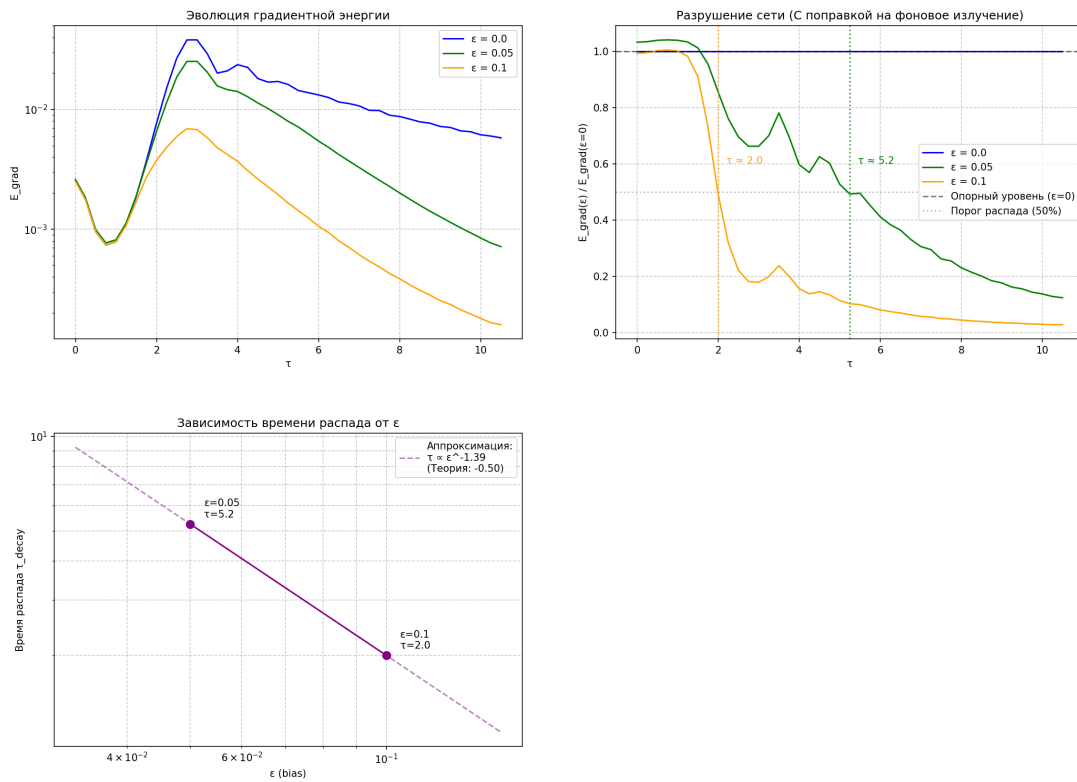


Рисунок 5 — Анализ градиентной энергии сети для симуляции с $\tau_f = 11$

Распад сети определен по моменту падения относительной градиентной энергии сети со смещением ниже 0.5 от сети без смещения. Построен также график зависимости времени распада от величины возмущения. Согласно теории $8 t_{ann} \sim \epsilon^{-1}$. Так как согласно 11, $dt = ad\tau$ и как было получено $a(\tau) = \tau \implies t \sim \tau^2 \implies \tau_{ann} \sim \epsilon^{-\frac{1}{2}}$. Согласно данным симуляции получено, что для симуляции с $\tau_f = 26$ $\tau_{ann} \sim \epsilon^{-0.59}$, то есть теоретическое предсказание выполняется достаточно хорошо.

Для короткой же симуляции с $\tau_f = 11$ получено, что $\tau_{ann} \sim \epsilon^{-1.39}$, но это объясняется выбором больших возмущений для такой симуляции и тем, что из-за этого сеть не успевала выйти на режим скейлинга и распадалась до того, как "забывала" начальные условия и выходила на режим самоподобия. В целом же никаких различий для разных времен не наблюдается, что свидетельствует о чистоте проведенных симуляций и отсутствии численных артефактов. Также построен график эволюции уравнения состояния сети стенок и среднего значения поля, где дно истинного вакуума смещено в ноль. Для чистой рд-стадии

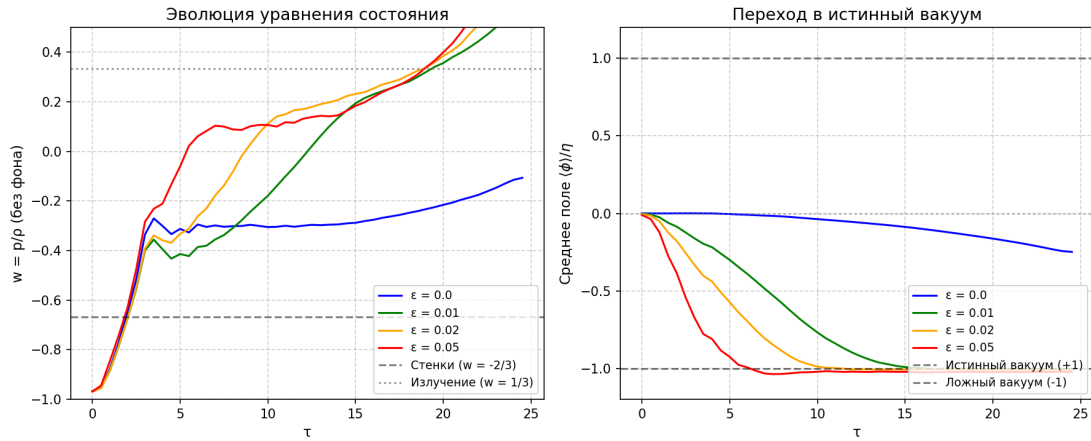


Рисунок 6 — Термодинамическое отражение распада сети

характерно уравнение состояния: $w = \frac{p}{\rho} = \frac{1}{3}$. Для сети доменных стенок, так как в безразмерных единицах в CosmoLattice $\rho = E_K + E_G + V$, а $p = E_K - \frac{1}{3}E_G - V$, кинетическая энергия стенок мала, а градиентная и потенциальная энергии примерно равны, характерно $w = -\frac{2}{3}$. На графике 6 отлично наблюдается переход от доминирования сети доменных стенок к фазе излучения. До момента распада w постепенно выходит к значению, чуть больше ожидаемого $w = -\frac{2}{3}$ для сети доменных стенок из-за того, что присутствует также и излучение, после чего сеть распадается, w постепенно растет и выходит на плато чуть ниже $w = \frac{1}{3}$.

Дальнейший же рост на больших временах является ультрафиолетовым артефактом численных симуляций. Невозмущенная же сеть все время остается около $w = -\frac{1}{3}$, что естественно при отсутствии распада. Также на этом графике отражено смещение среднего значения поля по объёму от 0, что соответствует стабильной сети к одному из вакуумов, который становится истинным при добавлении возмущения.

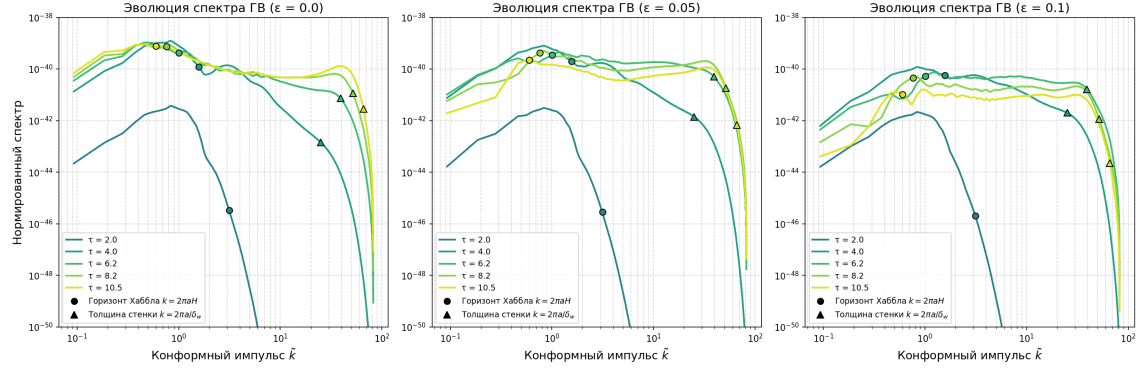


Рисунок 7 — Спектр гравитационных волн, сгенерированных сетью доменных стенок с возмущением и без.

На рисунке 7 представлена эволюция спектров гравитационных волн, сформированных сетью доменных стенок. Спектры получены путем пространственного усреднения тензорных возмущений метрики, вычисляемых CosmoLattice. Из графика видно, что амплитуда гравитационных волн невозмущенной сети растет на протяжении всего времени симуляции. Для сетей с возмущением можно наблюдать что амплитуда спектра растет лишь до момента распада сети, после чего убывает. Это означает, что после распада сети гравитационные волны фактически перестают генерироваться, испытывая в дальнейшем лишь красное смещение, а значит могут быть зафиксированы детекторами в настоящее время по определенному спектру. В целом вид спектра согласуется с ожиданиями: виден инфракрасный хвост, возникающий из-за волн с длинами, превышающими размеры причинно- связанной области, главный пик, находящийся вблизи точки, отмеченной кругом и ультрафиолетовый пик, вблизи треугольного маркера, который является численным артефактом, связанным с тем, что после распада стенок их толщина становится меньше размеров между ячейками решётки и главный пик на импульсах несколько меньше 1, соответствующий генерации гравитационных волн от стенки масштабов размера горизонта. Круглым маркером на графике обозначен безразмерный импульс, соответствующий длинам

волн от стенок масштаба размера горизонта: $\tilde{k}_{hor} = ak = a \frac{2\pi}{\lambda_{hor}} \approx 2\pi aH$, так как $\lambda \sim L$ - длина волны излучения пропорциональна размерам источника излучения. Треугольным маркером на графике обозначен безразмерный импульс, соответствующий длинам волн порядка толщины стенок.

Вертикальная ось графика отражает безразмерную плотность энергии гравитационных волн в программных единицах. Порядки в $10^{-50} - 10^{-38}$ обусловлены множителем $(\frac{f_*}{m_p})^4$, где f_* - характерный энергетический масштаб модели 11, а m_p -планковская масса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения работы было проведено успешное численное моделирование эволюции сети доменных стенок в ранней Вселенной на стадии радиационного доминирования в среде CosmoLattice. На основе анализа полученных данных подтвержден выход сети доменных стенок без возмущения на скейлинговый режим, когда на горизонт приходится одна большая открытая стенка, а градиентная энергия сети убывает по предсказанному закону 15, что подтверждает корректность выбора параметров решётки, начальных условий и проведенной симуляции.

Доказана эффективность механизма аннигиляции стенок при добавлении малого возмущения, нарушающего Z_2 - симметрию. Установлено, что зависимость конформного времени распада от величины возмущения $\tau_{ann} \sim \epsilon^{-0.59}$ находится в хорошем соответствии с теоретическим предсказанием $\tau_{ann} \sim \epsilon^{-\frac{1}{2}}$.

Отслежена эволюция макроскопического уравнения состояния системы $w = \frac{p}{\rho}$ от режима доминирования сети доменных стенок к фазе доминирования излучения с характерными значениями w .

Получены спектры гравитационных волн, генерируемых сетью доменных стенок. Подтверждено, что генерация гравитационных волн прекращается при распаде сети стенок, формируя замороженный реликтовый фон, который можно было бы наблюдать в настоящее время. Полученные безразмерные спектры гравитационных волн при определении энергетического масштаба сети доменных стенок могут быть сравнены со спектрами, наблюдаемыми детекторами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Vilenkin, A. Vilenkin и E. Shellard. *Cosmic strings and other topological defects*. Cambridge University Press, 1994.
- [2] J. Garriga, A. Vilenkin и J. Zhang. «Black holes and the multiverse». В: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2016.02 (2016), с. 064—064.
- [3] A. Vilenkin. «Gravitational field of vacuum domain walls and strings». В: *Physical Review D* 23.4 (1981), с. 852.
- [4] K. Saikawa. «A review of gravitational waves from cosmic domain walls». В: *Universe* 3.2 (2017), с. 40.
- [5] D. G. Figueroa и др. «The art of simulating the early universe. Part I. Integration techniques and canonical cases». В: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2021.04 (2021), с. 035.
- [6] D. G. Figueroa и др. «CosmoLattice: A modern code for lattice simulations of scalar and gauge field dynamics in an expanding universe». В: *Computer Physics Communications* 283 (2023), с. 108586.