Модификация энергетической ширины аннигиляции кваркония в кварк-антикварковом термостате в магнитном поле

Зеленев В. С., студент 3 курса ИЯФиТ НИЯУ МИФИ

Научный руководитель:
Кошелкин А. В., д.ф.-м.н., доц., проф. каф. №6 НИЯУ МИФИ

Москва, 2026

Астрофизическое введение: магнитары и коллапсары

Кварконизация в недрах массивных нейтронных звёзд:

- Второй фазовый переход в плотной QCD-материи (деконфайнмент)
- Критическая плотность $\rho_c \sim 2 - 3\rho_0$; поля в ядре $B \sim 10^{17} - 10^{19}$ Гс

Два сценария проявления аннигиляции $q\bar{q}$:

- *Спокойный*: стабильные магнитары, $T \sim 10 - 50$ МэВ; нейтринное охлаждение (сходства с URCA-процессом)
- *Катастрофический*: коллапсары (задержанный коллапс / слияния НЗ), $T \sim 100 - 300$ МэВ; лавинная аннигиляция

Наблюдательные проявления (multi-messenger):

- Гамма-всплески (GRB), быстрые радиовсплески (FRB), нейтрино высоких энергий, гравитационные волны

Лабораторный аналог: тяжёлоионные столкновения RHIC/LHC, $B \sim 10^{18} - 10^{19}$ Гс

Постановка задачи

Цель: ширина аннигиляции $q\bar{q}$-пар в сильном магнитном поле с учётом коллективных эффектов термостата

Оценочная модель (асимптотические оценки) опирается на:

- основной уровень Ландау ($n = 0$)
- δ-функциональное короткодействующее межпарное взаимодействие
- ультрарелятивистский предел

даёт результат $\langle\Gamma\rangle \propto T^4$, $\widetilde{C}(B) \propto B^{3/8}$

Расширенная модель (предмет доклада) снимает все три приближения:

- *полный спектр* уровней Ландау
- *экранированное Дебаевское* взаимодействие (термополевая теория, HTL)
- *общее* релятивистское термодинамическое усреднение

Оценочные результаты воспроизводятся как предельные случаи расширенных.

Основные уравнения динамики пары

Кварконий в магнитном поле $\mathrm{B} = B\mathrm{e}_z$, потенциал Корнелла:

$$U(r) = -\frac{\alpha_s}{r} + \sigma r + C_s$$

Уравнение Дирака в центре масс пары с учётом спина:

$$\left(\Delta + 2U(r)E_w - U^2(r) + \frac{ie_q}{2}(\mathrm{B}\times\mathrm{r})\nabla \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4}e_q^2 B_r^2 r_\perp^2 \right)\psi_S(\mathrm{r}) + (e_q B)\Psi_{(1-S)}(\mathrm{r}) = (m_w^2 - E_w^2)\psi_S(\mathrm{r})$$

где $S = 0, 1$ — спиновые состояния
Спектр Ландау:

$$E_n(p_z) = \sqrt{p_z^2 + m^2 + (2n+1+s_z)eB}, \qquad a = (eB)^{-1/2}$$

Полный спектр уровней Ландау и правило отбора

Одночастичные функции (симметричная калибровка):

$$\phi_{n_r,m}(\rho,\varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} R_{n_r,m}(\rho), \quad R_{n_r,m} \propto L_{n_r}^{|m|}\left(\frac{\rho^2}{2a^2}\right) e^{-\rho^2/(4a^2)}$$

главное квантовое число $N = 2n_r + |m|$

Правило отбора для аннигиляции:

$$R_{n_r,m}(0) = \begin{cases} \sqrt{2}/a, & m = 0, \ \forall n_r \\ 0, & m \neq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |\phi_{N,0}(0)|^2 = \frac{1}{\pi a^2}$$

- Участвуют только чётные уровни $N = 2n_r$; различие — в продольной $\chi_N(z)$

$$\Psi(\mathrm{r}) = \sum_{N=0,2,\ldots,N_{\max}} \phi_{N,0}(\rho)\,\chi_N(z), \qquad N_{\max} \approx \frac{2\mu T}{e_q B}$$

В оценочной модели при $kT \ll \hbar\omega_c$ остаётся лишь $N = 0$

Эффективный потенциал по уровням Ландау

Разложение в систему связанных уравнений для $\chi_N(z)$:

$$\left[-\frac{1}{2\mu}\frac{d^2}{dz^2}+\varepsilon_N\right]\chi_N(z)+\sum_{N'}\mathcal{U}_{NN'}(z)\chi_{N'}(z)=\mathcal{E}\chi_N(z)$$

Эффективный потенциал для N-го уровня ($t=\rho^2/2a^2$):

$$U_{\text{eff}}^{(N)}(z)\approx\frac{2E_w}{n_r!}\int_0^\infty [L_{n_r}(t)]^2 e^{-t}\, U\!\left(\sqrt{z^2+2a^2t}\right)dt$$

Гармоническое приближение для каждого уровня:

$$U_{\text{eff}}^{(N)}(z)\approx U_0^{(N)}+\tfrac{1}{2}\mu(\omega_N)^2z^2$$

В оценочной модели при $n_r=0$ ($L_0\equiv1$) воспроизводится $U_0=\sigma a-\alpha_s/a$, $\omega^2=(\sigma+\alpha_s/a^2)/(\mu a)$.

Взаимодействие с термостатом: экранирование (HTL)

Замена δ-ядра оценочной модели на ядро Юкавы:

$$K(\mathrm{r}-\mathrm{r}') = \frac{e^{-m_D|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|}}{4\pi|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|}, \qquad m_D^2(T) = g_s^2 T^2\left(\frac{N_c}{3}+\frac{N_f}{6}\right)$$

($m_D^2(T)$ дебаевская масса экранирования, $g_s^2 = 4\pi\alpha_s$)
Эффективный потенциал термостата:

$$V_{\text{eff}}(\mathrm{r}) = g_{\text{eff}}\, n(T) \int d^3r' \, \frac{e^{-m_D|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|}}{4\pi|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|} \, |\Psi(\mathrm{r}')|^2, \quad g_{\text{eff}} \sim -\frac{4\pi\alpha_s C_F}{m_D^2}$$

В оценочной модели при $m_D \to \infty$: $K \to \delta^{(3)}(\mathrm{r})/m_D^2$ — δ-ядро ($V_{\text{eff}} \approx gn|\Psi|^2$)

Релятивистская плотность пар и усреднение

Плотность пар в общем релятивистском случае:

$$n(T) = \frac{g_s\, M^2\, T}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} K_2\left(\frac{kM}{T}\right)$$

Средний лоренц-фактор:

$$\langle\gamma\rangle_T = \frac{1}{M} \cdot \frac{\sum_k k^{-1}[3(kM/T)K_3 + (kM/T)^2 K_2]}{\sum_k k^{-1}[2(kM/T)^2 K_2 + (kM/T)K_1]}$$

В оценочной модели при $T \gg M$: $n \to g_s \zeta(3) T^3/\pi^2$ и $\langle\gamma\rangle_T \to \frac{\pi^4}{30\zeta(3)} \frac{kT}{M}$ — ультрарелятивистская асимптотика

Система уравнений для $\chi_N(z)$

Итоговая нелинейная дифференциально-интегральная система для продольных амплитуд:

$$\boxed{\begin{aligned}&\left[-\frac{1}{2\mu}\frac{d^2}{dz^2}+\frac{1}{2}\mu(\omega_N)^2z^2+U_0^{(N)}+\varepsilon_N\right]\chi_N(z)+\sum_{N'}\mathcal{U}_{NN'}(z)\chi_{N'}(z)\\&\quad+g_{\text{eff}}\,n(T)\sum_{N'}\mathcal{W}_{NN'}[z;\{\chi_{N'}\}]=\mathcal{E}_N\chi_N(z)\end{aligned}}$$

Нелинейный интегральный оператор (термостат):

$$\mathcal{W}_{NN'}[z;\{\chi_{N'}\}]=\int dz'\,|\chi_{N'}(z')|^2\,\mathcal{F}_{NN'}(z-z';m_D)$$

с форм-фактором $\mathcal{F}_{NN'}\sim K_0(\rho\sqrt{k_z^2+m_D^2})$, учитывающим геометрию $(\parallel-\perp)$-перекрытия

- Нормировка $\sum_N\int|\chi_N|^2dz=1$

Квадрат волновой функции в точке аннигиляции

Когерентная сумма по уровням Ландау:

$$|\Psi(0)|^2 = \frac{1}{\pi a^2}\left|\sum_{N=0,2,\dots}\chi_N(0)\right|^2$$

Интерференция между амплитудами разных уровней Ландау и может приводить как к усилению, так и к ослаблению вероятности аннигиляции в зависимости от относительных фаз $\chi_N(0)$. В некогерентном пределе (фазы случайны или быстро осциллируют):

$$|\Psi(0)|^2_{\text{incoh}} = \frac{1}{\pi a^2}\sum_{N=0,2,\dots}|\chi_N(0)|^2.$$

Интерференция между уровнями оказывается важной при $kT \lesssim \hbar\omega_c$, когда заселены лишь несколько низших уровней; при $kT \gg \hbar\omega_c$ некогерентный предел становится оправданным.

Итоговая средняя ширина аннигиляции

Итоговое выражение для ширины аннигиляции:

$$\boxed{\langle \Gamma^B \rangle = \frac{1}{32\pi} \left| \sum_{N=0,2,\ldots} b_N(T,B)\, B_B^{(N)} \right|^2 \cdot \langle \gamma \rangle_T}$$

где $b_N = \chi_N(0)/\sum_{N'} \chi_{N'}(0)$, $B_B^{(N)}$ — амплитуды распада для N-го уровня

Предельные переходы к оценочной модели:

- $kT \ll \hbar\omega_c$: остаётся только $N=0$, $b_0=1$
- $m_D \to \infty$: ядро Юкавы $\to \delta^{(3)}(\mathrm{r})/m_D^2$
- $kT \gg M$: $\langle\gamma\rangle_T \to \pi^4 kT/(30\zeta(3)M)$

Обсуждение численной реализации

Расширенная модель в пределах $m_D \to \infty$ и $kT \gg M$ должна воспроизводить оценочный результат $\langle \Gamma \rangle \propto T^4$

Схема численного решения (планируется):

1. Предвычисление матриц $\mathcal{U}_{NN'}$ (квадратуры Гаусса–Лагерра)
2. Предвычисление форм-факторов $\mathcal{F}_{NN'}$ (FFT)
3. Самосогласованная итерация (SCF) для $\chi_N(z)$
4. Вычисление b_N, $B_B^{(N)}$ и $\langle \Gamma^B \rangle$

Параметрический диапазон:

$$B \sim 10^{15} - 10^{19} \text{ Гс}, \quad T \sim 50 - 300 \text{ МэВ}, \quad N_{\text{max}} \sim 10 - 50$$

Реализация: Fortran (расчёты) + Python (визуализация)

Основные результаты и выводы

Результаты:

1. Построена расширенная модель аннигиляции $q\bar{q}$-пар в магнитном поле, снимающая приближения оценочной модели:
   - полный спектр уровней Ландау (правило отбора $m = 0$)
   - Дебаевское экранирование взаимодействия (HTL)
   - общее релятивистское усреднение
2. Получена замкнутая система для $\chi_N(z)$; оценочный результат $\langle \Gamma \rangle \propto T^4$ воспроизводится как асимптотический предел

Приложения:

- *Спокойный сценарий*: коррекция кривых нейтринного охлаждения магнитаров
- *Катастрофический сценарий*: вклад в энерговыделение коллапсаров, многоканальные транзиенты

Перспективы: прямой расчёт амплитуд распада для N-го уровня, численная реализация (Fortran+Python)