Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

УДК 539.12.01

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

МОДИФИКАЦИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ШИРИНЫ АННИГИЛЯЦИИ КВАРКОНИЯ В КВАРК-АНТИКВАРКОВОМ ТЕРМОСТАТЕ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Научный руководитель
д.ф.-м.н., доц.,
проф. каф. №6 НИЯУ МИФИ ________ А. В. Кошелкин

Студент ________ В. С. Зеленев

Москва, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Кварконизация в ядрах массивных нейтронных звёзд и магнитаров

В современной астрофизике компактных объектов обсуждается существование второго фазового перехода в плотной QCD-материи — а именно кварконизации, то есть деконфайнмента кварков с образованием, в частности, кварк-глюонной фазы во внутренних областях массивных нейтронных звёзд [7; 8]. При плотностях $\rho \gtrsim 2-3\,\rho_0$ ($\rho_0 \approx 0.16$ нукл/фм^3 — ядерная плотность) и температурах, превышающих десятки МэВ в центре прото-нейтронной звезды или массивного магнитара, кварковая фаза становится релевантным путём эволюции адронной материи. Уравнение состояния с фазовым переходом эффективно даёт два различных режима эволюции в зависимости от массы и углового момента компактного объекта [11; 14].

Особенно важным элементом поля исследований оказывается магнитное поле в недрах объекта. В стабильных магнитарах поле на поверхности составляет $B_{\text{surf}} \sim 10^{14} - 10^{15}$ Гс [3; 9], а в ядре, согласно сохранению магнитного потока (в частности, в адиабатическом приближении при быстром формировании или коллапсе), поле может усиливаться до $B_{\text{core}} \sim 10^{17} - 10^{18}$ Гс. При коллапсе или слиянии нейтронных звёзд (последняя стадия — коллапсары) поле в гипермассивной нейтронной звезде на пути к коллапсу в чёрную дыру может на короткое время достигать $B \sim 10^{18} - 10^{19}$ Гс [10; 11]. Эти значения близки или превосходят характерные адронные масштабы ($m_\pi^2 \sim 10^{18}$ Гс) и могут оказывать существенное влияние на формирование кварковой фазы.

Можно обозначить два качественно разных сценария, в которых обсуждаемая кварковая аннигиляция может иметь наблюдательные следствия.

Рассмотрим «спокойный» сценарий. В ядре стабильного магнитара рассматривается квазистатическая кварковая фаза при температурах $T \sim 10-50$ МэВ (после охлаждения с протонейтронной стадии). В глюонном конденсате этой фазы происходят циклические процессы рождения и аннигиляции кварк-антикварковых пар. Кварковая аннигиляция в кварк-глюонной плазме сопровождается излучением нейтрино [12; 13] (вольный аналог URCA-процесса, известного для адронной материи), что приводит к стабильному нейтринному оттоку энергии из ядра. Усиление аннигиляции коллективным взаимодействием в магнитном поле может скорректировать кривые охлаждения молодых магнитаров.

Рассмотрим теперь «катастрофический» сценарий. Альтернативный путь реализуется, как минимум, в двух основных случаях:

- Задержанный коллапс ядра массивной сверхновой в чёрную дыру через стадию гипермассивной нейтронной звезды или массивного магнитара [5; 6]. Быстрое торможение углового момента ($\tau \sim$ мин) приводит к катастрофическому уплотнению ядра, температуры поднимаются до $kT \sim 100 - 300$ МэВ. Этот механизм коллапсара актуален в первую очередь для молодых популяций звёзд.

- Коллапсары после слияний нейтронных звёзд: гипермассивный остаток с большим угловым моментом коллапсирует за время порядка десятков мс [10; 11]. Это типичный сценарий для старых популяций двойных систем.

В обоих случаях лавинное усиление темпов аннигиляции кварк-антикварковых пар в плотной горячей среде с экстремальным магнитным полем может обеспечить мощный выброс энергии по нескольким каналам: гамма (GRB), радио (FRB), нейтрино, гравитационные волны [17; 18; 22].

Историческое замечание. Похожий астрофизический контекст реализуется и при коллапсах массивных звёзд III популяции на космологических расстояниях $z \gtrsim 6$ [1; 2; 15; 16]: в их ядрах достигаются температуры $T \gtrsim 10^{11}$ K, плотности $\rho \gtrsim 10^{14}$ г/см^3 и магнитные поля $B \sim 10^{15} - 10^{17}$ Гс [4], что также соответствует условиям применимости развиваемой ниже модели. Однако в фокусе настоящей работы остаются магнитары и коллапсары как наиболее актуальные источники с точки зрения современной многоканальной астрономии.

Наблюдения транзиентов от магнитаров и коллапсаров

Современная астрофизика высоких энергий характеризуется переходом к многоканальным (multi-messenger) наблюдениям, когда астрофизические объекты и процессы изучаются в различных спектральных диапазонах и каналах прихода энергии. Для магнитаров и коллапсаров наиболее релевантными каналами являются:

Гамма-всплески (GRB) — как короткие ($\lesssim 2$ с), традиционно ассоциируемые со слияниями нейтронных звёзд, так и длинные ($\gtrsim 2$ с), связываемые с коллапсами массивных звёзд через стадию массивного магнитара. Энерговыделение кварковой аннигиляции в ядре может вносить вклад в энергетику «центральной машины» GRB [15; 16].

Быстрые радиовсплески (FRB) — миллисекундные всплески радиоизлучения. Современные наблюдения ассоциируют их с молодыми магнитарами — нейтронными звёздами с экстремальными магнитными полями [17; 18]. Возмущения магнитосферы магнитара со стороны процессов в ядре могут приводить к индуцированию FRB.

Нейтрино высоких энергий — зарегистрированные обсерваториями IceCube и ANTARES нейтрино с энергиями $\gtrsim 1$ ТэВ могут иметь внегалактическое происхождение. Пространственные и временные кросс-корреляции с другими каналами всплесков могут указывать на их источники в коллапсарных событиях [19; 20].

Гравитационные волны — интерферометры сети LIGO/Virgo/KAGRA уже регистрируют сигналы от слияний нейтронных звёзд (GW170817), а будущие обсерватории (Einstein Telescope, LISA, Cosmic Explorer) расширят как спектр масс наблюдаемых событий, так и чувствительность к коллапсам одиночных объектов на космологических расстояниях [21; 22].

Кросс-корреляция сигналов в этих каналах может предоставить возможность получить полезную обзорную информацию по процессам в недрах компактных объектов. Например, совпадение во времени гамма-всплеска, нейтринного события и гравитационно-волнового сигнала даст возможность точно локализовать источник и изучить его эволюцию в процессе наблюдений.

Лабораторные возможности задачи

Интересно также заметить, что сходные (менее долговременные) условия могут возникать и в земных экспериментах — при нецентральных столкновениях тяжёлых ионов на RHIC и LHC, где возникают сильнейшие магнитные поля $B \sim 10^{18} - 10^{19}$ Гс [23—25]. Эти поля, хотя и существуют кратковременно ($\tau \sim 10^{-23}$ с), превышают характерные адронные масштабы ($m_\pi^2 \sim 10^{18}$ Гс) и оказывают существенное влияние на динамику образующейся кварк-глюонной плазмы.

Особенности астрофизического сценария

В астрофизических условиях ядер магнитаров и коллапсаров необходимо учитывать несколько критических особенностей, отличающих этот сценарий от лабораторных условий.

Во-первых, магнитное поле в ядре существенно неоднородно: оно имеет выраженные пространственные градиенты, особенно в коллапсарном режиме, когда поле эволюционирует на характерных временах $\tau_B \sim 1 - 10$ мс. В стабильном магнитарном режиме поле квазистатично на временах $\tau \lesssim 10^6$ лет, но всё равно содержит градиенты, обусловленные сложной топологией (полоидальная + тороидальная компоненты).

Во-вторых, на стадии перехода в кварковую фазу магнитное поле проникает в плазму с характерной длиной экранирования $\lambda_D \sim (e^2T^2)^{-1/2}$, что приводит к нетривиальной перестройке топологии.

В-третьих, коллапсарные сценарии сопровождаются релятивистскими гидродинамическими течениями и развитием квантовых неустойчивостей, включая производство пар (например, лептонных), спонтанное нарушение симметрии и формирование киральных магнитных волн. Наконец, несмотря на быстрое изменение поля в коллапсарном сценарии, на временах формирования и аннигиляции кварк-антикварковых пар ($\tau_{q\bar{q}} \sim 1/\sqrt{eB} \sim 10^{-23}$ с для $B \sim 10^{19}$ Гс) поле можно считать постоянным в рамках квазистационарного приближения, что существенно упрощает теоретическое описание на начальном этапе.

Исходная модель: уровни Ландау в сильном магнитном поле

Исходным условием рассмотрения задачи является учёт квантования динамики заряженных частиц в магнитном поле — так называемых уровней Ландау. Для релятивистской частицы в постоянном однородном магнитном поле $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ спектр энергии имеет вид [26]:

$$E_n(p_z) = \sqrt{p_z^2 + m^2 + (2n + 1 + s_z)eB}, \tag{1}$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$ — радиальное квантовое число, $s_z = \pm 1$ — проекция спина на направление поля, p_z — продольный импульс, а e — заряд частицы. В астрофизическом контексте сверхсильных полей ультрарелятивистский предел ($p_z^2 \gg m^2 + eB$) является наиболее релевантным, при этом основную роль играют низшие уровни Ландау ($n = 0$). Важной особенностью нулевого уровня является фиксация s_z знаком заряда: для кварков $s_z = -1$ при $e_q > 0$ и $s_z = +1$ при $e_q < 0$, что приводит к эффективной поляризации частиц вдоль направления магнитного поля.

Пространственная структура волновой функции на уровне Ландау с квантовыми числами n, m (магнитное квантовое число) описывается выражением [27]:

$$\psi_{nm}(\mathbf{r}_\perp) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\frac{r_\perp}{\sqrt{2}a}\right) \exp\left(-\frac{r_\perp^2}{4a^2} + im\phi\right), \tag{2}$$

где $a = (eB)^{-1/2}$ — магнитная длина (в единицах $\hbar = c = 1$), H_n — полиномы Эрмита, а $(r_\perp, \phi)$ — полярные координаты в плоскости, перпендикулярной полю. Для основного состояния ($n = 0$, $m = 0$) волновая функция принимает особенно простой вид:

$$\psi_{00}(\mathbf{r}_\perp) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \exp\left(-\frac{r_\perp^2}{4a^2}\right), \tag{3}$$

что соответствует гауссову распределению в поперечной плоскости с характерным размером a. Именно такая пространственная локализация используется для определения основного состояния кваркония в магнитном поле.

Кварконий в магнитном поле: современное состояние исследований

Исследованию свойств состояний кваркония в магнитном поле посвящена обширная литература, однако большинство работ рассматривают кварконий как изолированные системы, пренебрегая влиянием окружающей среды. В нерелятивистских подходах [28; 29] используется потенциал Корнелла с учётом диамагнитных эффектов через сдвиг уровней энергии. Релятивистские подходы [30—32] основаны на решении уравнений типа Дирака или Клейна–Гордона в магнитном поле с учётом спиновых эффектов и аномальных магнитных моментов.

Температурные эффекты в горячей среде изучаются в работах [33; 34], где рассматривается температурная зависимость массы и ширины распада кваркониев в плазме. Коллективные эффекты, связанные с влиянием плотной среды через модификацию потенциала, исследуются в [35; 36]. Однако принципиально важный для нашей задачи аспект — влияние окружающего термостата кварк-антикварковых пар на характеристики аннигиляции — остаётся практически не изученным, хотя именно коллективные эффекты могут кардинально модифицировать наблюдаемые проявления в астрофизических условиях недр магнитаров и коллапсаров.

Постановка задачи и методология работы

В данной работе исследуется модификация ширины аннигиляции кварк-антикварковых пар в сильном магнитном поле с учётом термодинамического влияния окружающего термостата таких же пар. Эта проблема имеет прямое отношение к интерпретации нейтринного охлаждения молодых магнитаров через аналог URCA-процесса для кварковой материи и к энерговыделению при коллапсарных событиях, регистрируемых в каналах GRB, FRB, нейтрино и гравитационных волн.

В I части работы строится первичная оценочная модель, опирающаяся на три приближения: рассмотрение только основного уровня Ландау ($n = 0$, $m = 0$), δ-функциональное представление ядра межпарного взаимодействия и ультрарелятивистский предел при термодинамическом усреднении. В рамках этой модели:

- строится эффективный гамильтониан для кварк-антикварковой пары в магнитном поле с учётом взаимодействия с термостатом;
- решается модифицированное уравнение для волновой функции методом факторизации на продольную и поперечную части;
- вычисляется квадрат модуля волновой функции в точке аннигиляции $|\Psi(0)|^2$ — величина, определяющая ширину аннигиляции;
- учитывается лоренцево сокращение для движущейся пары и проводится термодинамическое усреднение по импульсному распределению в ультрарелятивистском бозе-ансамбле;
- анализируется температурная и полевая зависимость эффективной ширины аннигиляции.

Во II части разрабатывается расширенная модель, снимающая каждое из ограничений I части:

- учитывается полный спектр уровней Ландау через разложение волновой функции по полному ортонормированному базису $\{\phi_{N,0}(\rho)\}$ с $N = 0, 2, 4, \ldots, N_{\max}$;
- δ-функциональное ядро межпарного взаимодействия заменяется на экранирующее Дебаевское (Юкавское) в рамках термополевой теории (HTL) с длиной экранирования $\lambda_D = m_D^{-1}(T)$;

- термодинамическое усреднение по ансамблю проводится в общем случае через релятивистские интегралы Бозе–Эйнштейна, выражаемые через функции Бесселя K_n.

Результатом II части работы является замкнутая нелинейная дифференциально-интегральная система уравнений для продольных амплитуд волновых функций $\chi_N(z)$ на каждом уровне Ландау. Решение задачи в этой постановке оказывается аналитически замкнутым лишь в виде системы; финальные количественные результаты предполагается получить с помощью численных расчётов, что пока выходит за рамки настоящего отчёта.

ЧАСТЬ I. ОЦЕНОЧНАЯ МОДЕЛЬ

Основные уравнения динамики пары

Пусть кварк-антикварковая пара находится в однородном магнитном поле $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$, направленном вдоль оси OZ.

Рассматриваемый кварконий представляет собой составной мезон, состоящий из кварк-антикварковой пары одного аромата (u, d, s), однородное магнитное поле не влияет на движение центра масс. Следовательно, для исследования основного состояния кваркония в магнитном поле мы модифицируем уравнения дираковской динамики [37], добавив векторный потенциал $A^\mu = (0, \mathbf{A}) = (0, \frac{1}{2}(\mathbf{B} \times \mathbf{r}))$ к уравнению движения парапозитрония [38].

Кроме того, мы также заменяем кулоновский потенциал [38], который является нулевой компонентой векторного взаимодействия $A_\mu = (U, 0)$ двух частиц, на потенциал Корнелла $U(r) = -\frac{\alpha_s}{r} + \sigma r + C_s$, где $0.19 \le \alpha_s \le 0.4$ – константа сильного взаимодействия, $\sigma \simeq 0.18$ ГэВ^2 – константа "струнного натяжения" , C_s – константа спин-спинового взаимодействия, которой мы пренебрегаем далее. Также учитываем эффект спин-смешивания [39], вводя функцию $\psi_S(\mathbf{r})$, которая соответствует спиновым состояниям $S = 0, 1$.

В результате в системе центра масс получаем следующее уравнение с учётом спиновых состояний:

$$\begin{gathered}\left(\Delta + 2U(r)E_w - U^2(r) + \frac{ie_q}{2}(\mathbf{B} \times \mathbf{r})\nabla - \frac{1}{4}e_q^2 B_r^2 r_\perp^2\right)\psi_S(\mathbf{r}) \\ + (e_q B)\Psi_{(1-S)}(\mathbf{r}) = (m_w^2 - E_w^2)\psi_S(\mathbf{r}); \\ S = 0, 1;\end{gathered} \tag{4}$$

где $E_w = (E_q - m_q^2/2E_q)$, $m_w = m_q^2/2E_q$; m_q и $e_q > 0$ — масса и электрический заряд кварка, а E_q — энергия кварк-антикварковой пары в системе центра масс.

Здесь мы также ввели цилиндрические координаты для радиус-вектора относительного движения $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\perp + \mathbf{e}_z z$. Функция $\psi_S(\mathbf{r})$ предполагается нормированной на единицу.

Поперечная часть гамильтониана в плоскости вместе со спиновым взаимодействием имеет вид:

$$\hat{H}_\perp = \frac{1}{2\mu}\left(\hat{\mathbf{p}}_\perp - \frac{e_q}{c}\mathbf{A}_\perp\right)^2 - \mu_B B\sigma_z, \tag{5}$$

Собственные функции $\hat{H}_\perp$ образуют полный ортонормированный базис, который обозначим как $\phi_\nu(\mathbf{r}_\perp, S)$, где $\nu = (n, m, s_z)$ – набор квантовых чисел: $n = 0, 1, 2, \ldots$ – радиальное квантовое число, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ – магнитное квантовое число, $S = \pm1$ (или $s_z = \pm\frac{1}{2}$) – проекция спина на ось z.

Соответствующие собственные значения равны:

$$\varepsilon_\nu = \hbar\omega_c\left(n + \frac{m + |m| + 1}{2}\right) - \mu_B B s_z, \qquad \omega_c = \frac{e_q B}{\mu c}. \tag{6}$$

Волновые функции уровней Ландау могут быть записаны в виде:

$$\phi_{nm}(\rho, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} R_{nm}(\rho) e^{im\phi}, \tag{7}$$

где радиальные функции $R_{nm}(\rho)$ выражаются определённым образом.

Общее решение уравнения (4) может быть разложено по полному набору $\{\phi_\nu\}$:

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_\nu \phi_\nu(\mathbf{r}_\perp, s_z)\chi_\nu(z), \tag{8}$$

где $\chi_\nu(z)$ – продольные волновые функции, зависящие от квантовых чисел ν.

Подставляя разложение (8) в уравнение (4) и проецируя на $\phi_{\nu'}$, получаем систему связанных одномерных уравнений:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon_\nu\right]\chi_\nu(z) + \sum_{\nu'} U_{\nu\nu'}(z)\chi_{\nu'}(z) = \mathcal{E}\chi_\nu(z), \tag{9}$$

где матричные элементы потенциала Корнелла определяются как:

$$U_{\nu\nu'}(z) = \int d^2\mathbf{r}_\perp\, \phi_\nu^*(\mathbf{r}_\perp, s_z) U\left(\sqrt{z^2 + \rho^2}\right)\phi_{\nu'}(\mathbf{r}_\perp, s_z'). \tag{10}$$

В сильном магнитном поле B (когда $\hbar\omega_c \gg E_{\text{связи}}$) поперечное движение "заморожено" в основном состоянии Ландау с $n = 0$. В этом случае можно ограничиться одним членом в разложении (8), соответствующим $n = 0$, $m = 0$ и определённой проекции спина s_z.

Усреднение потенциала Корнелла для основного состояния

Для основного уровня Ландау ($n = 0$, $m = 0$) волновая функция имеет вид:

$$\phi_{00}(\rho, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4a^2}\right), \qquad a = \sqrt{\frac{\hbar c}{e_q B}}. \tag{11}$$

Учитывая, что потенциал Корнелла не зависит от спина, диагональные матричные элементы для $s_z = s'_z$ дают эффективный одномерный потенциал:

$$U_{\text{eff}}(z) \equiv U_{00}(z) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} |\phi_{00}(\rho, \phi)|^2 U\left(\sqrt{z^2 + \rho^2}\right) \rho \, d\rho \, d\phi. \tag{12}$$

Подставляя явный вид волновой функции и потенциала, получаем:

$$U_{\text{eff}}(z) = \frac{1}{a^2} \int_0^\infty e^{-\rho^2/(2a^2)} \left[-\frac{\alpha_s}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} + \sigma\sqrt{z^2 + \rho^2}\right] \rho \, d\rho. \tag{13}$$

Таким образом, в приближении сильного магнитного поля система уравнений (9) сводится к одному уравнению для продольной волновой функции $\chi_{00}(z)$:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon_0 + U_{\text{eff}}(z)\right] \chi_{00}(z) = \mathcal{E}\chi_{00}(z), \tag{14}$$

где $\varepsilon_0 = \frac{\hbar\omega_c}{2} - \mu_B B s_z$ – энергия основного уровня Ландау с учётом спина.

Вычисление интеграла (13) даёт различные асимптотики в зависимости от соотношения между продольной координатой z и магнитной длиной a. Для больших $|z| \gg a$ получаем:

$$U_{\text{eff}}(z) \approx \sigma\sqrt{z^2 + a^2} - \frac{\alpha_s}{\sqrt{z^2 + a^2}}, \tag{15}$$

что соответствует потенциалу Корнелла с эффективным минимальным расстоянием a. Для малых $|z| \ll a$, что характерно для основного состояния в сильном поле, имеем:

$$U_{\text{eff}}(z) \approx \sigma a \left(1 + \frac{z^2}{2a^2}\right) - \frac{\alpha_s}{a}\left(1 - \frac{z^2}{2a^2}\right). \tag{16}$$

Таким образом, аппроксимация основного состояния, локализованного в области $|z| \lesssim a$, принимает вид линейного осциллятора:

$$U_{\text{eff}}(z) \approx U_0 + \frac{1}{2}\mu\omega^2 z^2, \tag{17}$$

где константа U_0 и частота ω определяются выражениями:

$$U_0 = \sigma a - \frac{\alpha_s}{a}, \quad \omega^2 = \frac{\sigma + \alpha_s/a^2}{\mu a}. \tag{18}$$

Эта аппроксимация существенно упрощает дальнейший анализ, позволяя получить аналитические результаты для волновой функции и энергии основного состояния, локализованных внутри магнитной длины a.

Учёт взаимодействия с окружающим термостатом пар

В реалистичных условиях ядер магнитаров и коллапсаров кварк-антикварковые пары формируются не изолированно, а в плотном ансамбле подобных пар, образующих своеобразный термостат. Возникает дополнительное взаимодействие, обусловленное обменом коллективными возбуждениями между кратковременно связанными парами. В общем случае это нелокальное взаимодействие описывается интегральным выражением:

$$V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = gn \int d^3r' K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)|\Psi(\mathbf{r}')|^2, \tag{19}$$

где g — эффективная константа связи, характеризующая силу межпарного взаимодействия (далее принимаем знак $g < 0$), n — плотность пар в термостате, $K(r)$ — ядро интегрального оператора взаимодействия, определяющее его пространственные масштабы.

Выбор $g < 0$ соответствует ситуации, когда обмен коллективными модами взаимодействия понижает энергию пары в среде, что приводит к её дополнительному сжатию.

В ультрарелятивистском пределе, характерном для высокотемпературной кварковой плазмы, ядро взаимодействия можно аппроксимировать дельта-функцией: $K(r) \approx \delta^{(3)}(\mathbf{r})$. Это соответствует пределу короткодействующего взаимодействия, когда характерный радиус взаимодействия много меньше среднего расстояния между парами. В этом приближении эффективный потенциал принимает локальную форму:

$$V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) \approx gn|\Psi(\mathbf{r})|^2. \tag{20}$$

С учётом этого члена полный гамильтониан системы приобретает вид:

$$\hat{H} = \hat{H}_0^{\text{eff}} + gn|\Psi(\mathbf{r})|^2. \tag{21}$$

Соответствующее уравнение для волновой функции становится нелинейным и относится к классу уравнений типа Гросса-Питаевского:

$$\left[-\frac{1}{2\mu}\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 z^2 + gn|\psi(z)|^2\right]\psi(z) = E\psi(z), \tag{22}$$

где мы учли факторизацию полной волновой функции $\Psi(\mathbf{r}) = \psi(z)\psi_{00}(\mathbf{r}_\perp)$ и усреднили по поперечной координате. Нелинейный член $gn|\psi(z)|^2$ описывает усреднённый вид быстро осциллирующего самосогласованного поля, создаваемого окружающими парами, и приводит к эффективному дополнительному конфайнменту системы.

Решение нелинейного уравнения методом вариационного параметра

Для приближённого решения нелинейного уравнения (22) используем вариационный метод с гауссовой пробной функцией:

$$\psi(z) = \left(\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\beta^2 z^2}{2}\right), \tag{23}$$

где β — вариационный параметр, обратно пропорциональный продольному размеру системы. Средняя энергия, вычисленная с этой пробной функцией, имеет вид:

$$\langle E\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z)\left[-\frac{1}{2\mu}\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 z^2\right]\psi(z)dz + gn\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(z)|^4 dz \tag{24}$$

$$= \frac{\beta^2}{4\mu} + \frac{\mu\omega^2}{4\beta^2} + \frac{gn\beta}{\sqrt{2\pi}}. \tag{25}$$

Минимизируя среднюю энергию по параметру β, получаем:

$$\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial\beta} = \frac{\beta}{2\mu} - \frac{\mu\omega^2}{2\beta^3} + \frac{gn}{\sqrt{2\pi}} = 0. \tag{26}$$

В отсутствие термостата ($n = 0$) решение имеет вид $\beta_0^2 = \mu\omega$. С учётом взаимодействия с термостатом ищем решение в виде $\beta = \beta_0 + \varepsilon$, $|\varepsilon| \ll \beta_0$. Разлагая $(\beta_0+\varepsilon)^{-3} \approx \beta_0^{-3}(1 - 3\varepsilon/\beta_0)$ и подставляя в (26):

$$\underbrace{\frac{\beta_0}{2\mu} - \frac{\mu\omega^2}{2\beta_0^3}}_{=0} + \varepsilon\left(\frac{1}{2\mu} + \frac{3\mu\omega^2}{2\beta_0^4}\right) + \frac{gn}{\sqrt{2\pi}} = 0. \tag{27}$$

Поскольку $\beta_0^4 = \mu^2\omega^2$, второй член в скобке равен $3/(2\mu)$, и коэффициент при ε оказывается равным $2/\mu$. Отсюда:

$$\varepsilon = -\frac{\mu g n}{2\sqrt{2\pi}} = \frac{\mu|g|n}{2\sqrt{2\pi}} > 0. \tag{28}$$

Поправка $\delta \equiv \beta^2 - \beta_0^2 \approx 2\beta_0\varepsilon$ к квадрату вариационного параметра имеет вид:

$$\boxed{\delta = -\frac{\mu g n \beta_0}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\mu|g|n\beta_0}{\sqrt{2\pi}} > 0.} \tag{29}$$

Положительность δ при $g < 0$ свидетельствует о том, что эффективный продольный размер системы уменьшается (β увеличивается) за счёт взаимодействия с термостатом. Это можно интерпретировать как дополнительное сжатие кварк-антикварковой пары под действием давления окружающей среды, что имеет прямые аналогии с эффектом дебаевского экранирования в плотной плазме.

Квадрат модуля волновой функции в точке аннигиляции

Ключевой величиной, определяющей ширину аннигиляции кварк-антикварковой пары, является квадрат модуля волновой функции в точке встречи частиц $\mathbf{r} = 0$. Полная волновая функция в этой точке представляет собой произведение продольной и поперечной компонент:

$$|\Psi(0)|^2 = |\psi(0)|^2|\psi_{00}(0)|^2 = \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2\pi a^2}. \tag{30}$$

Подставляя $\beta = \beta_0 + \varepsilon$ с ε из (29), получаем с учётом взаимодействия с термостатом:

$$|\Psi(0)|^2 = |\Psi_0(0)|^2\left(1 + \frac{\varepsilon}{\beta_0}\right) = |\Psi_0(0)|^2\left(1 + \frac{\mu|g|n}{2\sqrt{2\pi}\,\beta_0}\right), \tag{31}$$

где $|\Psi_0(0)|^2 = \beta_0/(\sqrt{\pi}\cdot 2\pi a^2)$ — значение без учёта термостата.

Используя $\beta_0^2 = \mu\omega = \mu\sqrt{(\sigma + \alpha_s/a^2)/a}$ и учитывая, что для сильного поля магнитная длина a мала (так что σ-член доминирует), получаем $\beta_0 \propto a^{-1/4}$. Подстановка даёт упрощённое выражение:

$$|\Psi(0)|^2 \approx |\Psi_0(0)|^2 \left(1 + \frac{|g|n}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\mu^{3/4}a^{1/4}}{\sigma^{1/4}}\right). \tag{32}$$

Член, пропорциональный $|g|n\, a^{1/4}/\sigma^{1/4}$, описывает эффективное "усиление" волновой функции в точке аннигиляции за счёт дополнительного сжатия системы под действием термостата. В астрофизических условиях, где плотность пар n может быть очень высокой, этот эффект может приводить к существенному увеличению вероятности и темпов аннигиляции.

Ширина аннигиляции изолированной пары в магнитном поле

Прежде чем рассматривать влияние термостата, необходимо установить базовое выражение для ширины аннигиляции изолированной кварк-антикварковой пары в магнитном поле. Согласно работе [30], ширина аннигиляции $\Gamma_0(B)$ определяется выражением:

$$\Gamma_0(B) = \frac{|\Psi_0(0)|^2}{M^2} f(B, m_q, \alpha_s, \sigma), \tag{33}$$

где $M \approx 2m_q$ — масса пары, а функция $f(B, m_q, \alpha_s, \sigma)$ собирает в себе набор параметров системы. В пределе сильного магнитного поля ($e_q B \gg m_q^2$) и для лёгких кварков ($m_q \ll \sqrt{\sigma}$) автор работы получает следующую асимптотику:

$$\Gamma_0(B) \sim \frac{\sigma^{3/2}}{m_q^2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\sigma^{3/2}}{m_q^2} \sqrt{e_q B}, \tag{34}$$

где $a = (e_q B)^{-1/2}$ — магнитная длина. Эта зависимость демонстрирует характерное усиление аннигиляции в магнитном поле $\Gamma_0(B) \propto \sqrt{B}$, обусловленное сжатием волновой функции в поперечном направлении. Иными словами, это соответствует увеличению вероятности нахождения кварка и антикварка в одной точке пространства при увеличении напряжённости магнитного поля.

Динамика пары в термостате

В астрофизических условиях кварк-антикварковые пары не покоятся, а проявляют динамику с некоторым распределением импульсов. Для пары, движущейся с импульсом $\mathbf{P}$ вдоль магнитного поля (что является преимущественным направлением движения в сильном поле), в лабораторной системе отсчёта необходимо учесть лоренцево сокращение. Квадрат модуля волновой функции в точке аннигиляции преобразуется как:

$$|\Psi(0)|_P^2 = \gamma |\Psi(0)|_{\text{rest}}^2 = \frac{E_P}{M} |\Psi(0)|_{\text{rest}}^2, \tag{35}$$

где $E_P = \sqrt{P^2 + M^2}$ — полная энергия пары, $M \approx 2m_q$ — масса покоя, $\gamma = E_P/M$ — лоренц-фактор. Соответственно, ширина аннигиляции для движущейся пары:

$$\Gamma(P) \sim \frac{|\Psi(0)|_P^2}{M^2} = \frac{E_P}{M^3} |\Psi(0)|_{\text{rest}}^2. \tag{36}$$

В ультрарелятивистском рассмотрении $\gamma \gg 1$ темпы аннигиляции могут значительно повышаться.

Термодинамическое усреднение по ансамблю пар

Теперь произведём усреднение ширины аннигиляции по распределению пар по импульсам. В предположении, что пары как составные бозоны подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна, функция распределения имеет вид:

$$f(P) = \frac{1}{\exp(P/kT) - 1}, \tag{37}$$

где $P = |\mathbf{P}|$, k — постоянная Больцмана, T — температура термостата. Средняя ширина аннигиляции вычисляется как:

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{\int_0^\infty \Gamma(P) f(P) 4\pi P^2 dP}{\int_0^\infty f(P) 4\pi P^2 dP}. \tag{38}$$

В ультрарелятивистском пределе энергия пары $E_P \approx P$, тогда выражение (38) преобразуется:

$$\langle \Gamma \rangle \sim \frac{|\Psi(0)|^2_{\text{rest}}}{M^3} \cdot \frac{\int_0^\infty \frac{P^3}{e^{P/kT}-1} dP}{\int_0^\infty \frac{P^2}{e^{P/kT}-1} dP}. \tag{39}$$

Вычисление интегралов даёт известный результат для ультрарелятивистского бозе-газа:

$$\frac{\int_0^\infty \frac{P^3}{e^{P/kT}-1} dP}{\int_0^\infty \frac{P^2}{e^{P/kT}-1} dP} = \frac{\pi^4}{30\zeta(3)} kT. \tag{40}$$

Теперь необходимо выразить плотность пар n через параметры термостата. Для ультрарелятивистского бозе-газа плотность числа частиц определяется стандартным выражением:

$$n = \frac{g_s}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi P^2 dP}{\exp(P/kT) - 1} = \frac{g_s \zeta(3)}{\pi^2} (kT)^3, \tag{41}$$

где g_s — число спиновых состояний. Для скалярных кварк-антикварковых пар $g_s = 1$. Подставляя это выражение в формулу (32), получаем явную температурную зависимость квадрата модуля волновой функции:

$$|\Psi(0)|^2_{\text{rest}} \approx |\Psi_0(0)|^2 \left(1 + \frac{|g|\, \zeta(3)\, \mu^{3/4} a^{1/4}}{2\sqrt{2}\, \pi^{7/2}\, \sigma^{1/4}} (kT)^3 \right). \tag{42}$$

Интересно отметить, что при низких температурах термостатный вклад мал по сравнению с единицей, и преобладает сжатие волновой функции за счёт магнитного поля. При высоких температурах, когда термостатный член начинает доминировать, имеем выраженную температурную асимптотику $|\Psi(0)|^2 \propto (kT)^3$.

Объединяя все полученные результаты, (33), (42) и (40), получаем окончательное выражение для средней ширины аннигиляции в оценочной модели:

$$\boxed{\langle\Gamma\rangle = \Gamma_0(B)\left(1 + \frac{|g|\,\zeta(3)\,\mu^{3/4}a^{1/4}}{2\sqrt{2}\,\pi^{7/2}\,\sigma^{1/4}}\,(kT)^3\right)\frac{\pi^4}{30\zeta(3)}\frac{kT}{M^3}.} \tag{43}$$

Ультрарелятивистская температурная асимптотика

Особый интерес представляет предельный случай высоких температур, когда термостатный вклад в (42) доминирует. В этой асимптотике выражение (43) упрощается:

$$\boxed{\langle\Gamma\rangle \approx \widetilde{C}(B)\cdot(kT)^4,} \tag{44}$$

где константа $\widetilde{C}(B)$ собирает все параметры, зависящие от магнитного поля:

$$\widetilde{C}(B) = \Gamma_0(B)\cdot\frac{|g|\,\zeta(3)\,\mu^{3/4}a^{1/4}}{2\sqrt{2}\,\pi^{7/2}\,\sigma^{1/4}}\cdot\frac{\pi^4}{30\zeta(3)M^3}. \tag{45}$$

Используя $\Gamma_0(B) \propto \sqrt{B}$ из (34) и $a^{1/4} \propto B^{-1/8}$:

$$\widetilde{C}(B) \propto B^{1/2}\cdot B^{-1/8} = B^{3/8}. \tag{46}$$

Сильная степенная асимптотика $\langle\Gamma\rangle \propto (kT)^4$ способствует тому, что даже небольшой градиент температуры в ядре магнитара или коллапсаре может приводить к резкому усилению потока гамма-излучения от аннигиляции кварк-антикварковых пар или темпов производства лептонных пар.

ЧАСТЬ II. РАСШИРЕННАЯ МОДЕЛЬ

Мотивация и ограничения оценочной модели

Изложенная выше модель содержит три существенных приближения, ограничивающих её применимость в условиях ядер магнитаров и коллапсаров:

Во-первых, учитывался вклад только основного уровня Ландау. Это приближение справедливо при $\hbar\omega_c \gg E_{\text{связи}}$ и $\hbar\omega_c \gg kT$. Второе условие нарушается уже при $kT \gtrsim 100$ МэВ для $B \lesssim 10^{18}$ Гс. В катастрофическом сценарии при $kT \sim 200 - 300$ МэВ и критических $B \sim 10^{17} - 10^{18}$ Гс заселены оказываются $N_{\max} \sim 10 - 50$ уровней Ландау.

Во-вторых, δ-функциональное приближение ядра межпарного взаимодействия соответствует пределу сильного экранирования $m_D \gg 1/a$, нарушающемуся при конечных параметрах ядер магнитаров. Его использование приводит к завышению вклада коллективного взаимодействия в режиме слабого поля.

В-третьих, для лёгких u-, d-кварков ($m_q \sim 5 - 10$ МэВ) — $M \approx 2m_q \sim 10 - 20$ МэВ, а потому ультрарелятивистское приближение $kT \gg M$ выполняется в полной мере. Однако, например, для s-кварка ($m_s \sim 100$ МэВ) при $kT \sim 50$ МэВ (спокойный сценарий) предел нарушается, и нужно использовать полную релятивистскую кинематику.

В этом разделе строится обобщённая модель, перерабатывающая каждое из перечисленных ограничений с учётом реалий рассматриваемых физических процессов. Полное численное решение оказывается за рамками настоящего раздела, но получаемая ниже замкнутая система уравнений является основой для последующих численных расчётов.

Полный спектр уровней Ландау: одночастичные функции

В симметричной калибровке $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} \times \mathbf{r}_\perp)$ собственные функции поперечного гамильтониана для заряженной частицы с зарядом $e_q > 0$ имеют вид [27]:

$$\phi_{n_r,m}(\rho, \varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} R_{n_r,m}(\rho), \quad n_r = 0, 1, 2, \dots, \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{47}$$

где радиальная часть выражается через обобщённые полиномы Лагерра $L_{n_r}^{|m|}$:

$$R_{n_r,m}(\rho) = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2\,n_r!}{(n_r+|m|)!}}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}\,a}\right)^{|m|} L_{n_r}^{|m|}\left(\frac{\rho^2}{2a^2}\right)\exp\left(-\frac{\rho^2}{4a^2}\right). \qquad (48)$$

Главное квантовое число определяется как $N = 2n_r + |m|$. Собственное значение поперечного гамильтониана для уровня N с проекцией спина s_z:

$$\varepsilon_N^{(s_z)} = \hbar\omega_c\bigl(N+\tfrac{1}{2}\bigr) - \mu_B B s_z, \quad \omega_c = \frac{e_q B}{\mu c}. \qquad (49)$$

Нормировка радиальных функций:

$$\int_0^\infty R_{n_r,m}^2(\rho)\,\rho\,d\rho = 1. \qquad (50)$$

Подставляя $\rho = 0$ в (48) и используя $L_{n_r}^{|m|}(0) = \binom{n_r+|m|}{n_r}$, имеем:

$$R_{n_r,m}(0) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{a}, & |m| = 0,\ n_r = 0,1,2,\dots; \\ 0, & |m| \neq 0. \end{cases} \qquad (51)$$

В результате оказывается, что только состояния с $m = 0$ (то есть с чётными главными квантовыми числами $N = 2n_r$) вносят ненулевой вклад в вероятность нахождения пары в одной точке — именно они участвуют в аннигиляции.

Интересно также отметить, что значение $R_{n_r,0}(0) = \sqrt{2}/a$ не зависит от n_r. А потому действительным оказывается тот факт, что все различия между чётными уровнями Ландау должны наблюдаться в продольных волновых функциях $\chi_N(z)$.

Таким образом, получаем, что $|\phi_{N,0}(0)|^2 = 1/(\pi a^2)$ для всех чётных N.

Двухчастичное уравнение с разложением по уровням Ландау

Используя двухчастичный формализм из [30; 31], общее решение уравнения (4) ищем в виде разложения по полному набору $\phi_{N,0}$ с $m = 0$:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{N=0,2,4,\dots} \phi_{N,0}(\rho)\,\chi_N(z). \qquad (52)$$

Подставляя (52) в (4), пользуясь тем, что оператор $\frac{ie_q}{2}(\mathbf{B}\times\mathbf{r})\nabla - \frac{1}{4}e_q^2 B^2\rho^2$ есть в точности диагонализованный поперечный гамильтониан с собственными значениями ε_N на $\phi_{N,0}$, и проецируя на $\phi_{N,0}$, получаем систему связанных одномерных уравнений для амплитуд $\chi_N(z)$:

$$\left[-\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon_N^2 + \varepsilon_N - E_w^2 + m_w^2\right]\chi_N(z) + \sum_{N'}\mathcal{U}_{NN'}(z)\,\chi_{N'}(z) = 0, \qquad (53)$$

где матричные элементы потенциала Корнелла:

$$\mathcal{U}_{NN'}(z) = \int_0^\infty\int_0^{2\pi}\phi_{N,0}^*(\rho,\varphi)\big[2E_w U(\mathbf{r}) - U^2(\mathbf{r})\big]\,\phi_{N',0}(\rho,\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi. \qquad (54)$$

В линейном по U приближении (применимо при $\alpha_s, \sigma \ll E_w$, что выполняется для лёгких кварков) диагональный элемент $\mathcal{U}_{NN}(z) \equiv U_{\rm eff}^{(N)}(z)$ принимает вид:

$$U_{\rm eff}^{(N)}(z) \approx 2E_w\int_0^\infty R_{N,0}^2(\rho)\,U\Big(\sqrt{z^2+\rho^2}\Big)\,\rho\,d\rho \equiv 2E_w\,\widetilde{U}_N(z). \qquad (55)$$

Вводя безразмерную переменную $t = \rho^2/(2a^2)$, имеем $\rho\,d\rho = a^2\,dt$ и

$$\widetilde{U}_N(z) = \frac{1}{n_r!}\int_0^\infty [L_{n_r}(t)]^2\,e^{-t}\,U\Big(\sqrt{z^2+2a^2t}\Big)\,dt, \quad N = 2n_r. \qquad (56)$$

Раскладывая на кулоновскую и линейную части потенциала Корнелла:

$$\widetilde{U}_N^{(\alpha_s)}(z) = -\frac{\alpha_s}{n_r!}\int_0^\infty \frac{[L_{n_r}(t)]^2 e^{-t}}{\sqrt{z^2+2a^2t}}\,dt, \qquad (57)$$

$$\widetilde{U}_N^{(\sigma)}(z) = \frac{\sigma}{n_r!}\int_0^\infty \sqrt{z^2+2a^2t}\,[L_{n_r}(t)]^2 e^{-t}\,dt. \qquad (58)$$

Оба интеграла не выражаются в замкнутой форме при произвольном n_r, но вычисляются с хорошей точностью квадратурой Гаусса–Лагерра.

Поэтому на данном этапе имеет смысл исследовать асимптотики.

При $|z| \gg a\sqrt{N+1}$ средняя поперечная область существования пары $\langle\rho^2\rangle_N \approx 2a^2(N+1)$ мала по сравнению с z^2, и

$$\widetilde{U}_N(z) \xrightarrow[|z|\gg a\sqrt{N+1}]{} U(z) + \frac{a^2(N+1)}{2z^2}\Big[\sigma z + \frac{\alpha_s}{2z}\Big] + \mathcal{O}\left(\frac{a^4N^2}{z^4}\right). \tag{59}$$

При $n_r = 0$ ($N = 0$, $L_0 \equiv 1$) выражение (56) воспроизводит результат (13) исходной модели. При $n_r \geq 1$ наличие полиномов $L^2_{n_r}(t)$ модифицирует жёсткость осциллятора: для высших уровней потенциальная яма становится шире, поскольку среднее $\langle\rho^2\rangle_N = 2a^2(2n_r+1)$ растёт линейно с N, и поперечное распределение пары захватывает большую область.

Гармоническое приближение для уровней

Разложим $U^{(N)}_{\text{eff}}(z)$ вблизи $z = 0$ до второго порядка:

$$U^{(N)}_{\text{eff}}(z) = U^{(N)}_0 + \frac{1}{2}\mu\,(\omega_N)^2\,z^2 + \mathcal{O}(z^4), \tag{60}$$

где константа $U^{(N)}_0 = 2E_w\widetilde{U}_N(0)$ и частота ω_N выражаются через интегралы с полиномами Лагерра:

$$(\omega_N)^2 = \frac{2E_w}{\mu}\,\mathcal{K}_N, \quad \mathcal{K}_N = \frac{1}{n_r!}\int_0^\infty [L_{n_r}(t)]^2 e^{-t}\,\frac{\sigma\,(2a^2t) + \alpha_s}{(2a^2t)^{3/2}}\,dt. \tag{61}$$

При $n_r = 0$ имеем $L_0(t) = 1$ и интеграл $\mathcal{K}_0$ воспроизводит выражение для ω^2 исходной модели. При $n_r \geq 1$ присутствие полиномов Лагерра уменьшает $\mathcal{K}_N$, и соответственно $\omega_N < \omega_0$ — для высших уровней связь оказывается слабее.

Экранирование в термополевой теории

Заменим теперь δ-функциональное ядро (20) исходной модели на физически более реалистичное Дебаевское ядро экранирования. В активной среде — кварк-глюонной плазме — при температуре T имеет место масса Дебая m_D. Цветовые заряды экранируют глюонный обмен на расстояниях $r \gtrsim m_D^{-1}$, где длина Дебая $\lambda_D = m_D^{-1}$ задаёт характерный пространственный масштаб межпарного взаимодействия. Дебаевская масса, взятая в ведущем порядке модели

Hard Thermal Loop (HTL), используемой в термополевых задачах в рамках квантовой хромодинамики, имеет вид [40]:

$$m_D^2(T) = g_s^2\, T^2 \left(\frac{N_c}{3} + \frac{N_f}{6} \right) + \mathcal{O}(g_s^4), \tag{62}$$

где $g_s^2 = 4\pi\alpha_s$, $N_c = 3$ (число цветов), N_f — число активных ароматов кварков ($N_f = 2$ при $T \lesssim m_s$ и $N_f = 3$ при $T \gtrsim m_s$, то есть при характерных температурах ядер магнитаров и коллапсаров).

Взаимодействие между парами в плазме описывается тогда ядром Юкавы:

$$K(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{e^{-m_D|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{63}$$

Рассмотрим предельные случаи. При $m_D \to 0$ ядро обращается в кулоновскую форму $K(r) \to 1/(4\pi r)$. При $m_D \to \infty$ имеем

$$\lim_{m_D \to \infty} \frac{e^{-m_D r}}{4\pi r} = \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{r})}{m_D^2}, \tag{64}$$

что воспроизводит δ-функциональное приближение исходной оценочной модели с эффективной константой связи $g_{\text{eff}} \sim -4\pi\alpha_s C_F/m_D^2$, $C_F = (N_c^2 - 1)/(2N_c) = 4/3$.

Запишем теперь эффективный потенциал термостата с учётом дебаевского экранирования:

$$V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = g_{\text{eff}}\, n(T) \int d^3r'\, \frac{e^{-m_D|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, |\Psi(\mathbf{r}')|^2. \tag{65}$$

В Фурье-представлении ядро Юкавы:

$$\frac{e^{-m_D r}}{4\pi r} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2 + m_D^2}, \tag{66}$$

что обеспечивает факторизацию поперечной и продольной частей. Используя

$$\int \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2}\, \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp\cdot\rho}}{k_\perp^2 + k_z^2 + m_D^2} = \frac{1}{2\pi}\, K_0\!\left(\rho\sqrt{k_z^2 + m_D^2} \right), \tag{67}$$

где K_0 — модифицированная функция Бесселя второго рода, получаем смешанное представление, удобное для численной реализации.

Разложение V_{eff} по уровням Ландау

Подставляя разложение (52) в (65) и усредняя по поперечным координатам с весом $|\phi_{N,0}(\rho)|^2$, получаем модификацию $V_{\text{eff}}^{(N)}(z)$ для каждого уровня N:

$$V_{\text{eff}}^{(N)}(z) = g_{\text{eff}}\, n(T) \sum_{N'=0,2,\dots} \mathcal{W}_{NN'}[z;\{\chi_{N'}\}], \tag{68}$$

где интегральный оператор:

$$\mathcal{W}_{NN'}[z;\{\chi_{N'}\}] = \int_{-\infty}^{\infty} dz'\, |\chi_{N'}(z')|^2\, \mathcal{F}_{NN'}(z-z';m_D), \tag{69}$$

с ядром свёртки:

$$\mathcal{F}_{NN'}(Z;m_D) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{2\pi}\, e^{ik_z Z}\, F_{NN'}(k_z;m_D), \tag{70}$$

а форм-фактор поперечного перекрытия:

$$\begin{aligned} F_{NN'}(k_z;m_D) = \int_0^\infty \rho\, d\rho \int_0^\infty \rho'\, d\rho'\, R_{N,0}^2(\rho)\, R_{N',0}^2(\rho') \\ \times \frac{1}{2\pi}\, K_0\Big(|\rho-\rho'|\sqrt{k_z^2+m_D^2}\Big). \end{aligned} \tag{71}$$

Точное вычисление (71) требует трёхмерной численной квадратуры, но структура уравнения сохраняется при любом n_r, n_r'.

Потому здесь также рассмотрим предельные случаи. В пределе слабого экранирования ($m_D \to 0$, $k_z = 0$) функция $K_0(\rho m_D) \to -\ln(m_D\rho/2) + O(m_D^2)$ логарифмически расходится по стандартному длинноволновому "инфракрасному"сценарию. Расходимость обрезается средним межчастичным расстоянием $r_{\text{sep}} \sim n^{-1/3}$. В пределе сильного экранирования ($m_D \gg 1/a$) функция $K_0(\rho m_D) \approx \sqrt{\pi/(2m_D\rho)}\, e^{-m_D\rho}$, и ядро сжимается к δ-функции, восстанавливая исходную оценочную модель.

Релятивистская плотность пар (общий случай)

В общем релятивистском случае плотность пар как составных бозонов с массой M и числом степеней свободы g_s выражается как:

$$n(T) = \frac{g_s}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2\, dp}{e^{\sqrt{p^2+M^2}/T} - 1}. \tag{72}$$

Этот интеграл можно разложить в ряд по функциям Бесселя [40]:

$$n(T) = \frac{g_s\, M^2\, T}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\, K_2\!\left(\frac{kM}{T}\right), \tag{73}$$

где K_2 — модифицированная функция Бесселя второго рода.

Рассматривая предельные случаи, получаем, что в нерелятивистском случае ($T \ll M$) плотность пар имеет больцмановский профиль: $n(T) \approx g_s\,(MT/2\pi)^{3/2}\, e^{-M/T}$; в ультрарелятивистском случае же ($T \gg M$): $n(T) \approx g_s\,\zeta(3)\, T^3/\pi^2$ — воспроизводит (41).

Релятивистское термодинамическое усреднение

В общем случае средняя ширина аннигиляции по импульсам пары:

$$\langle \Gamma \rangle = \Gamma^B_{\text{rest}} \cdot \langle \gamma \rangle_T, \quad \langle \gamma \rangle_T = \frac{1}{M} \frac{\int_0^\infty E_P\, P^2\, dP/(e^{E_P/T} - 1)}{\int_0^\infty P^2\, dP/(e^{E_P/T} - 1)}. \tag{74}$$

Через функции Бесселя интегралы записываются как:

$$\int_0^\infty \frac{P^2\, dP}{e^{E_P/T} - 1} = T^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[2\left(\frac{kM}{T}\right)^2 K_2\!\left(\frac{kM}{T}\right) + \frac{kM}{T} K_1\!\left(\frac{kM}{T}\right) \right], \tag{75}$$

$$\int_0^\infty \frac{E_P\, P^2\, dP}{e^{E_P/T} - 1} = MT^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[3\left(\frac{kM}{T}\right) K_3\!\left(\frac{kM}{T}\right) + \left(\frac{kM}{T}\right)^2 K_2\!\left(\frac{kM}{T}\right) \right]. \tag{76}$$

Рассматривая предельные случаи, получаем, что в нерелятивистском пределе ($T \ll M$): $\langle \gamma \rangle_T \to 1 + 3T/(2M) + \ldots$; тогда как в ультрарелятивистском пределе ($T \gg M$) соответствует оценочной модели: $\langle \gamma \rangle_T \to \pi^4/(30\zeta(3)) \cdot kT/M$

Полная замкнутая система уравнений

Объединяя (53), (55), (68) и условие $\beta = (\mu\omega_N)^{1/2}$ для каждого уровня (в гармоническом приближении), получаем замкнутую нелинейную дифференциально-интегральную систему для продольных амплитуд $\chi_N(z)$, $N = 0, 2, 4, \ldots, N_{\max}$:

$$\boxed{\begin{aligned}&\left[-\frac{1}{2\mu}\frac{d^2}{dz^2}+\frac{1}{2}\mu\,(\omega_N)^2 z^2+U_0^{(N)}+\varepsilon_N\right]\chi_N(z)\\&\quad+\sum_{N'}\mathcal{U}^{\mathrm{off}}_{NN'}(z)\,\chi_{N'}(z)+g_{\mathrm{eff}}\,n(T)\sum_{N'}\mathcal{W}_{NN'}[z;\{\chi_{N'}\}]=\mathcal{E}_N\,\chi_N(z),\end{aligned}} \tag{77}$$

с условием нормировки:

$$\sum_{N=0,2,\ldots}\int_{-\infty}^{\infty}|\chi_N(z)|^2\,dz=1. \tag{78}$$

Важно также отметить, что при конечной температуре T уровни Ландау с $\varepsilon_N \gg T$ не заселены, что определяет их верхнюю границу (обрезание спектра):

$$N_{\max}\approx\frac{2T}{\hbar\omega_c}=\frac{2\mu T}{e_q B}. \tag{79}$$

При характерных параметрах катастрофического сценария ($B\sim 10^{18}$ Гс, $T\sim$ 200 МэВ, $\mu\sim 5$ МэВ) обрезание даёт $N_{\max}\sim 10-50$ уровней.

Квадрат волновой функции в точке аннигиляции с учётом всех уровней

Из разложения (52) и $\phi_{N,0}(0)=R_{N,0}(0)/\sqrt{2\pi}=1/(a\sqrt{\pi})$:

$$|\Psi(0)|^2=\left|\sum_{N=0,2,\ldots}\phi_{N,0}(0)\,\chi_N(0)\right|^2=\frac{1}{\pi a^2}\left|\sum_{N=0,2,\ldots}\chi_N(0)\right|^2. \tag{80}$$

При рассмотрении процессов аннигиляции в магнитном поле имеют место эффекты конструктивной и деструктивной интерференции, возникающей в следствие смешения уровней Ландау. В контексте продольной волновой функции имеет место когерентная и некогерентная сумма вероятностей аннигиляции.

Когерентная сумма (80) учитывает интерференцию между амплитудами разных уровней Ландау и может приводить как к усилению, так и к ослаблению вероятности аннигиляции в зависимости от относительных фаз $\chi_N(0)$. В некогерентном пределе (фазы случайны или быстро осциллируют):

$$|\Psi(0)|^2_{\text{incoh}} = \frac{1}{\pi a^2} \sum_{N=0,2,\ldots} |\chi_N(0)|^2. \tag{81}$$

В контексте численной реализации интерференция между уровнями оказывается важной при $kT \lesssim \hbar\omega_c$, когда заселены лишь несколько низших уровней; при $kT \gg \hbar\omega_c$ некогерентный предел становится оправданным.

Итоговое выражение для средней ширины аннигиляции

Объединяя релятивистское усреднение (74) с когерентной суммой (80) и формализмом матричного элемента [30], получаем окончательное выражение для средней ширины аннигиляции в расширенной модели:

$$\boxed{\langle \Gamma^B \rangle = \frac{1}{32\pi} \left| \sum_{N=0,2,\ldots} b_N(T,B)\, B_B^{(N)} \right|^2 \cdot \langle \gamma \rangle_T,} \tag{82}$$

где:

- $b_N(T,B) = \chi_N(0; m_D(T), n(T)) / \sum_{N'} \chi_{N'}(0; m_D(T), n(T))$ — весовые коэффициенты, зависящие от температуры через параметры $m_D(T)$ и $n(T)$;
- $B_B^{(N)}$ — амплитуды распада для каждого уровня Ландау, вычисляемые по формализму матричного элемента [30] с использованием Фурье-образа волновой функции уровня N:

$$\widetilde{\phi}_{N,0}(q_\perp) = \int_0^\infty R_{N,0}(\rho)\, J_0(q_\perp \rho)\, \rho\, d\rho = a\,(-1)^{n_r}\, L_{n_r}\!\left(a^2 q_\perp^2\right)\, e^{-a^2 q_\perp^2/2}, \tag{83}$$

где J_0 — функция Бесселя первого рода; $\langle \gamma \rangle_T$ — релятивистский средний лоренц-фактор из (74).

Интересно также отметить, что в формуле (83) знакочередующийся множитель, возможно, $(-1)^{n_r}$ указывает на каналы интерференции между вкладами разных уровней Ландау в $B_B^{(N)}$, что и должно породить интерференцию между амплитудами в полной сумме (82).

Сравнение пределов с оценочной моделью

Резюмируя необходимые из представленных ранее предельных случаев, можно показать, что при $m_D \to \infty$ и $kT \gg M$ выражение (82) должно воспроизводить оценочный результат (43) исходной модели.

Во-первых, при $kT \ll \hbar\omega_c$ заселён только $N = 0$, и сумма в (82) сводится к одному члену с $b_0 = 1$. Если $kT \gg M$, то $\langle\gamma\rangle_T \to \pi^4/(30\zeta(3)) \cdot kT/M$.

Во-вторых, при $m_D \to \infty$ ядро $\mathcal{F}_{NN'} \to \delta(z - z')\,|\phi_{N,0}(0)|^2/m_D^2$, и (68) переходит в локальное взаимодействие $V_{\text{eff}} \approx (g_{\text{eff}}/m_D^2)\,n(T)|\Psi(z)|^2$, что соответствует δ-приближению исходной модели с константой $g \to g_{\text{eff}}/m_D^2$.

В третьих, при $kT \gg M$ выражение для $n(T)$ из (73) переходит в (41), а $\langle\gamma\rangle_T$ — в ультрарелятивистскую асимптотику.

Таким образом, получаем, что в этих пределах (82) действительно воспроизводит (43), что подтверждает внутреннюю согласованность построения.

Обсуждение возможности численной реализации

Численная реализация планируется в виде расчётного кода на языке Fortran (из соображений быстродействия численных квадратур и тригонометрических преобразований) с визуализацией результатов на языке Python: зависимости $\langle\Gamma^B\rangle(T, B)$, профили $\chi_N(z)$, заселённости уровней, температурные кривые охлаждения для спокойного сценария и кривые энерговыделения для катастрофического.

Таблица 1 — Параметрический диапазон численного расчёта.

Параметр	Диапазон
Магнитное поле B	$10^{15} - 10^{19}$ Гс
Температура T	$50 - 300$ МэВ
Масса кварка m_q	$5 - 100$ МэВ
Константа сильного взаимодействия α_s	$0.19 - 0.4$
Константа струнного натяжения σ	0.18 ГэВ^2
Число активных ароматов N_f	2 или 3
Обрезание Ландау $N_{\max}$	$\sim 10 - 50$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате работы было показано, что учёт коллективных эффектов в плотной кварк-антикварковой плазме существенно модифицирует ширину аннигиляции пар в сильном магнитном поле.

В оценочной модели (Часть I) было получено первичное аналитическое выражение (43) для средней ширины аннигиляции. В высокотемпературной асимптотике средняя ширина демонстрирует степенной рост $\langle\Gamma\rangle \propto T^4$ (с зависимостью от поля $\widetilde{C}(B) \propto B^{3/8}$). При таких условиях даже небольшой градиент температуры в кварковом ядре магнитара или коллапсаре может приводить к резкому всплеску аннигиляционной активности.

В расширенной модели (Часть II) построена замкнутая нелинейная дифференциально-интегральная система уравнений (77) для амплитуд $\chi_N(z)$ продольных волновых функций на каждом уровне Ландау с $m = 0$, $N = 0, 2, 4, \ldots, N_{\max}$. В данной модели были учтены:

- полный спектр уровней Ландау с обрезанием $N_{\max}$ по (79); также было установлено, что только чётные уровни $(m = 0)$ вносят вклад в аннигиляцию, и $|\phi_{N,0}(0)|^2 = 1/(\pi a^2)$ не зависит от N;
- дебаевское экранирование (65) с массой $m_D(T)$ в рамках формализма термополевой теории; в пределе $m_D \to \infty$ проверено δ-функциональное приближение оценочной модели;
- обобщённое релятивистское термодинамическое усреднение через функции Бесселя (73), (75)–(76); в пределе $kT \gg M$ проверен ультрарелятивистский результат оценочной модели.

Полученные результаты непосредственно применимы к двум сценариям астрофизических процессов, описанных во введении:

В спокойном сценарии (стабильные магнитары) усиление аннигиляции кваркония в ядре коллективным взаимодействием в магнитном поле может корректировать кривые нейтринного охлаждения молодых магнитаров в качестве добавки к классическим URCA-процессам в нуклонной коре магнитаров [12; 13].

В катастрофическом сценарии (задержанный коллапс или коллапсары после слияний нейтронных звёзд) лавинное усиление темпов аннигиляции в плотной горячей среде с экстремальным магнитным полем может обеспечить мощный многоканальный выброс энергии: гамма-всплески, быстрые радиовсплески, нейтринные всплески и гравитационные волны [10; 14; 17; 22]. Особенно перспективным является кросс-корреляционный анализ: одновременная регистрация сигналов в этих каналах от одного коллапсарного события могла бы предоставить полезные данные для проверки модели и определения параметров фазового перехода (кварконизации).

Полученные в настоящей работе теоретические результаты служат фундаментом для дальнейшего численного исследования и сопоставления с многоканальной наблюдательной программой современной астрофизики компактных объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bromm V., Coppi P. S., Larson R. B. The Formation of the First Stars. I. The Primordial Star-forming Cloud // Astrophys. J. — 2002. — Т. 564. — С. 23—51. — DOI: 10.1086/323947.

2. How Massive Single Stars End Their Life / A. Heger [и др.] // Astrophys. J. — 2003. — Т. 591. — С. 288—300. — DOI: 10.1086/375341.

3. Thompson C., Duncan R. C. Neutron star dynamos and the origins of pulsar magnetism // Astrophys. J. — 1993. — Т. 408. — С. 194—217. — DOI: 10.1086/172580.

4. The Magnetorotational Instability in Core-Collapse Supernova Explosions / S. Akiyama [и др.] // Astrophys. J. — 2003. — Т. 584. — С. 954—970. — DOI: 10.1086/344135.

5. Signals of the QCD Phase Transition in Core-Collapse Supernovae / I. Sagert [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2009. — Т. 102. — С. 081101. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.081101.

6. Quark deconfinement as a supernova explosion engine for massive blue supergiant stars / T. Fischer [и др.] // Nature Astron. — 2018. — Т. 2. — С. 980—986. — DOI: 10.1038/s41550-018-0583-0.

7. Color superconductivity in dense quark matter / T. Schäfer [и др.] // Phys. Rev. D. — 2004. — Т. 70. — С. 114037. — DOI: 10.1103/PhysRevD.70.114037.

8. Constraining hadron-quark phase transition parameters within the quark-mean-field model using multi-messenger observations of neutron stars / Z. Miao [и др.] // Astrophys. J. — 2020. — Т. 904. — С. 103. — DOI: 10.3847/1538-4357/abbd41.

9. Duncan R. C., Thompson C. Formation of very strongly magnetized neutron stars: Implications for gamma-ray bursts // Astrophys. J. — 1992. — Т. 392. — С. L9—L13. — DOI: 10.1086/186413.

10. Huang X.-R., Sun H., Zhang B. Quark deconfinement in neutron-star mergers and supernova collapsars // Astrophys. J. — 2024. — Т. 979. — С. 151. — DOI: 10.3847/1538-4357/ad8b27.

11. Detecting the hadron-quark phase transition with gravitational waves / M. Hanauske, L. Bovard, E. R. Most [и др.] // J. Astrophys. Astron. — 2018. — Т. 39. — С. 45. — DOI: 10.1007/s12036-018-9540-7.

12. Iwamoto N. Quark Beta Decay and the Cooling of Neutron Stars // Phys. Rev. Lett. — 1980. — Т. 44. — С. 1637—1640. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.44.1637.

13. Neutrino emission from neutron stars / D. G. Yakovlev [и др.] // Phys. Rep. — 2001. — Т. 354. — С. 1—155. — DOI: 10.1016/S0370-1573(00)00131-9.

14. Hadron-quark phase transition in core-collapse supernovae and binary neutron-star mergers / Z. Lin [и др.] // Phys. Rev. D. — 2024. — Т. 109. — С. 023005. — DOI: 10.1103/PhysRevD.109.023005.

15. Bromm V., Loeb A. High-Redshift Gamma-Ray Bursts from Population III Progenitors // Astrophys. J. — 2006. — Т. 642. — С. 382—388. — DOI: 10.1086/500799.

16. Toma K., Sakamoto T., Mészáros P. Population III Gamma-Ray Burst Afterglows: Constraints on Stellar Masses and External Medium Densities // Astrophys. J. — 2011. — Т. 731. — С. 127—137. — DOI: 10.1088/0004-637X/731/2/127.

17. Margalit B., Berger E., Metzger B. D. Fast Radio Bursts from Magnetars Born in Binary Neutron Star Mergers and Accretion-induced Collapse // Astrophys. J. — 2019. — Т. 841. — С. 14—30. — DOI: 10.3847/1538-4357/ab4c31.

18. Margalit B., Metzger B. D. Constraining the Maximum Mass of Neutron Stars from Multi-messenger Observations of GW170817 // Astrophys. J. Lett. — 2018. — Т. 850. — С. L19. — DOI: 10.3847/2041-8213/aa991c.

19. Evidence for High-Energy Extraterrestrial Neutrinos at the IceCube Detector / M. G. Aartsen [и др.] // Science. — 2013. — Т. 342. — С. 1242856. — DOI: 10.1126/science.1242856.

20. Murase K., Ioka K. TeV–PeV Neutrinos from Low-Power Gamma-Ray Burst Jets inside Stars // Phys. Rev. Lett. — 2013. — Т. 111. — С. 121102. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.121102.

21. Prospects for Observing and Localizing Gravitational-Wave Transients with Advanced LIGO, Advanced Virgo and KAGRA / R. Abbott [и др.] // Living Rev. Relativ. — 2020. — Т. 23. — С. 3. — DOI: 10.1007/s41114-020-00026-9.

22. Multi-messenger Observations of a Binary Neutron Star Merger / B. P. Abbott [и др.] // Astrophys. J. Lett. — 2017. — Т. 848. — С. L12. — DOI: 10.3847/2041-8213/aa91c9.

23. Fukushima K., Kharzeev D. E., Warringa H. J. The chiral magnetic effect // Phys. Rev. D. — 2008. — Т. 78. — С. 074033. — DOI: 10.1103/PhysRevD.78.074033.

24. Electromagnetic field evolution in relativistic heavy-ion collisions / V. Voronyuk [и др.] // Phys. Rev. C. — 2012. — Т. 83. — С. 054911. — DOI: 10.1103/PhysRevC.83.054911.

25. Tuchin K. Time and space dependence of the electromagnetic field in relativistic heavy-ion collisions // Phys. Rev. C. — 2013. — Т. 88. — С. 024911. — DOI: 10.1103/PhysRevC.88.024911.

26. Landau L. D., Lifshitz E. M. Quantum Mechanics. — Pergamon Press, 1965.

27. Sokolov A. A., Ternov I. M. Radiation from Relativistic Electrons. — AIP, 1986.

28. Quarkonium states in a complex-valued potential / M. Margotta [и др.] // Phys. Rev. D. — 2011. — Т. 83. — С. 105019. — DOI: 10.1103/PhysRevD.83.105019.

29. Quarkonium production in heavy ion collisions: coupled Boltzmann transport equations / C. S. Machado [и др.] // Phys. Rev. D. — 2013. — Т. 88. — С. 034009. — DOI: 10.1103/PhysRevD.88.034009.

30. Koshelkin A. V. Quarkonium states in strong magnetic fields // Il Nuovo Cimento C. — 2024. — Т. 47. — DOI: 10.1393/ncc/i2024-24200-3.

31. Koshelkin A. V. Open Relativistic Two-body Problem // Int. J. of Theor. Phys. — 2025. — Т. 64. — DOI: 10.1007/s10773-025-06059-6.

32. Shovkovy I. A. Magnetic Catalysis: A Review. Т. 871. — Springer, 2013. — С. 13—49. — (Lecture Notes in Physics). — DOI: 10.1007/978-3-642-37305-3_2.

33. Magnetic susceptibility and equation of state of $N_f = 2 + 1$ QCD with physical quark masses / C. Bonati [и др.] // Phys. Rev. D. — 2014. — Т. 89. — С. 054506. — DOI: 10.1103/PhysRevD.89.054506.

34. Magnetic field-induced gluonic (inverse) catalysis and pressure (an)isotropy in QCD / G. S. Bali [и др.] // J. High Energy Phys. — 2013. — Т. 2013, № 4. — С. 130. — DOI: 10.1007/JHEP04(2013)130.

35. Lin S., Yang L. Chiral kinetic theory from Landau level basis // Phys. Rev. D. — 2020. — Т. 101. — С. 034006. — DOI: 10.1103/PhysRevD.101.034006.

36. Chiral magnetic effect in isobaric collisions / H. X.-G. [и др.] // Nuclear Physics A. — 2017. — Т. 967. — С. 736—739. — DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2017.05.071.

37. Crater H. W., Van Alstine P. Two-body Dirac equations for particles interacting through world scalar and vector potentials // Phys. Rev. D. — 1987. — Т. 36. — С. 3007—3036. — DOI: 10.1103/PhysRevD.36.3007.

38. Crater H. W. Singlet-positronium decay using a relativistic wave function // Phys. Rev. A. — 1991. — Т. 44. — С. 7065—7070. — DOI: 10.1103/PhysRevA.44.706.

39. Alford J., Strickland M. Charmonia and bottomonia in a magnetic field // Phys. Rev. D. — 2013. — T. 88. — C. 105017. — DOI: 10.1103/PhysRevD.88.105017.

40. Le Bellac M. Thermal Field Theory. — Cambridge University Press, 1996.