

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

УДК 531.3, 539.1.05

**ОТЧЁТ О
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ИСТОЧНИКА
ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДОВ МАШИННОГО
ОБУЧЕНИЯ**

Студент _____ А. А. Козлов

Научный руководитель,
ассистент кафедры 40 _____ Д. В. Попов

Москва 2026

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	2
1 Обучение модели машинного обучения на основе данных моделирования для модульного нейтринного детектора	3
1.1 Обзор данных, полученных из моделирования	3
1.2 Конструирование дополнительных признаков	4
1.3 Выбор модели для обучения	6
1.3.1 Градиентный бустинг	7
1.3.2 К ближайших соседей	8
1.4 Обучение модели на основе градиентного бустинга	9
1.5 Обучение модели KNN	14
1.6 Результаты обучения моделей на данных моделирования	17
2 Восстановление положения точечного источника излучения моделью GBT на основе данных моделирования	18
2.1 Обзор данных моделирования	18
2.2 Восстановление положения источника моделью GBT	19
2.3 Обсуждение результатов	19
3 Заключение	22
Список использованных источников	23

ВВЕДЕНИЕ

В экспериментальные задачи современной физики элементарных частиц входит восстановление точки (или вершины) взаимодействия. В случае с антинейтрино реакторного происхождения и ОБР - точки, в которой родился позитрон и нейтрон. Данная задача является одной из основополагающих для нейтринного сцинтилляционного детектора на основе пластиковых сцинтилляторов, разрабатываемого в МИФИ для реакторного мониторинга.

С решением данной задачи могут помочь современные методы машинного обучения, активно применяемые в физике последние несколько десятков лет [1]. Машинные алгоритмы эффективно справляются с восстановлением координат различных событий при наличии информации о геометрии детектора и иных вспомогательных данных.

В связи с этим разработка собственного алгоритма по восстановлению положения источника излучения становится актуальной и востребованной задачей в рамках разработки нового нейтринного детектора.

1 ОБУЧЕНИЕ МОДЕЛИ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ МОДУЛЬНОГО НЕЙТРИННОГО ДЕТЕКТОРА

1.1 ОБЗОР ДАННЫХ, ПОЛУЧЕННЫХ ИЗ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для решения задачи восстановления положения источника излучения методами машинного обучения были получены данные моделирования в среде GEANT4 для прототипа детектора нейтрино на основе пластиковых сцинтилляторов.

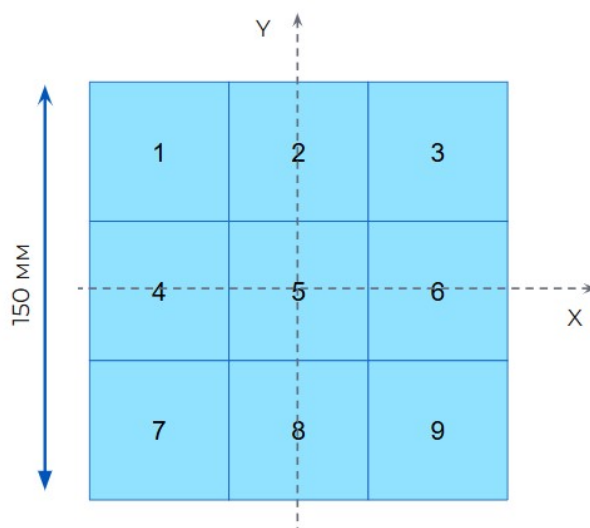


Рисунок 1.1 — Схема детекторного блока нейтринного детектора для моделирования

Детектор представляет собой 9 пластиковых сцинтилляторов размерами 50 x 50 x 700 мм, изготовленных из полистирола с добавками п-

терфенила и ПОПОП. В модели сцинтилляторы размещены вплотную друг к другу и образуют параллелепипед со сторонами 150 x 150 x 700 мм. Их поверхность покрыта слоем лития.

Всего было сгенерировано 10 миллионов событий с вылетом гамма-кванта с заданной энергией из случайной точки пространства, имеющей координаты X , Y , Z . Энергия гамма-кванта варьировалась в пределах до 10 МэВ, координаты начальной точки распределялись случайно равномерным образом. После первичной обработки данных было получено 2 812 362 полезных событий, на которых производилось обучение модели.

Помимо известных данных о начальной энергии и координатах точки розыгрыша частицы из моделирования были получены сведения об энерговыделении в каждом отдельном сцинтилляторе в рамках одного события. Таким образом, формировалась тепловая карта события, на основе которой и проводилось дальнейшее восстановление положения источника излучения.

1.2 КОНСТРУИРОВАНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПРИЗНАКОВ

Одним из важнейших этапов подготовки данных для обучения модели является этап конструирования новых признаков, которые могли бы дать информацию о свойствах объекта, которые могут играть важную роль в решении поставленной задачи регрессии или классификации.

В случае нашего эксперимента наиболее важным параметром для передачи в модель является геометрия детектора и события. Оригинальные данные содержат информацию об энерговыделении в отдельных сцинтилляторах, но не описывают геометрическую конфигурацию детектора, что может осложнить восстановления положения источника излучения.

В связи с этим был предложен ряд искусственных параметров, созданных на основе первичных данных, которые могли бы явным образом

задать геометрические закономерности события:

- 1) Center of Gravity (CoG, центр тяжести) для осей X и Y

$$\text{CoG}_x = \frac{\sum E_{dep_i} * X_i}{\sum E_{dep_i}}$$

X_i – координата центра одного сцинтиллятора

E_i – энергосодержание в сцинтилляторе в рамках одного события

CoG является популярным [2–4] искусственным параметром для уточнения геометрии детектора, применяется в задачах ускорительной физики. Использование данного параметра позволяет предоставить модели информацию о затронутых событием детекторах в рамках одного значения.

- 2) grad(x) и grad(y) – разность энергий между противоположными краями детектора, нормированная на полную энергию

$$\text{grad}(x) = \frac{E_1 + E_4 + E_7 - E_3 - E_6 - E_9}{E_{total}}$$

$$\text{grad}(y) = \frac{E_1 + E_2 + E_3 - E_7 - E_8 - E_9}{E_{total}}$$

Данный параметр рассчитывался как разность высказанных энергий, нормированных на суммарную энергию события, для сработавших в событии сцинтилляторов. Для градиента по оси OX считалась разность между суммарными сигналами с троек детекторов 1, 4, 7 и 3, 6, 9; для градиента по оси OY – с троек 1, 2, 3 и 7, 8, 9 соответственно. Этот признак закладывает асимметрию события и косвенно указывает на возможное положение трека частицы.

- 3) Асимметрия центра – отношение E_{dep_5}/E_{total} дополнительное указание для модели на геометрию события

Данный признак позволяет при необходимости отобрать события, взаимодействие в которых произошло в центральном сцинтилляторе.

- 4) Доли энергии в каждом отдельном детекторе, нормированные на E_{total}

Данный признак позволяет отучить модель фокусироваться на абсолютных значениях энергии и помогает ей адаптироваться к ситуациям с различными её значениями.

5) Логарифмы энерговыделения для учёта краевых эффектов

Распределение энерговыделения пролетающей частицы может иметь тяжёлый "хвост" в области высоких значений, что фактически будет являться выбросом на фоне других данных моделирования, а это негативно скажется на эффективности обучения модели. Логарифм энергии позволит "сжать" распределение, уменьшив абсолютное отклонение таких аномальных событий.

6) Разброс распределения энергии: $\frac{\sigma(E_{dep})}{E_{total}}$

Позволяет лучше интерпретировать сложную геометрию события, произошедшего, например, на границе раздела двух сцинтилляторов. Величина разброса характеризует событие с точки зрения отклика сцинтилляторов на проходящую в них частицу.

1.3 ВЫБОР МОДЕЛИ ДЛЯ ОБУЧЕНИЯ

Задача реконструкции вершины события или же источника излучения является классической для физики элементарных частиц. Данная задача относится к типу регрессионных задач, когда алгоритму необходимо предсказать некую непрерывную величину. В рамках описываемого эксперимента интерес представляет положение точки прилёта частицы в объём детектора.

Также стоит отметить, что в описываемом эксперименте объём табличных данных превышает 100 тысяч строк. Данный факт накладывает требования к эффективности работы модели с точки зрения обработки больших массивов информации. Вместе с тем при решении физических задач важным остаётся возможность физической интерпретации результатов и принципов работы модели.

В связи со всеми описанными выше требованиями наиболее оптимальными для решения поставленной задачи являются модели на основе градиентного бустинга и алгоритм “К ближайших соседей”.

1.3.1 ГРАДИЕНТНЫЙ БУСТИНГ

Модели на основе градиентного бустинга представляют собой ансамбль множества слабых предсказателей – например, деревьев, каждое из которых учится на основе предсказаний, сделанных предыдущим предсказателем. Когда слабый предсказатель делает свой прогноз, модель считает ошибку его предсказания, умножает на шаг обучения, призванный не допустить переобучения, а затем “вычитает” полученный коэффициент из предсказания следующей модели. Таким образом, ансамбль формирует сильный прогноз, являющийся финальным результатом работы всей модели.

Gradient Boost

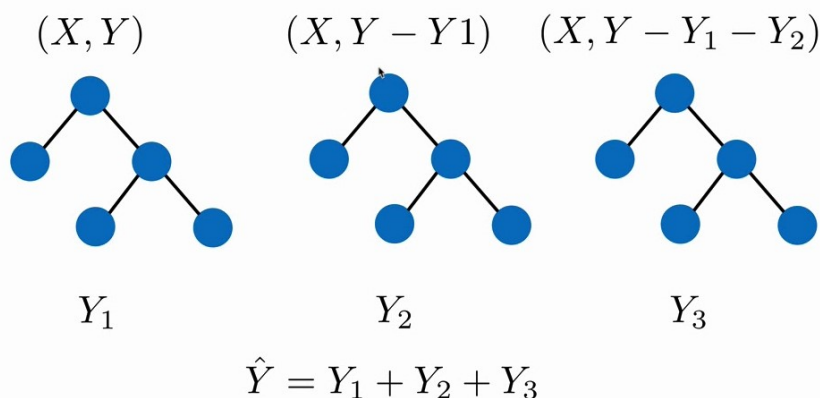


Рисунок 1.2 — Схематичное описание работы алгоритма градиентного бустинга

Модели на основе градиентного бустинга обладают рядом серьёзных преимуществ: они эффективно справляются с табличными данными с множеством строк, хорошо масштабируются, умеют находить скрытые закономерности среди признаков, оптимизированы для больших данных, устойчивы к избыточности признаков.

Ключевым недостатком таких моделей является их способность выучивать

артефакты данных (и, соответственно, переобучаться), а также неэффективная экстраполяция в случае выхода неких параметров за диапазон их значений, заложенный при обучении модели.

1.3.2 К БЛИЖАЙШИХ СОСЕДЕЙ

В свою очередь модель KNN (K nearest neighbors) работает по принципу присваивания объекту неких свойств на основе свойств его соседей. Данный алгоритм относится к так называемым “ленивым алгоритмам”: его не нужно обучать – он просто запоминает выборку целиком.

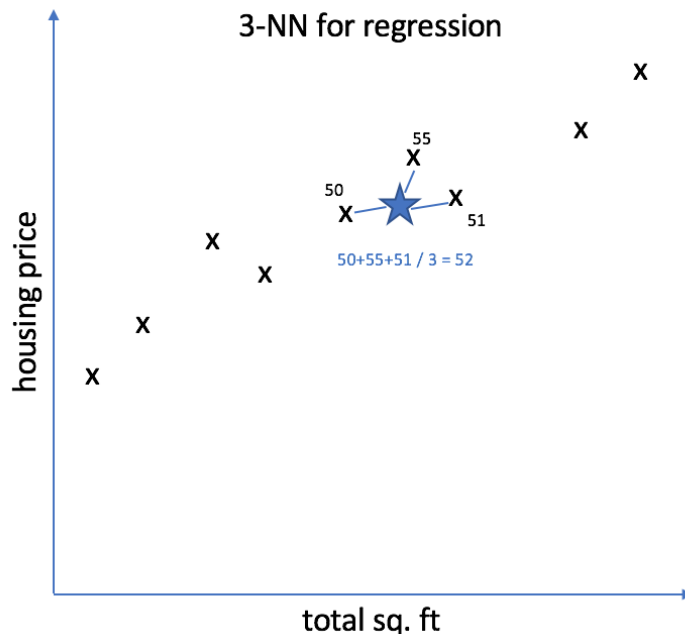


Рисунок 1.3 — Схематическое описание принципа работы регрессора на основе алгоритма KNN

Более того, данный алгоритм может давать эффективные предсказания в области различных аномальных событий, а также обладает способностью к экстраполяции данных. К его достоинствам можно также отнести простоту реализации алгоритма, малое число гиперпараметров, простую физическую интерпретацию работы модели.

Однако вместе с тем KNN плохо масштабируется на большие объёмы данных, подвержен влиянию шумов, не позволяет оценить важность различных признаков при решении задачи.

Таким образом, модели на основе градиентного бустинга и KNN способны дать хороший физический результат при использовании разных подходов к решению задачи регрессии

1.4 ОБУЧЕНИЕ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ГРАДИЕНТНОГО БУСТИНГА

В качестве модели с алгоритмом градиентного бустинга на основе деревьев решения (далее – GBT) была взята модель HistGradientBoostingRegressor из библиотеки scikitlearn для Python. Данная модель оптимизирована для работы с большими данными, чтократно ускоряет процесс её обучения.

Данные моделирования были разбиты на обучающую и тестовую выборки, к признакам был применён скейлер из библиотеки scikitlearn. Скейлер позволяет привести абсолютные значения признаков к одинаковым числовым пределам, что облегчает процесс обучения модели и не позволяет ей сравнивать неравноценные признаки между собой.

Оценка эффективности модели проводилась по двум метрикам: MAE – mean absolute error (модуль среднего отклонения) и RMSE – root mean squared error (корень среднеквадратичного отклонения). Данные метрики являются типичными для оценки эффективности решения задач регрессии в машинном обучении. Стоит отметить, что MAE и RMSE рассчитывались как отдельно для каждой из осей X, Y, Z, так и в виде среднего значения ошибок всех трёх осей при подборе гиперпараметров.

В ходе непосредственного подбора гиперпараметров модели методом анализа значений MAE и RMSE были выбраны следующие оптимальные значения:

- n_estimators: 50 – число слабых предсказателей (деревьев)
- max_depth: 6 – максимальная глубина слабого дерева
- learning_rate: 0.05 – шаг обучения
- tree_method: hist – метод для ускорения работы с табличными данными

- `early_stopping_rounds: 50` – число итераций для прекращения обучения при отсутствии результата

Типичный график зависимости ошибки от значения гиперпараметра представлен на рисунке 1.4.

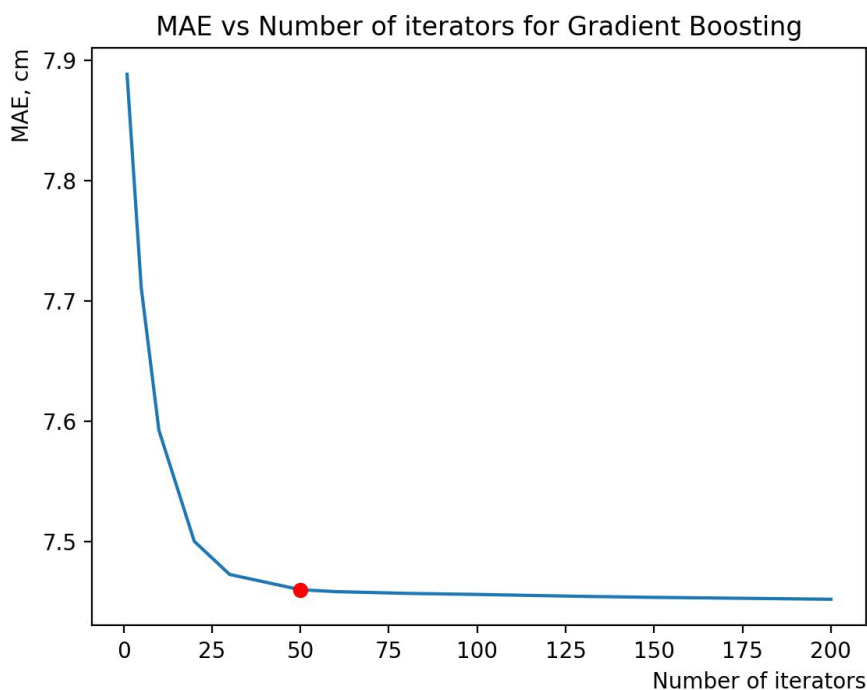


Рисунок 1.4 — График зависимости модуля среднего отклонения от числа голосующих слабых моделей для GDB

Вместе с тем был применён метод перестановок (permutation method) для определения наиболее важных признаков, участвующих в восстановлении координаты источника излучения. Суть данного метода заключается в перемешивании данных внутри одного столбца, соответствующего конкретному признаку. Если предсказания модели после этого действия начинают отличаться от изначальных, то данный признак имеет важное значение для решение задачи регрессии. Таким образом, может быть вычислен коэффициент важности, как разность MAE после и до перестановок. Значение пяти наиболее важных признаков представлено в таблице 1.1 .

Признак	Важность признака для определения МАЕ
CoG	1.13
E_{init}	0.03
asymetry center	0.0012
$E_{dep_4}ratio$	0.007
$E_{dep_6}ratio$	0.003

Таблица 1.1 — Таблица важности признаков для определения положения источника излучения для GDB-модели

Как можно заметить, наибольшее значение для модели имеет признак CoG (центр масс события), который был сконструирован вручную ранее. Следующий за ним признак, начальная энергия частицы, вносит вклад на два порядка меньше, что позволяет предположить потенциальное применение модели для решения задач в реальном эксперименте, где начальная энергия частицы является неизвестным параметром. Таким образом, количество существенных признаков для модели было уменьшено до пяти наиболее значимых, что сказалось на скорости её обучения и работы.

Хотя анализ важности признаков показал доминирующую роль центра тяжести (CoG), его использование в качестве единственного предиктора приводит к систематической ошибке из-за нелинейных эффектов в сегментированных сцинтилляторах. Например, параметр CoG не сможет корректно отразить событие, в рамках которого большая часть пути частицы прошла в центральном сцинтилляторе: центр тяжести предскажет нулевое значение, тогда как энерговыделение в соседних сцинтилляторах позволит скорректировать прогноз. Дополнительные признаки (доли энергии, асимметрия, начальная энергия) выступают в роли нелинейных поправочных коэффициентов, позволяя снизить МАЕ, что критически важно для точной реконструкции.

Далее модель была обучена на тренировочном наборе данных, для каждой из осей были получены значения МАЕ, RMSE, а также был построен график распределения ошибок предсказания модели.

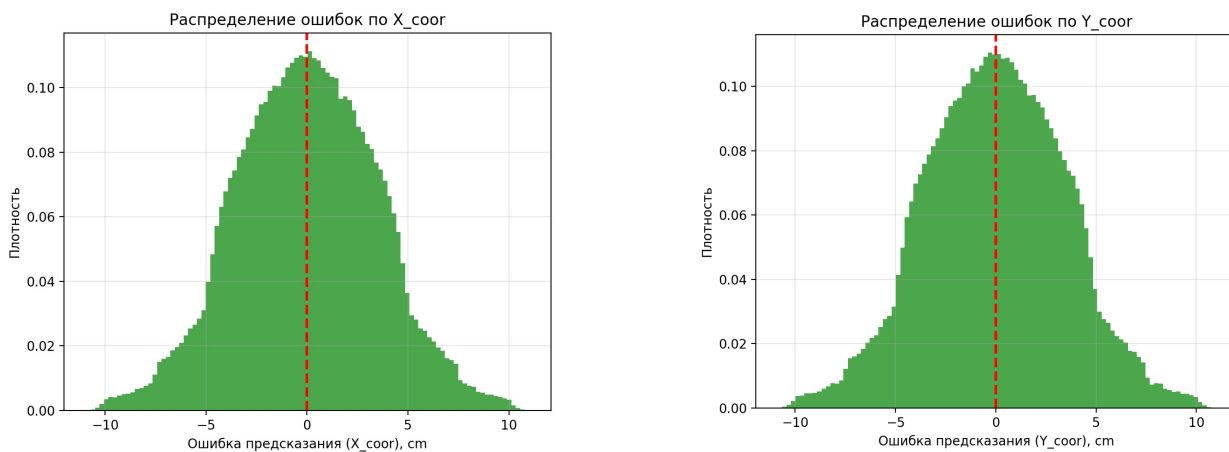


Рисунок 1.5 — Распределение ошибок по координатным осям OX и OY на основе предсказаний, сделанных моделью

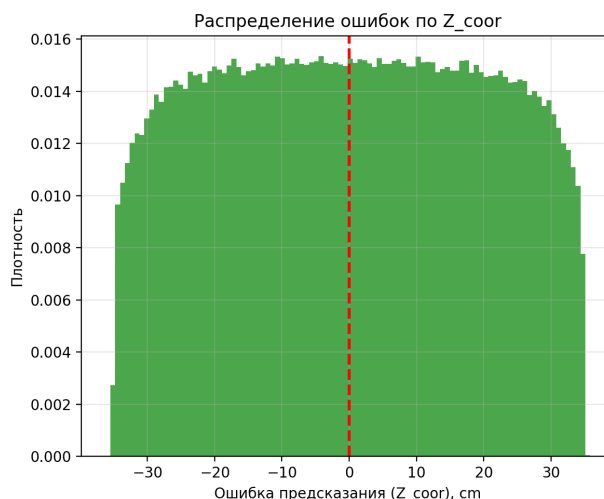


Рисунок 1.6 — Распределение ошибок по оси OZ на основе предсказаний, сделанных моделью

Также был построен график зависимости ошибок предсказания MAE в зависимости от начальной энергии частицы для осей OX , OY , OZ (рис. 1.7).

Распределение ошибок по оси OZ близкое к равномерному говорит нам о том, что модель в силу физических ограничений установки не может эффективно предсказывать эту координату прилетающей частицы. Об этом также свидетельствует график зависимости ошибки MAE вдоль оси Z от начальной энергии частицы, показывающий хаотичный характер этой зависимости. Данный недостаток детекторной системы может быть решён при помощи добавления в параметры функции времени отклика фотоумножителей на торцах сцинтилляторов.

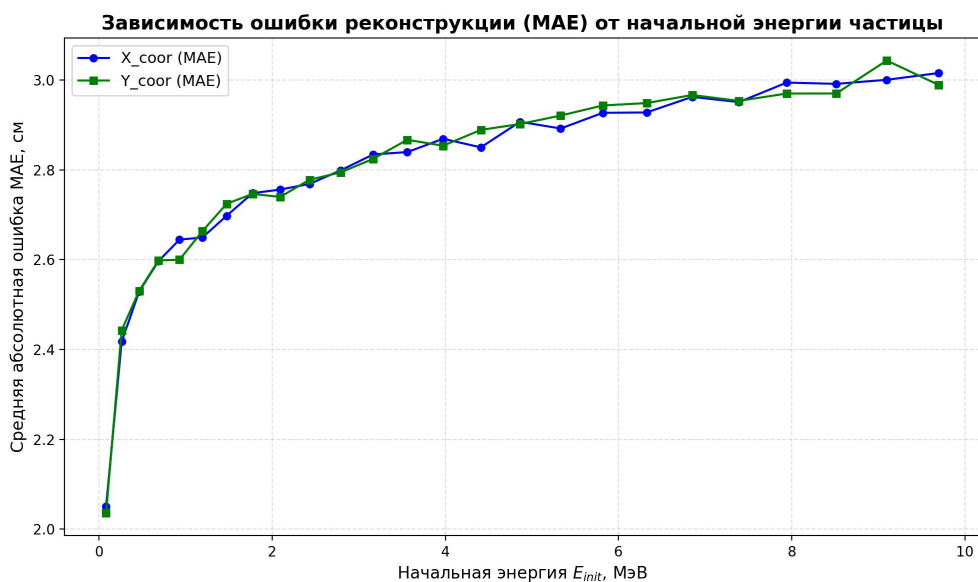


Рисунок 1.7 — Графики зависимости ошибки предсказания MAE от начальной энергии частицы

Более детализированные результаты работы модели GBT по трём осям представлены в таблице 1.2 .

Таким образом, мы можем говорить о возможности локализовать событие в рамках одного сцинтиллятора в плоскости OXY, так как его поперечные размеры составляют 50 x 50 мм, однако координата Z остаётся для нас неопределённой без дополнительных физических улучшений установки.

	X	Y	Z
MAE, см	2.8	2.8	16.8
RMSE, см	3.8	3.5	19.5

Таблица 1.2 — Таблица ошибок предсказания модели GBT на основе данных моделирования

1.5 ОБУЧЕНИЕ МОДЕЛИ KNN

Алгоритм обучения модели на основе алгоритма K ближайших соседей (далее KNN) крайне схож с пайплайном обучения GBT-модели: данные также были разбиты на обучающий и тестовой набор данных, признаки были масштабированы при помощи скейлера. Метрики качества – MAE и RMSE для осей OX, OY, OZ.

Стоит отметить, что в процессе подбора гиперпараметров модели было выбрано число соседей 350, а также алгоритм расчёта весов соседей в зависимости от их расстояния до объекта, чьи характеристики модель пытается предсказать, алгоритм поиска – ball tree.

Также стоит указать, что метрики для KNN были получены не на всём объёме тестовых данных, а на выборке из 50 тысяч элементов – при увеличении данного числа алгоритм экстренно прекращал работу, не справляясь с большим объёмом данных.

Графики распределения ошибок в зависимости от оси, а также графики зависимости ошибки MAE от начальной энергии частицы для модели KNN представлены ниже.

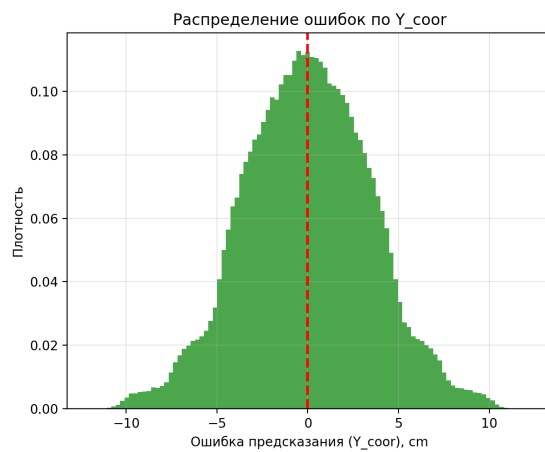
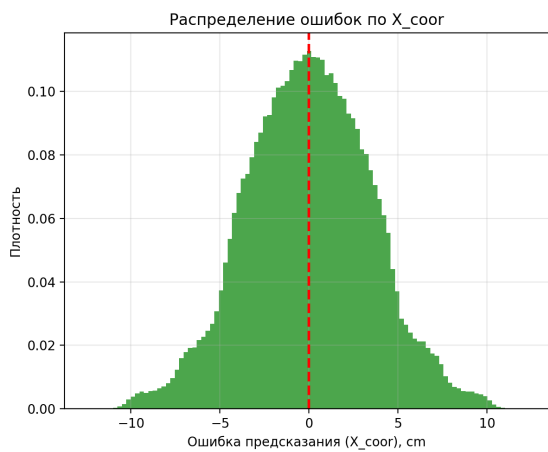


Рисунок 1.8 — Распределение ошибок по координатным осям OX и OY на основе предсказаний, сделанных моделью

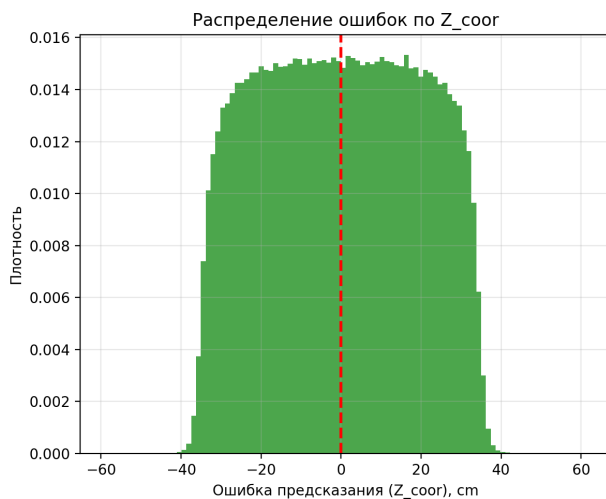


Рисунок 1.9 — Распределение ошибок по координатной оси OZ на основе предсказаний, сделанных моделью

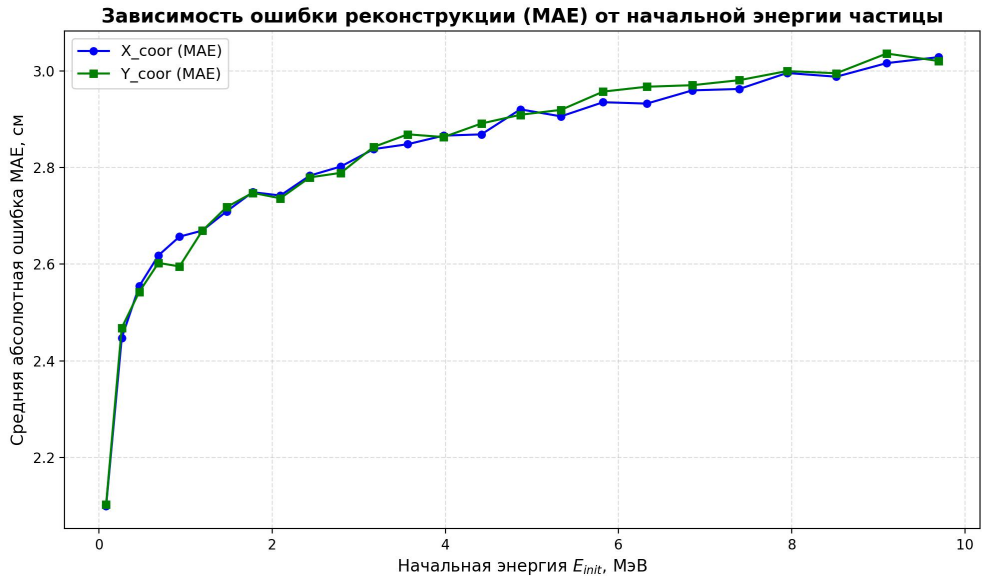


Рисунок 1.10 — Графики зависимости ошибки предсказания MAE от начальной энергии частицы для модели KNN

Схожесть графиков зависимости ошибки MAE от начальной энергии частицы для алгоритмов GBT и KNN (рис. 1.7 и рис. 1.10 соответственно) говорит о достижении предела алгоритмической эффективности данных методов. Ошибка предсказаний в таком случае определяется физическими параметрами детектора и может быть уменьшена как при помощи добавления новых физических параметров, таких как время откликов фотоумножителей на торцах сцинтиллятора, так и с помощью внедрения принципиально новых предсказателей, например, нейронных сетей.

1.6 РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ МОДЕЛЕЙ НА ДАННЫХ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Согласно полученным данным, обе модели, KNN и GBT, показали одинаковую эффективность с точки зрения восстановления координат источника излучения. Координаты вдоль осей OX и OY в силу геометрии детектора были восстановлены с достаточной точностью, однако восстановление координат вдоль оси OZ пока представляется невозможным. Сводные характеристики работы двух моделей, BDT и KNN, представлены в таблице 1.3.

	GBT			KNN		
	X	Y	Z	X	Y	Z
MAE, см	2.8	2.8	16.8	2.8	2.8	16.8
RMSE, см	3.8	3.5	19.5	3.5	3.5	19.8

Таблица 1.3 — Таблица сравнения ошибок предсказаний моделей GBT и KNN для данных моделирования

Дальнейшая работа с данными моделирования будет проводиться именно с моделью BDT, так как модель KNN в процессе обучения продемонстрировала серьёзный недостаток в виде невозможности эффективно масштабироваться на большие объёмы данных. KNN может найти применение в рамках реальных экспериментальных задач с меньшим количеством входных данных, однако на данный момент для результатов моделирования приоритетнее использование модели BDT.

2 ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ИЗЛУЧЕНИЯ МОДЕЛЬЮ GBT НА ОСНОВЕ ДАННЫХ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Следующей задачей для модели GBT стала задача по восстановлению точечного источника гамма-квантов, расположенного в некой точке на поверхности детектора.

2.1 ОБЗОР ДАННЫХ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Источником излучения в моделировании выступила модель изотопа цезия-137. Его характерные энергии излучения – 662 кэВ 32 кэВ, . Источник излучения был размещён в центре верхнего сцинтиллятора, обозначенного на схеме номером 2. Схематичное расположение источника и детектора представлено на рисунке 2.1.

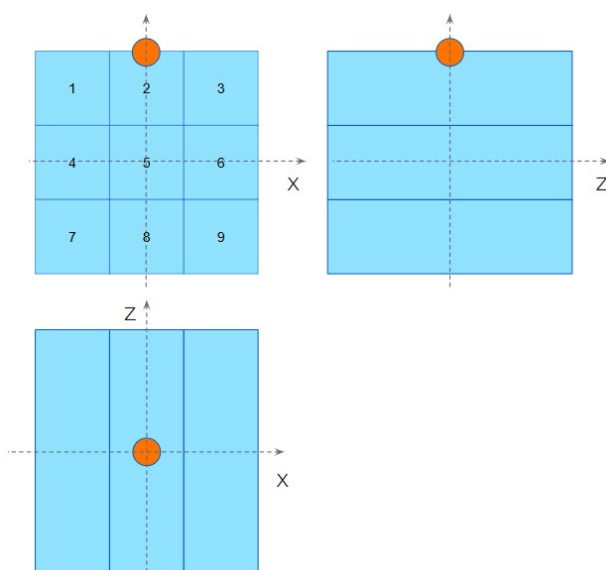


Рисунок 2.1 — Схема расположения источника и детекторного блока

После первичной обработки данных, полученных из моделирования, было выделено 3 628 721 события, произошедших в объёме детектора. По ним и проводилось восстановление координат расположения источника излучения.

2.2 ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ИСТОЧНИКА МОДЕЛЬЮ GBT

Данные моделирования были обработаны для формирования упомянутых ранее искусственных признаков, необходимых для качественного предсказания модели. Полученный набор данных был отправлен в модель GBT, обученную ранее и имеющую выбранные ранее оптимальные гиперпараметры.

Результатом работы модели стали предсказания координат, где возможно нахождения источника гамма-квантов. Визуализация результатов вдоль различных плоскостей детектора представлена на рисунке 2.2 .

Общий результат работы модели, выраженный в метриках MAE, RMSE и среднего отклонения предсказания представлен в таблице 2.1 .

	MAE, см	RMSE, см	Отклонение средней оценки, см
X	1.3	1.9	0.05
Y	3.1	3.6	1.87
Z	35	35	35

Таблица 2.1 — Таблица ошибок предсказаний модели GBT при локализации точечного источника

2.3 ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Как видно из данных о распределении ошибок предсказания положения источника по разным осям, модель смогла достаточно точно локализовать источник по оси OX, причём значение ошибки позволяет локализовать события в масштабах одного сцинтиллятора. Локализация вдоль оси OY менее точна, но всё ещё позволяет указать на положение источника излучения в масштабах сцинтиллятора.

Предсказания по оси OZ по-прежнему несостоятельны в силу физических ограничений детектора: без дополнительной информации о положении события вдоль данной оси локализация события попросту невозможна. Поэтому предсказания модели касательно координаты Z носят исключительно случайный характер.

Таким образом, модель VDT доказала возможность восстановления координат источника излучения в плоскости OXY с достаточной точностью. Дальнейшие работы по улучшению работы модели могут быть связаны с внедрением полезной информации для локализации координаты Z , а также с применением реальных экспериментальных данных для восстановления источника излучения.

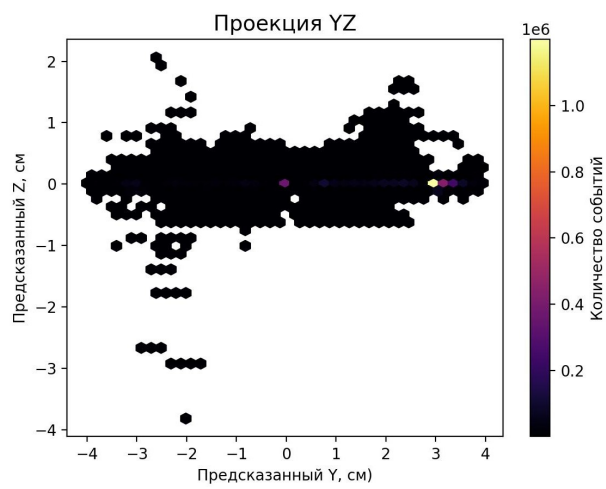
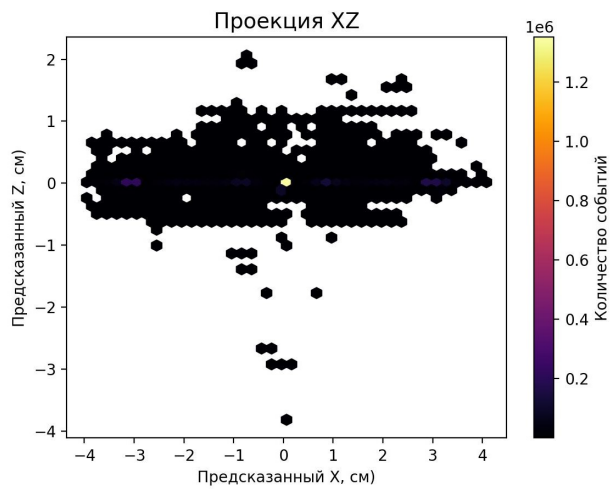
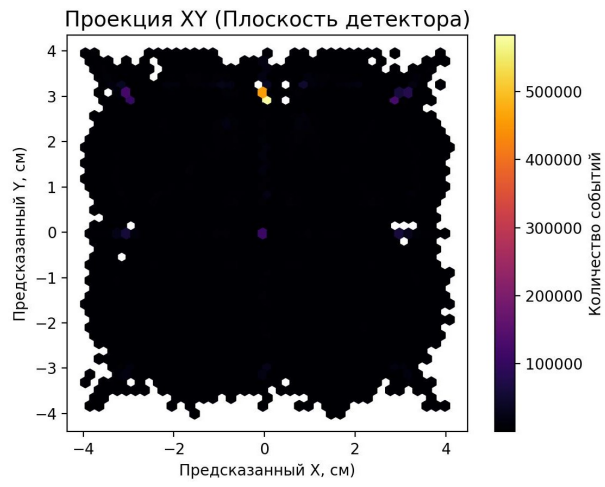


Рисунок 2.2 — Тепловая карта предсказаний модели GBT

3 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследовалась возможность восстановления положения источника излучения (гамма-квантов) при помощи методов машинного обучения для нейтринного детектора на основе пластиковых сцинтилляторов. Данные для моделей были получены при помощи моделирования в среде Geant4.

В работе показано, что популярные в физических задачах реконструкции модели на основе градиентного бустинга (GBT) и модель “К ближайших соседей” (KNN) способны реконструировать координаты точки вылета частицы с показателями точности $MAE = 2.8$, $RMSE = 3.5$ см для осей OX и OY , $MAE = 16.8$ см, $RMSE = 19.5$ см для оси OZ . Отдельно отмечается причина такого большого разброса вдоль оси OZ .

Также в работе приводятся данные о восстановлении положения точечного источника цезий-137 при помощи модели GBT на основе данных моделирования в среде Geant4. Модель смогла восстановить положение источника излучения с точностью $MAE = 1.3$ см, $RMSE = 1.9$ см вдоль оси OX , с точностью $MAE = 3.1$ см, $RMSE = 3.6$ см вдоль оси OY и точностью $MAE = 35$ см, $RMSE = 35$ см вдоль оси OZ .

Дальнейшее развитие эксперимента может быть связано с рассмотрением новых типов частиц, использованием реальных экспериментальных данных, расширением одной модели до ансамбля нескольких более продвинутых моделей.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Machine learning at the energy and intensity frontiers of particle physics / A. Radovic [и др.] // *Nature*. — 2018. — Т. 560, № 7716. — С. 41—48.
2. *Landi G.* Properties of the center of gravity as an algorithm for position measurements // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. — 2002. — Т. 485, № 3. — С. 698—719.
3. A Comparison of Neural Networks and Center of Gravity in Muon Hit Position Estimation / K. Aktas [и др.] // *Entropy*. — 2022. — Т. 24, № 11.
4. Gaussian position-weighted center of gravity algorithm for multiplexed readout / H. Poladyan [и др.] // *Physics in Medicine & Biology*. — 2020. — Т. 65, № 16. — С. 165003.