

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»  
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ  
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

УДК 531.3, 539.1.05

**ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА  
К БАКАЛАВРСКОЙ ДИПЛОМНОЙ РАБОТЕ  
НОВЫЙ МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ  
В МНОГОПОЛЕВЫХ МОДЕЛЯХ**

Студент \_\_\_\_\_ И. Н. Самощенко

Научный руководитель,

д.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_ В. А. Гани

Москва 2026

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

**НОВЫЙ МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ  
В МНОГОПОЛЕВЫХ МОДЕЛЯХ**

Студент \_\_\_\_\_ И. Н. Самощенко

Научный руководитель,  
д.ф.-м.н. \_\_\_\_\_ В. А. Гани

Рецензент,  
к.ф.-м.н., \_\_\_\_\_ Н. М. Заиграев

Секретарь ГЭК,  
к.ф.-м.н. \_\_\_\_\_ А. А. Кириллов

Зав. каф. №40,  
д.ф.-м.н., проф. \_\_\_\_\_ М. Д. Скорохватов

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Модели классической теории поля</b>	<b>7</b>
<b>2 Геометрия орбит</b>	<b>10</b>
2.1 Геометрические свойства уравнений BPS . . . . .	11
2.2 Двухполевой случай . . . . .	12
2.3 Комплексный формализм в двухполевом случае . . . . .	15
<b>3 Гармонические морфизмы</b>	<b>18</b>
3.1 Определение, примеры и основные свойства . . . . .	18
3.2 Построение полиномиального потенциала четырехполевой модели с парой поверхностей вакуумов . . . . .	22
<b>4 Получение дискретного набора вакуумов</b>	<b>28</b>
<b>Заключение</b>	<b>31</b>
<b>Список использованных источников</b>	<b>33</b>
<b>Приложение</b>	<b>35</b>

# ВВЕДЕНИЕ

Теоретико-полевые модели с несколькими скалярными полями занимают особое место в современной физике: они описывают широкий круг явлений – от топологических дефектов в ранней Вселенной до фазовых переходов в конденсированных средах и механизма генерации масс частиц [1–4]. Топологические солитонные решения таких моделей – кинки, вихри, монополи, доменные стенки – есть устойчивые локализованные полевые конфигурации с конечной энергией, негомоторные вакуумному состоянию [5].

В космологии кинки и доменные стенки возникают как следствие спонтанного нарушения дискретной симметрии в ранней Вселенной. Согласно механизму Киббла, при фазовых переходах после Большого взрыва образуется сеть топологических дефектов, наблюдательные проявления которых могут включать вклад в реликтовое излучение, гравитационно-волновой фон и анизотропию распределения материи [1; 2]. Многополевые модели незаменимы для описания последовательных фазовых переходов и учета всех допустимых фаз в системах с богатой структурой вакуумного многообразия, включая случаи с некомпактными группами симметрий, возникающими в супергравитации [6].

В физике конденсированного состояния кинковые решения описывают границы доменов в сегнетоэлектриках и магнетиках, дислокации в кристаллических решетках (классическая модель синус-Гордон) [7]. Многополевые обобщения открывают возможность учесть конкурирующие параметры порядка, характерные для высокотемпературных сверхпроводников и мультиферроиков.

В физике высоких энергий двухполевые модели с  $U(1)$ -симметрией («мексиканская шляпа») лежат в основе механизма Хиггса [8]; они также используются для описания взаимодействия D-бран в теории суперструн. Кинки в квантованной теории поля интерпретируются как частицеподоб-

ные возбуждения с массой, определяемой энергией классического решения, что делает их исследование важным как с классической, так и с квантовой точек зрения.

Центральной математической трудностью при изучении многополевых моделей является необходимость решать системы нелинейных уравнений в частных производных, которые в общем виде не интегрируются. Существенное упрощение вносит метод Богомольного–Прасада–Зоммерфельда (BPS) [9; 10], позволяющий при специальных условиях на потенциал свести уравнения движения второго порядка к системе уравнений первого порядка через введение суперпотенциала  $W(\phi)$ . Геометрический смысл решений BPS-уравнений – орбиты в пространстве полей – открывает путь к нахождению кинков методом пробных орбит [11–13]. Для одного и того же потенциала может существовать несколько суперпотенциалов, что приводит к различным BPS-системам и делает задачу их нахождения отдельной нетривиальной проблемой [14–17].

Настоящая работа посвящена развитию нового подхода к систематическому построению кинковых решений в многополевых моделях, основанного на теории гармонических морфизмов [18; 19]. Оказывается, если суперпотенциал модели задается гармоническим морфизмом из пространства полей, то задача нахождения орбит и последующего восстановления кинков существенно упрощается и приобретает прозрачный геометрический характер. Гармонические морфизмы – это отображения, сохраняющие гармонические функции; впервые они были исследованы Якоби в 1847 году при изучении решений трехмерного уравнения Лапласа, а их теория впоследствии была развита в теории потенциала и для поиска минимальных поверхностей. Несмотря на сложность построения конкретных примеров, для гармонических морфизмов доказан ряд замечательных свойств, и оказывается, что полевые модели с потенциалом, определяемым таким отображением, обладают симметриями, упрощающими поиск кинков. В работе вводится концепция конформного суперпотенциала, позволяющая генерировать параметрические семейства BPS-уравнений и орбит для одного и того же потенциала, а также предлагается метод модификации потенциала путем прибавления функции, обращающейся в нуль на орбите, что дает возможность систематически конструировать модели с заданным дискрет-

ным набором вакуумов.

## ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью настоящей работы является разработка нового метода систематического получения статических солитонных (кинковых) решений в многополевых моделях, основанного на теории гармонических морфизмов, и демонстрация его эффективности на конкретных примерах.

## ЗАДАЧИ И ИХ РЕШЕНИЕ

В соответствии с поставленной целью в работе решались следующие задачи.

**Задача 1.** Установить геометрический критерий, позволяющий проверить, является ли данная кривая в пространстве полей орбитой BPS-решения, без необходимости решать сами уравнения движения.

*Решение.* Критерий сформулирован в разделе 2.1 и доказан в приложении.

**Задача 2.** Разработать формализм, позволяющий работать с целым набором суперпотенциалов и функций, задающих уравнение орбиты решений уравнений BPS.

*Решение.* Введено понятие *конформного суперпотенциала* — вектор-функции  $w = (W^1, \dots, W^n)$ , компоненты которой удовлетворяют соотношению

$$\nabla W^k \cdot \nabla W^s = 2V \delta^{ks}.$$

Показано, что действие ортогональной матрицы  $O \in O(n)$  на  $w$  порождает новый конформный суперпотенциал  $\tilde{w} = Ow$  для того же потенциала  $V$ , что даёт параметрическое семейство BPS-уравнений. На конкретном примере продемонстрировано, что разные выборы  $O$  приводят к принципиально различным системам: кинк, доступный при одном выборе, оказывается недоступным при другом.

**Задача 3.** Связать концепцию конформного суперпотенциала с теорией гармонических морфизмов и выяснить ограничения, накладываемые

этой теорией на допустимые суперпотенциалы.

*Решение.* В разделе 3 установлено, что полиномиальные слабо конформные отображения являются гармоническими морфизмами. Из теорем [18] выведено, что при  $n \geq 3$  степень полиномиального конформного суперпотенциала не превышает  $(m - 2)/(n - 2)$ , что делает задачу их поиска конечномерной.

**Задача 4.** Разработать метод построения нового потенциала с дискретным набором вакуумов, сохраняющего заданный набор кинковых решений исходной модели с непрерывным вакуумным многообразием.

*Решение.* Показано, что если функция  $F$  неотрицательна и обращается в нуль на орбите вместе со своим градиентом, то потенциал  $\tilde{V} = V + F$  имеет то же самое решение. Для сохранения  $n$  решений одновременно берётся  $\tilde{V} = V + F^1 \cdot \dots \cdot F^n$ . Метод проиллюстрирован явным построением потенциала (4.12), который дискретизует вакуумное многообразие модели из раздела 3.

## ОБЪЕКТ И ПРЕДМЕТ ИССЛЕДОВАНИЯ

**Объект исследования** — скалярные теоретико-полевые модели с неотрицательным потенциалом самодействия  $V(\phi)$ , описываемые классическим действием.

**Предметом исследования** данной работы являются статические кинковые решения уравнений BPS в многополевых моделях, потенциал которых порождается гармоническими морфизмами, а также геометрические свойства орбит таких решений в пространстве полей и методы их систематического построения с использованием конформного суперпотенциала.

# 1 МОДЕЛИ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Полевая модель определяется следующим образом. Пусть  $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^m)$  — поля, определенные в пространстве размерности  $(1 + 1)$  (одном пространственном, которое мы обозначим как  $x \in \mathbb{R}$  и одним временном,  $t \in [t_1, t_2]$ ),  $m$  — натуральное число. Пусть также  $V = V(\phi)$  — неотрицательная функция, называемая *потенциалом*. Множество  $\mathcal{V}$  нулей потенциала называется *множеством вакуумов* модели<sup>1</sup>. Никаких ограничений (за исключением физической целесообразности) на вакуумные многообразия не накладывается. Тем не менее, зачастую, солитонные решения ищут в моделях или с дискретными вакуумными многообразиями ([11–13]), или многообразиями с некоторой несложной матричной группой (см. [8; 20; 21]). Рассмотрению моделей с некомпактными вакуумными многообразиями уделено значительно меньше внимания, что связано со сложностью их изучения. Некомпактные вакуумные многообразия естественным образом возникают в суперсимметричных моделях, важные примеры “конкретных” потенциалов приведены в работах [14–17], где обсуждались суперсимметричные модели с некомпактными вакуумными многообразиями в виде гиперболических поверхностей и найдены солитонные решения.

Динамика полей определяется функционалом действия

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L} \left( \phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dx dt \quad (1.1)$$

---

<sup>1</sup>В случаях, когда нули потенциала образуют многообразие,  $\mathcal{V}$  также называется *вакуумным многообразием*.

с лагранжианом

$$\mathcal{L}\left(\phi, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \left[ \left(\frac{\partial\phi^s}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\phi^s}{\partial x}\right)^2 \right] - V(\phi). \quad (1.2)$$

Уравнения движения (уравнения Эйлера-Лагранжа):

$$\frac{\partial^2\phi^s}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi^s}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial\phi^s}(\phi) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, m. \quad (1.3)$$

Нас будут интересовать статические (т.е. не зависящие от времени) кинковые решения  $\phi_K(x)$ , которые удовлетворяют системе

$$\frac{d^2\phi^s}{dx^2} = \frac{\partial V}{\partial\phi^s}(\phi), \quad (1.4)$$

и, кроме того, должны удовлетворяться граничные условия

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi_K(x) = v_{\pm}, \quad (1.5)$$

где  $v_- \neq v_+$ ,  $v_{\pm} \in \mathcal{V}$ . К кинковому решению также предъявляется условие конечности энергии, определяемой в статическом случае как функционал

$$E[\phi(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \left(\frac{d\phi^s}{dx}\right)^2 + V(\phi) \right] dx. \quad (1.6)$$

Энергию статического кинка часто называют массой кинка:  $M_K = E[\phi_K(x)]$ . Заметим, что замена  $x \rightarrow -x$  в кинковом решении дает снова кинковое решение. Далее в этой статье мы будем иметь дело только со статическими решениями, которые для краткости будем называть просто решениями.

Любое решение уравнений движения можно рассматривать как кривую в пространстве полей, задаваемую параметром  $x$ . Эту кривую мы будем называть *орбитой* решения. Любая пара различных вакуумов определяет гомотопический класс эквивалентности кривых с фиксированными концами, который мы будем называть *топологическим сектором*. Орбита всякого кинкового решения принадлежит своему топологическому сектору.

Заметим, что порядок уравнений движения (1.4) можно понизить,

выразив потенциал через новую функцию  $W(\phi)$ , называемую *суперпотенциалом*:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \left( \frac{\partial W}{\partial \phi^s} \right)^2 (\phi) \quad (1.7)$$

После такой подстановки выделим в функционале энергии (1.6) полный квадрат и получим:

$$E = |W(\phi(+\infty)) - W(\phi(-\infty))| + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{s=1}^m \left( \frac{d\phi^s}{dx} - \frac{\partial W}{\partial \phi^s}(\phi) \right)^2 dx. \quad (1.8)$$

Первое слагаемое не влияет на экстремальность функционала энергии, оно зависит лишь от выбора топологического сектора. Таким образом, энергия экстремальна тогда, когда

$$\frac{d\phi^s}{dx} = \frac{\partial W}{\partial \phi^s}(\phi). \quad (1.9)$$

Эти уравнения называют уравнениями Богомольного–Прасада–Зоммерфельда или BPS (см., например, [9; 10]), в дальнейшем мы сосредоточимся на их решении. Уравнения BPS можно переписать в эквивалентной форме, исключив пространственную переменную  $x$ :

$$\frac{d\phi^1}{W_1(\phi)} = \dots = \frac{d\phi^m}{W_m(\phi)}, \quad (1.10)$$

где для удобства использовано обозначение  $W_s(\phi) \equiv \frac{\partial W}{\partial \phi^s}(\phi)$ .

Суперпотенциал определен неоднозначно. Действительно, равенство (1.7) можно рассматривать как дифференциальное уравнение в частных производных на функцию  $W(\phi)$  для заданного потенциала  $V(\phi)$ . Задача нахождения суперпотенциала по заданному потенциалу достаточно сложна, поэтому обычно мы будем начинать наши рассуждения, считая, что суперпотенциал (или несколько суперпотенциалов) уже известен, и определяет некоторый потенциал. Стоит отметить, что в случае полиномиального потенциала степени  $p$ , суперпотенциал можно искать в виде полинома степени  $\frac{p-2}{2}$ . В этом случае задача сводится к чисто алгебраической, хотя может оказаться вычислительно громоздкой.

## 2 ГЕОМЕТРИЯ ОРБИТ

Несмотря на то, что уравнения BPS есть обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, в случае двух и более полей задача в общем виде неразрешима. Но, как мы помним, кинковое решение задает кривую в пространстве полей — орбиту, при этом координата  $x$  играет роль параметра. Уравнения BPS вместе с соответствующими граничными условиями, как и уравнения движения, определяют не только орбиту (ее геометрические свойства), но и фиксируют ее конкретную параметризацию.

Если нам каким-либо образом удалось найти орбиту, то после этого не представляет труда найти и само решение, т.е. построить параметризацию орбиты. На этом основан хорошо известный метод пробных орбит, см., например, [5; 11]. Действительно, зная кривую в  $m$ -мерном пространстве полей, заданную  $m - 1$  равенствами  $F^1(\phi) = 0, \dots, F^{m-1}(\phi) = 0$ , можно исключить  $m - 1$  поле из какого-либо из уравнений движения и получить обыкновенное дифференциальное уравнение для нахождения зависимости одного из полей от координаты  $x$ . Далее можно восстановить зависимости остальных полей от координаты.

Заметим, что первые интегралы характеристической системы (1.10), которые могут быть взяты в качестве упомянутых выше функций  $F^1(\phi), \dots, F^{m-1}(\phi)$ , задают орбиту некоторого решения.

Пусть  $F(\phi) = 0$  уравнение гладкой поверхности  $\mathcal{N}$  размерности  $m - 1$  в пространстве  $\mathbb{R}^m$ , причем орбита  $\mathcal{M}$  некоторого кинкового решения  $\phi_{\text{K}}(x)$  уравнений (1.9) принадлежит этой поверхности,  $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ . Тогда, очевидно,

$$F(\phi_{\text{K}}(x)) = 0, \tag{2.1}$$

откуда дифференцированием по  $x$  получим:

$$\sum_{s=1}^m \frac{\partial F}{\partial \phi^s} \Big|_{\phi_K(x)} \frac{d\phi_K^s}{dx} = 0. \quad (2.2)$$

С учетом уравнений BPS (1.9) окончательно имеем:

$$(\nabla F \nabla W) \Big|_{\phi_K(x)} = 0. \quad (2.3)$$

Геометрически это равенство означает, что в каждой точке орбиты градиент функции  $F(\phi)$ , задающей поверхность  $\mathcal{N}$ , ортогонален градиенту суперпотенциала  $W(\phi)$ . В статье [11] приведены подобные рассуждения для двухполевых моделей.

## 2.1 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ BPS

К сожалению, изложенный выше геометрический факт (ортогональность  $\nabla F$  и  $\nabla W$  на некоторой кривой) позволяет лишь предположить наличие решений. Проверка того, действительно ли полученная кривая является орбитой, осуществляется ее подстановкой в уравнения движения. В этой работе мы обобщаем данный метод, исключая необходимость проверки, если соблюдены некоторые условия, а именно:

Пусть дан  $m$ -полевой суперпотенциал  $W(\phi)$ , и пусть также известны функционально независимые функции  $F^s(\phi): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $s = \overline{2, m}^1$  такие, что

- 1) уравнение  $F^s = 0$  определяет поверхность  $\mathcal{N}_s$  размерности  $m - 1$ ;
- 2) пересечение всех поверхностей  $\mathcal{N}_s$  есть некоторая кривая  $\mathcal{M}$ ;
- 3)  $(\nabla W \nabla F^s) \Big|_{\mathcal{M}} = 0$ ;
- 4) частные производные суперпотенциала и функций  $F^s$  не равны нулю (за исключением быть может конечного числа точек) на кривой  $\mathcal{M}$ .

---

<sup>1</sup>Пределы индекса  $s$  выбраны из соображений удобства:  $s = 1$  в дальнейшем мы закрепим за суперпотенциалом.

Тогда существует решение  $\phi = \phi(x)$  уравнений BPS

$$\frac{d\phi}{dx} = (\nabla W)(\phi), \quad (2.4)$$

причем его орбита есть кривая  $\mathcal{M}$ . Доказательство смотри в Приложении.

Сформулированное утверждение удобно тем, что позволяет проверить, является ли данная кривая орбитой некоторого решения уравнений BPS без необходимости решать сами уравнения. В то же время вопрос о том, как найти функции  $F^s$ , остается открытым.

## 2.2 ДВУХПОЛЕВОЙ СЛУЧАЙ

Посмотрим, как это работает в двухполевым случае. Пусть  $W(\phi^1, \phi^2)$  — суперпотенциал, определяющий потенциал  $V(\phi^1, \phi^2)$ . Из уравнений BPS получим

$$\frac{\partial W}{\partial \phi^2} d\phi^1 - \frac{\partial W}{\partial \phi^1} d\phi^2 = 0. \quad (2.5)$$

Это уравнение легко интегрируется, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции полей  $\phi^1$  и  $\phi^2$ . Это, в свою очередь, означает, что  $W$  — гармоническая функция. Пусть  $W$  — гармоническая, тогда можно ввести комплексный суперпотенциал  $\mathcal{W}(\phi^1 + i\phi^2) = W(\phi^1, \phi^2) + iM(\phi^1, \phi^2)$ , где  $M$  — также гармоническая функция, сопряженная к  $W$ . В силу условий Коши–Римана (означающих ортогональность  $\nabla W$  и  $\nabla M$ ) равенство  $M(\phi^1, \phi^2) = \text{const}$  определяет уравнения орбит. Константа в этом равенстве находится из условия (1.5). Заметим, что  $\nabla W$  и  $\nabla M$  ортогональны не только на орбите, но всюду, и

$$\nabla W^2 = \nabla M^2 = 2V. \quad (2.6)$$

Неоднозначность выбора  $W$  для данного потенциала приводит к различным уравнениям BPS. Введем двухкомпонентную функцию

$$w = \begin{pmatrix} W \\ M \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

которую будем называть конформным суперпотенциалом<sup>2</sup>. Пусть также  $O \in O(2)$  — ортогональная матрица и

$$Ow = \tilde{w} = \begin{pmatrix} \widetilde{W} \\ \widetilde{M} \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Компоненты функции  $\tilde{w}$  обладают теми же свойствами, что и компоненты  $w$ , т.е. их градиенты ортогональны, а модули градиентов равны, что позволяет получить новые уравнения BPS и новое уравнение орбиты:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi^1}{dx} &= \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \phi^1}(\phi), \\ \frac{d\phi^2}{dx} &= \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \phi^2}(\phi), \\ \widetilde{M}(\phi^1, \phi^2) &= C. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Зачастую в приложениях известен не суперпотенциал, а потенциал  $V$ , для которого необходимо найти суперпотенциал. В случае гармонического суперпотенциала  $W$ , функция

$$\ln(2V) = \ln \left| \left( \frac{\partial W}{\partial \phi^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial \phi^2} \right)^2 \right| = \ln \left| \left( \frac{\partial W}{\partial \phi^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial M}{\partial \phi^1} \right)^2 \right| \quad (2.10)$$

есть вещественная часть комплексного логарифма, откуда получаем критерий существования гармонического суперпотенциала для данного потенциала:

$$\Delta \ln V = 0. \quad (2.11)$$

**Пример.** Рассмотрим конкретный пример двухполевой модели с потенциалом

$$V(\phi^1, \phi^2) = \frac{1}{2} [((\phi^1)^2 - (\phi^2)^2 - 1)^2 + 4(\phi^1 \phi^2)^2], \quad (2.12)$$

см. рис. 2.1 Вакуумы модели, т.е. нули потенциала (2.12) — это точки  $v_{\pm} = (\pm 1, 0)$ . Для этого потенциала выполняется условие (2.11), т.е. для

---

<sup>2</sup>Заметим, что правильнее было бы называть функцию  $w$  *слабо конформным суперпотенциалом*, т.к. модуль градиента может обращаться в нуль (о понятии слабой и горизонтально слабой конформности см. ниже).

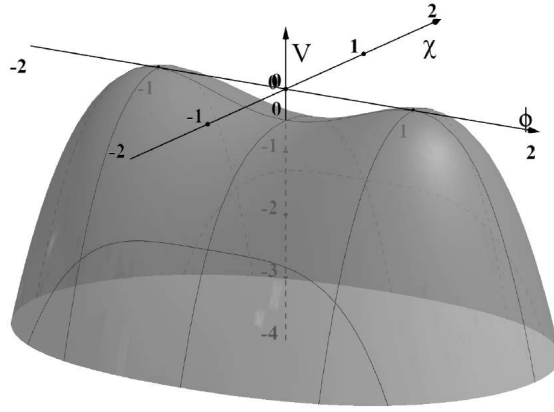


Рисунок 2.1 — График потенциала (2.12) (по вертикальной оси отложена величина  $-V(\phi^1, \phi^2)$ ).

него существует гармонический суперпотенциал. Предположим, что суперпотенциал есть многочлен. Потенциал имеет степень четыре и представляет собой квадрат модуля градиента суперпотенциала, а также имеет пару известных нулей  $v_{\pm}$ . Следовательно, суперпотенциал должен иметь степень 3. Методами комплексного анализа несложно получить функции  $W$  и  $M$  — компоненты конформного суперпотенциала

$$w = \begin{pmatrix} W \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(\phi^1)^3 - \phi^1(\phi^2)^2 - \phi^1 \\ -\frac{1}{3}(\phi^2)^3 + \phi^2(\phi^1)^2 - \phi^2 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Фиксировав  $W$  в качестве суперпотенциала, из уравнения  $M = 0$  нетрудно найти орбиту кинкового решения, которой в данном случае является отрезок  $-1 < \phi^1 < 1$ ,  $\phi^2 = 0$ , а само кинковое решение имеет вид

$$\phi_K^1(x) = \tanh x, \quad \phi_K^2(x) \equiv 0. \quad (2.14)$$

Заметим, что уравнение  $M = 0$ , помимо  $\phi^2 = 0$ , дает еще  $(\phi^1)^2 - \frac{1}{3}(\phi^2)^2 - 1 = 0$ . Последнее есть уравнение пары гипербол, не соединяющих вакуумы  $(\pm 1, 0)$ , поэтому эти кривые не являются орбитами кинковых решений. Возможность получать новые уравнения BPS важна, т.к. один их набор может не дать всех кинковых решений. Убедиться в этом поможет следующий пример.

**Пример.** Снова выберем функцию  $w$  из примера выше, однако подействуем на него матрицей поворота на  $-\pi/2$ . Уравнения BPS тогда при-

мут вид

$$\begin{aligned}\frac{d\phi^1}{dx} &= 2\phi^1\phi^2, \\ \frac{d\phi^2}{dx} &= -(\phi^2)^2 + (\phi^1)^2 - 1.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Очевидно, что (2.14) не является решением этой системы, т.е. при таком выборе конформного суперпотенциала получить кинковое решение (2.14) не удастся.

## 2.3 КОМПЛЕКСНЫЙ ФОРМАЛИЗМ В ДВУХПОЛЕВОМ СЛУЧАЕ

Если суперпотенциал  $W(\phi^1, \phi^2)$  двухполевой модели есть гармоническая функция, то, как уже упоминалось выше, можно ввести комплексный суперпотенциал

$$\mathcal{W}(z) = W(\phi^1, \phi^2) + iM(\phi^1, \phi^2),\tag{2.16}$$

где  $z = \phi^1 + i\phi^2$ . Потенциал тогда можно записать в виде

$$V(\phi^1, \phi^2) = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z} \right|^2.\tag{2.17}$$

Заметим, что комплексный суперпотенциал (2.16) определен с точностью до аддитивной константы и множителя  $e^{i\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , что сразу дает параметрическое множество суперпотенциалов и орбит.

**Пример.** В качестве конкретного примера рассмотрим модель близкую к тем, что рассмотрены в работе [12] с комплексным суперпотенциалом

$$\mathcal{W}(z) = z^2 - \frac{1}{3}z^6.\tag{2.18}$$

Соответствующий потенциал

$$\begin{aligned}V(\phi^1, \phi^2) &= 2((\phi^1)^2 + (\phi^2)^2)^2 \cdot \\ &\cdot ((\phi^1 - 1)^2 + (\phi^2)^2)((\phi^1 + 1)^2 + (\phi^2)^2)(\phi^1)^2 + (\phi^2 - 1)^2(\phi^1)^2 + (\phi^2 + 1)^2\end{aligned}\tag{2.19}$$

имеет нули  $\mathcal{V} = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1), (0, 0)\}$ .

Метод комплексного суперпотенциала не дает никаких нетривиальных решений, т.е. единственные орбиты — это отрезки  $[0, \pm 1]$ ,  $[\pm 1, 0]$ . Кинковые решения будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\phi_{\text{K};0,\pm 1} &= (\pm f_{\text{K}}, 0), \\ \phi_{\text{K};\pm 1,0} &= (0, \pm f_{\text{K}}),\end{aligned}\tag{2.20}$$

где  $f_{\text{K}}$  — функция, полученная интегрированием уравнений BPS:

$$f_{\text{K}}(x) = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh 4x \right)^{\frac{1}{4}}.\tag{2.21}$$

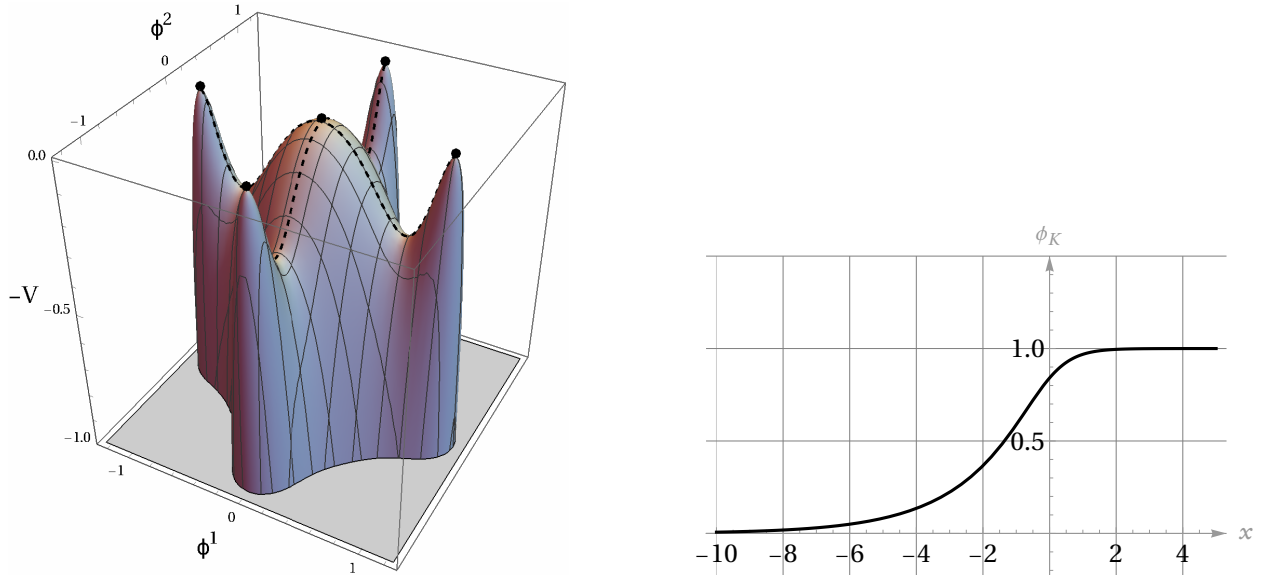


Рисунок 2.2 — График перевернутого потенциала (2.19) (слева). График функции (2.21) (справа); черными точками обозначены вакуумы модели, штриховыми линиями на поверхности потенциала показаны орбиты.

Этот пример наглядно демонстрирует то, что задача упрощается, если вместо одного суперпотенциала известен конформный суперпотенциал, который в двухполевом случае был двухкомпонентным, в  $m$ -полевом же он представляет из себя  $n$ -компонентную функцию

$$w = \begin{pmatrix} W^1 \\ \vdots \\ W^n \end{pmatrix}, \quad n \leq m,\tag{2.22}$$

компоненты которой обладают свойством

$$\nabla W^k \cdot \nabla W^s = 2V\delta^{ks}, \quad (2.23)$$

где  $\delta^{ks}$  — символ Кронекера. Отображения со свойством (2.23) называются *слабо конформными* отображениями [18], а функция  $\lambda = |\nabla W^s|$  — *коэффициентом растяжения*. Первую компоненту  $W^1$  в дальнейшем всегда будем выбирать в качестве суперпотенциала, тогда уравнения  $W^s = C^s$ ,  $s = \overline{2, n}$ , где  $C^s$  — константы, определяют поверхности  $\mathcal{N}_s$  размерности  $m-1$  каждая, пересечению которых может принадлежать орбита решения. Аналогично двухполевому случаю действием ортогональных матриц  $O \in O(n)$  можно получать новые конформные суперпотенциалы для того же потенциала  $V$ :

$$Ow = \tilde{w} = \begin{pmatrix} \widetilde{W}^1 \\ \vdots \\ \widetilde{W}^n \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Это дает параметрическое множество уравнений BPS и поверхностей, которым их решения могут принадлежать.

## 3 ГАРМОНИЧЕСКИЕ МОРФИЗМЫ

В этом разделе мы продемонстрируем, как концепция конформного суперпотенциала реализуется в случае многих (более, чем двух) полей, помогая находить кинковые решения.

Основная информация для этого раздела взята из магистерской диссертации Martin Svensson “Polynomial Harmonic Morphisms” [19] и книги Paul Baird и John C. Wood “Harmonic Morphisms Between Riemannian Manifolds” [18]. Изложение в обоих трудах имеет достаточно абстрактный характер, отображения рассматриваются между римановыми многообразиями. Мы же ограничимся случаем конечномерных вещественных пространств с евклидовой метрикой, в соответствии с чем и построим дальнейшее изложение.

### 3.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ, ПРИМЕРЫ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Слабо конформные отображения естественным образом возникают при рассмотрении следующей задачи: какие условия необходимо наложить на компоненты вектор-функции  $m$  полей  $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^n)$ ,  $\psi^s = \psi^s(\phi^1, \dots, \phi^m)$ ,  $m \geq n$ , чтобы для любой гармонической функции  $f(\psi)$  от  $n$

переменных их композиция  $f(\psi(\phi))$  вновь была гармонической? Очевидно,

$$\begin{aligned}
0 &= \Delta_\phi f(\psi) \\
&= \sum_s \nabla \left( \frac{\partial f}{\partial \psi^s}(\psi) \cdot \nabla \psi^s \right) \\
&= \sum_{s,k} \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^s \partial \psi^k}(\psi) \cdot \nabla \psi^s \nabla \psi^k + \frac{\partial f}{\partial \psi^s}(\psi) \cdot \Delta \psi^s \\
&= \sum_{s \neq k} \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^s \partial \psi^k}(\psi) \cdot \nabla \psi^s \nabla \psi^k + \sum_s \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^{s2}}(\psi) \cdot (\nabla \psi^s)^2 + \frac{\partial f}{\partial \psi^s}(\psi) \cdot \Delta \psi^s.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Выберем функцию  $f(\psi) = \psi^s$ , тогда

$$\Delta \psi^s = 0. \tag{3.2}$$

Если же  $f(\psi) = \psi^s \psi^k$ ,  $s \neq k$ , то

$$\nabla \psi^s \nabla \psi^k = 0. \tag{3.3}$$

И, наконец,  $f(\psi) = (\psi^s)^2 - (\psi^k)^2$ ,  $s \neq k$  для любых  $s, k$  даст

$$(\nabla \psi^s)^2 = (\nabla \psi^k)^2. \tag{3.4}$$

Отсюда получаем, что функция  $f(\psi(\phi))$  гармоническая, если

$$\begin{aligned}
\nabla \psi^s \nabla \psi^k &= \lambda^2 \delta^{sk}, \\
\Delta \psi^s &= 0.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Такие отображения  $\psi$  называются *гармоническими морфизмами* [18]. Как уже было упомянуто выше, в случае  $t$ -полевых моделей  $\lambda^2 = 2V$ , причем  $\lambda$  (как и потенциал  $V$ ) определена всюду, что важно для дальнейших рассуждений.

**Пример.** Следующие отображения являются гармоническими морфизмами:

- 1) Голломорфные функции  $\psi : \mathbb{R}^{2m} \simeq \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ . Отдельно выделим случай голоморфных функций при  $m = 1$ :  $\psi : \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ . Примечателен этот случай тем, что размерность домена и кодомена

совпадают и равны 2;

- 2) Линейные функции вида  $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m : \phi \mapsto \alpha O\phi, \alpha \in \mathbb{R}, O \in O(m)$ ;
- 3) Проекции  $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n : (\phi^1, \dots, \phi^m) \mapsto (\phi^1, \dots, \phi^n), n < m$ ;
- 4)  $\psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  :

$$\begin{pmatrix} (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2 \\ 2\phi^1\phi^3 + 2\phi^2\phi^4 \\ 2\phi^1\phi^4 - 2\phi^2\phi^3 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

для которой  $\lambda^2 = 4|\phi|^2$ ;

- 5)  $\psi : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^5$  :

$$6 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}|\phi|^2 - \frac{1}{2}|\chi|^2 \\ \phi_1\chi_1 - \phi_2\chi_2 - \phi_3\chi_3 - \phi_4\chi_4 \\ \phi_1\chi_2 + \phi_2\chi_1 + \phi_3\chi_4 - \phi_4\chi_3 \\ \phi_1\chi_3 + \phi_3\chi_1 + \phi_4\chi_2 - \phi_2\chi_4 \\ \phi_1\chi_4 + \phi_4\chi_1 - \phi_2\chi_3 - \phi_3\chi_2 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

где мы положили  $\phi^s = \chi^{s-4}, s = \overline{5, 8}$ ;

- 6)  $\psi : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^3$  :

$$\begin{pmatrix} 2\phi_1^2 + 2\phi_2^2 + 3\phi_3^2 + 3\phi_4^2 - 2\phi_5^2 - 2\phi_6^2 - 3\phi_7^2 - 3\phi_8^2 \\ 4\phi_1\phi_5 + 4\phi_2\phi_6 + 6\phi_3\phi_8 - 6\phi_4\phi_7 \\ -4\phi_1\phi_6 + 4\phi_2\phi_5 + 6\phi_3\phi_7 + 6\phi_4\phi_8 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Для гармонических морфизмов, определенных на всем  $m$ -мерном пространстве полей, доказан [18; 19] целый ряд полезных теорем, которые мы сформулируем в качестве списка свойств:

- 1) Если  $m = n \geq 3$ , то гармонический морфизм есть композиция поворота, растяжения и параллельного переноса ([18, р. с.45]). Данное утверждение говорит о невозможности получить полноценное обобщение случая двухполевой модели с гармоническим суперпотенциалом, где для каждого суперпотенциала  $W$  существовала сопряженная функция  $M$  такая, что уравнение  $M = \text{const}$  определяло орбиты решения.
- 2) ([18, р. с.146]). Если компоненты  $\psi$  — полиномы, обладающие свой-

СТВОМ

$$\nabla\psi^s\nabla\psi^k = 2V\delta^{sk}, \quad (3.9)$$

то  $\psi$  — гармонический морфизм. Это сводит изучение полиномиальных суперпотенциалов со свойством (2.23) к изучению гармонических морфизмов (другими словами, полиномиальные слабоконформные отображения являются гармоническими морфизмами).

- 3) ([18, р. с.142]). Если  $n \geq 3$ , то компоненты гармонического морфизма  $\psi$  — полиномы степени не выше  $\frac{m-2}{n-2}$ . Это сводит изучение суперпотенциалов со свойством (2.23) к изучению гармонических морфизмов.

Таким образом, слабо конформные отображения оказываются тесно связанными со свойством гармоничности.

К сожалению, нет надежного способа определить по произвольной неотрицательной функции, определяет ли она коэффициент растяжения некоторого гармонического морфизма, как и не дает возможности отыскать этот гармонический морфизм, как это было в случае двух полей. Тем не менее формула Бохнера дает необходимое условие существования гармонического суперпотенциала: если потенциал задается гармоническим суперпотенциалом, то потенциал — субгармоническая функция. Рассмотрим пару гармонических морфизмов  $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  и  $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  с коэффициентами растяжения  $\lambda, \mu$  соответственно. Легко показать, что композиция  $\eta(\psi)$  есть вновь гармонический морфизм с коэффициентом растяжения  $\nu = \mu(\psi) \cdot \lambda$ . Заметим теперь, что в случае  $n = l = 2$ ,  $\eta$  есть голоморфная функция, коэффициент растяжения которой есть квадрат модуля ее производной (см. пример 2.3). Нули голоморфных функций и их модулей в полиномиальном случае достаточно легко отслеживаются.

Таким образом, если имеется некоторый гармонический морфизм  $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^2$ , то подходящим выбором голоморфной функции можно получить потенциал, нулями которого будут поверхности уровня  $\psi$  (и нули коэффициента растяжения самого  $\psi$ ).

## 3.2 ПОСТРОЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ПОТЕНЦИАЛА ЧЕТЫРЕХПОЛЕВОЙ МОДЕЛИ С ПАРОЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВАКУУМОВ

Рассмотрим конкретный пример построения многополевой модели при помощи гармонических морфизмов.

Пусть  $m = 4, n = 2$  и  $\phi = (\phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^4)$  — поля. Гармонические морфизмы  $\psi = (a, b, c) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  есть полиномы степени не выше 2. Известный пример гармонического морфизма:

$$\psi = \begin{pmatrix} (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2 \\ 2\phi^1\phi^3 + 2\phi^2\phi^4 \\ 2\phi^1\phi^4 - 2\phi^2\phi^3 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Коэффициент растяжения его имеет единственный нуль в нуле  $(0, 0, 0, 0)$ , поэтому конструируемый потенциал также будет иметь этот нуль. Потребуем также, чтобы нулями конструируемого потенциала были поверхности уровня, определяемые уравнениями  $a = \pm 1, b = 0$ . Выберем для этого суперпотенциал, рассмотренный в примере 2.2, тогда

$$w = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}a^3 - b^2a - a \\ -\frac{1}{3}b^3 + a^2b - b \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Соответствующий комплексный суперпотенциал будет иметь вид:

$$\mathcal{W} = \frac{1}{3}z^3 - z, \quad (3.12)$$

где  $z = a + ib$ .

Наконец, положим потенциал  $V$  как:

$$V = 2|\phi|^2 \left\{ [(\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2 - 1]^2 + 4[\phi^1\phi^3 + \phi^2\phi^4]^2 \right\} \cdot \left\{ [(\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2 + 1]^2 + 4[\phi^1\phi^3 + \phi^2\phi^4]^2 \right\} \quad (3.13)$$

Множество его вакуумов действительно включает точку  $(0, 0, 0, 0)$  — нуль коэффициента растяжения  $\psi$  и две двумерные поверхности  $\mathcal{N}_{\pm}$  — поверх-

ности уровня  $(a, b)$ , каждую из которых определяет пара уравнений

$$\begin{cases} (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2 = \pm 1 \\ 2\phi^1\phi^3 + 2\phi^2\phi^4 = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Действие группы  $O(2)$  на  $W$  оставляет потенциал неизменным. Фиксируем  $O \in O(2)$  и обозначим  $OW = (W^1, W^2)$ . Выберем  $W^1$  в качестве суперпотенциала, тогда для любых  $A, B \in \mathbb{R}$  уравнения

$$\begin{cases} W^2 = A \\ c = 2B \end{cases} \quad (3.15)$$

определяют двумерную поверхность, которой принадлежат орбиты решений (не обязательно кинковых) уравнений BPS.

Заметим, что гармонический морфизм  $w = w(a, b)$  определяет уже рассмотренную модель из примера 2.2, для которого орбита определялась уравнением  $b = 0$ . Тогда, для нахождения кинковых решений выберем в качестве  $O$  матрицу поворота на угол, при котором поверхность  $\mathcal{N}^2$  пересекает обе поверхности  $\mathcal{N}_\pm$  при  $A = 0$ . Проверка показывает, что это угол 0. Заметим, что константа  $B$  ничем не фиксирована. Тогда суперпотенциал будет иметь вид

$$\begin{aligned} W^1 &= ((\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2) \\ &\cdot \left[ \frac{1}{3} ((\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2)^2 - (2\phi^1\phi^3 + 2\phi^2\phi^4)^2 - 1 \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Функции

$$\begin{aligned} W^2 &= (2\phi^1\phi^3 + 2\phi^2\phi^4) \\ &\cdot \left[ \frac{1}{3} (2\phi^1\phi^3 + 2\phi^2\phi^4)^2 - ((\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2)^2 + 1 \right], \\ c &= 2\phi^1\phi^4 - 2\phi^2\phi^3 \end{aligned} \quad (3.17)$$

определяют поверхность  $\mathcal{N}^2$ , которой принадлежит орбита. Заметим, что поверхность уровня  $W^2$  пересекает вакуумное многообразие только при

$A = 0$ . Это условие упрощает уравнение  $W^2 = 0$ , разбивая его на пару

$$\begin{aligned} \phi^1 \phi^3 + \phi^2 \phi^4 &= 0 \\ \frac{1}{3} (2\phi^1 \phi^3 + 2\phi^2 \phi^4)^2 - ((\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2)^2 + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Из этих двух уравнений только решения первого дадут топологические солитоны, поэтому воспользуемся им. Уравнение на  $\mathcal{N}^2$  упростилось:

$$\begin{cases} \frac{b}{2} = \phi^1 \phi^3 + \phi^2 \phi^4 = 0 \\ \frac{c}{2} = \phi^1 \phi^4 - \phi^2 \phi^3 = B. \end{cases} \quad (3.19)$$

Очевидно,

$$\nabla W^1 = (a^2 - b^2 - 1) \nabla a - 2ab \nabla b \quad (3.20)$$

с учетом  $b = 0$

$$\nabla W^1|_{b=0} = (a^2 - 1) \nabla a. \quad (3.21)$$

Т.е. для недостающего уравнения  $\mathcal{M}$ , функция  $F$  должна иметь градиент ортогональный  $\nabla a$  почти всюду (чтобы не переопределить ситсему).

Примером такой функции  $F$  является

$$F = F \left( \frac{\phi^1}{\phi^2}, \frac{\phi^3}{\phi^4} \right). \quad (3.22)$$

Итого, орбита  $\mathcal{M}$  определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} \phi^1 \phi^3 + \phi^2 \phi^4 &= 0, \\ \phi^1 \phi^4 - \phi^2 \phi^3 &= B, \\ F &= C. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Тогда уравнение орбиты можно дать параметрически

$$\mathcal{M} = \left\{ \left( \alpha \beta \frac{1}{t}, \beta \frac{1}{t}, t, -\alpha t \right) \in \mathbb{R}^4 \mid t \in I \subset \mathbb{R} \right\}, \quad (3.24)$$

где  $I$  — множество значений  $\phi^3$ , а  $\alpha, \beta$  — некоторые новые константы, необходимые для заданных вакуумов из условия  $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}_{\pm} = v_{\pm}$ ,  $v_{\pm}$  — нули

потенциала на соответствующих поверхностях. Вычисления дадут:

$$\phi_{\text{К}}^3 = \phi_{\text{К}}^3(x) = \pm \left\{ \sqrt{\gamma^2 + \beta^4} + \gamma \tanh \left[ 8x (\alpha^2 + 1)^2 \gamma \right] \right\}^{\frac{1}{4}}, \quad (3.25)$$

где  $\gamma = \frac{1}{(\alpha^2 + 1)^2} \sqrt{\beta^2(\alpha^2 + 1)^2 + \frac{1}{4}}$  Тогда решением будет

$$\phi_{\text{К}} = (\alpha\beta(\phi_{\text{К}}^3)^{-1}, \beta(\phi_{\text{К}}^3)^{-1}, \phi_{\text{К}}^3, -\alpha\phi_{\text{К}}^3). \quad (3.26)$$

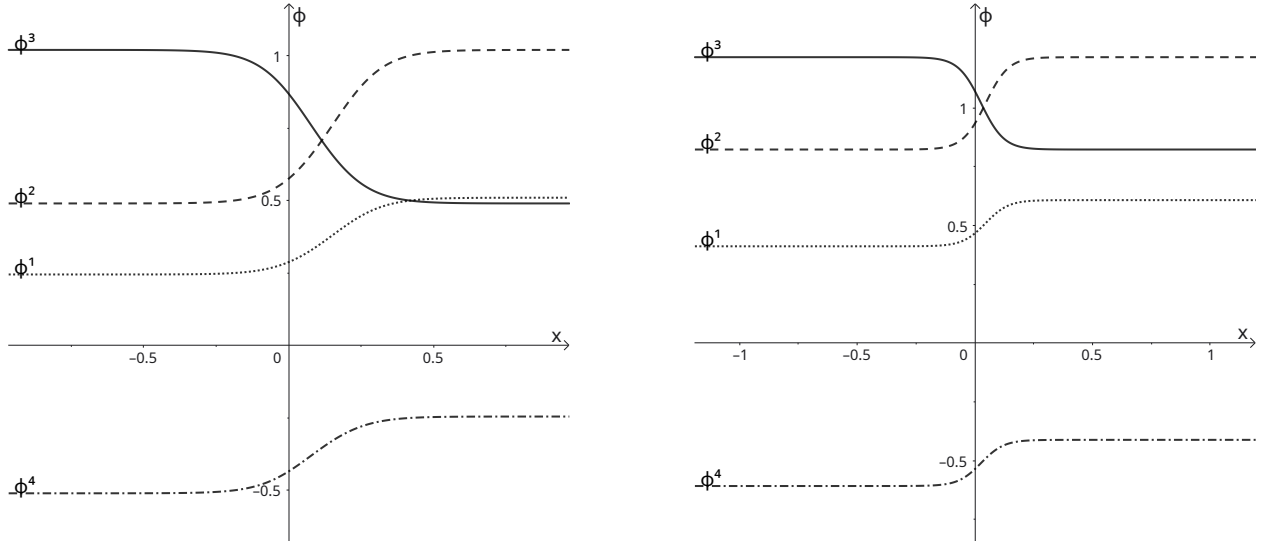


Рисунок 3.1 — Пара кинковых решений для констант  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  (слева) и для  $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1$  (справа). С левой стороны каждого графика подписаны компоненты кинка.

**Замечание.** Интересно также рассмотреть “вырожденный” кинк при  $\alpha = 0$ . В этом случае решение будет иметь вид

$$\phi_{\text{К}} = (0, \beta(\phi_{\text{К}}^3)^{-1}, \phi_{\text{К}}^3, 0), \quad (3.27)$$

что позволит наглядно увидеть двумерное сечение четырехмерного пространства полей (Рис. 3.2).

Заметим также, что при  $\beta = 0$  решение обретает вид

$$\phi_{\text{К}}(x) = (0, 0, \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh 4x \right)^{\frac{1}{4}}, 0), \quad (3.28)$$

т.е. третья компонента совпадает с ненулевой компонентой решения из при-

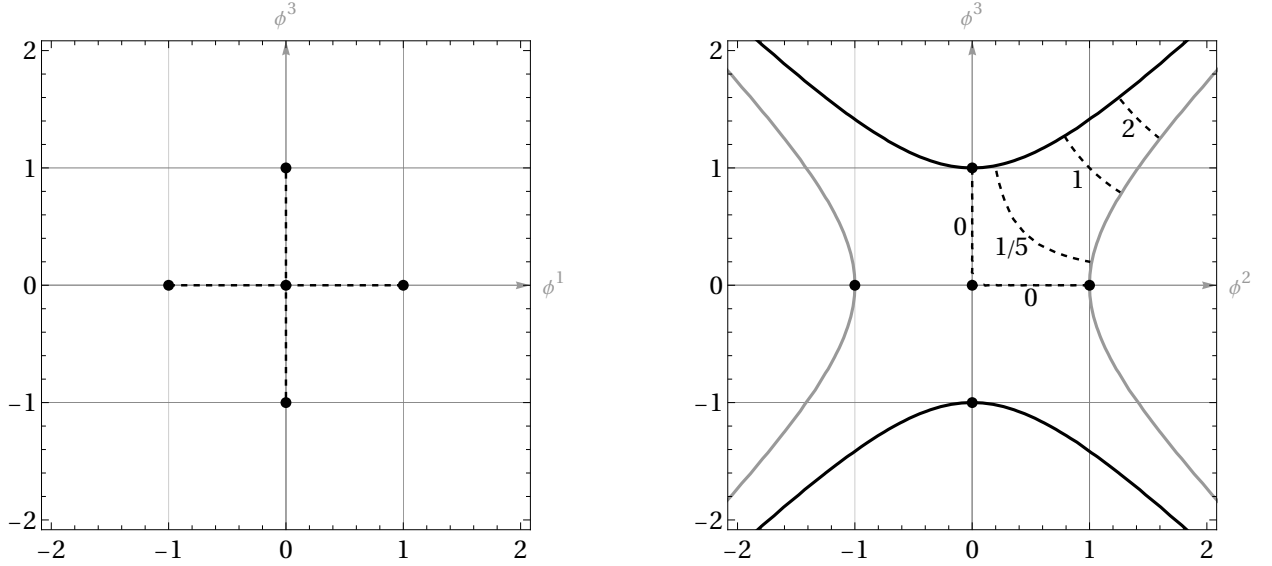


Рисунок 3.2 — Сечение пространства полей двумерной плоскостью  $\phi^2 = 0, \phi^4 = 0$  (слева) и плоскостью  $\phi^1 = 0, \phi^4 = 0$  (справа). Точками слева отмечены соответствующие вакуумы модели 2.3. Пунктиром на обоих графиках отмечены орбиты кинковых решений для различных значений параметра  $B$ . Сплошными линиями справа представлены сечения вакуумного многообразия, представленного в виде двух гипербол, помеченных серым и черным цветом. Обратите внимание, что линии, помеченные одним цветом, являются сечением связного многообразия.

мера 2.3. Связано это с тем, что ограничение градиента на плоскость  $O_{\phi^2\phi^3}$  позволяет ввести комплексное поле  $z = \phi^2 + i\phi^3$  и соответствующий комплексный суперпотенциал, совпадающий суперпотенциалом из примера 2.3.

Примечательно, что в работе [14] рассматривалась двухполевая модель с потенциалом вида

$$V = \frac{1}{4} ((\phi^1)^2 - (\phi^2)^2 - 1)^2, \quad (3.29)$$

вакуумное многообразие которой представляет из себя пару гипербол. Анализ показал, что единственное возможное статическое кинковое решение должно иметь орбиту в виде прямой с уравнением  $\phi^2 = 0$ . В нашем случае ситуации кардинально меняется: существует целое параметрическое множество кинковых решений, соединяющих различные точки вакуумного многообразия.

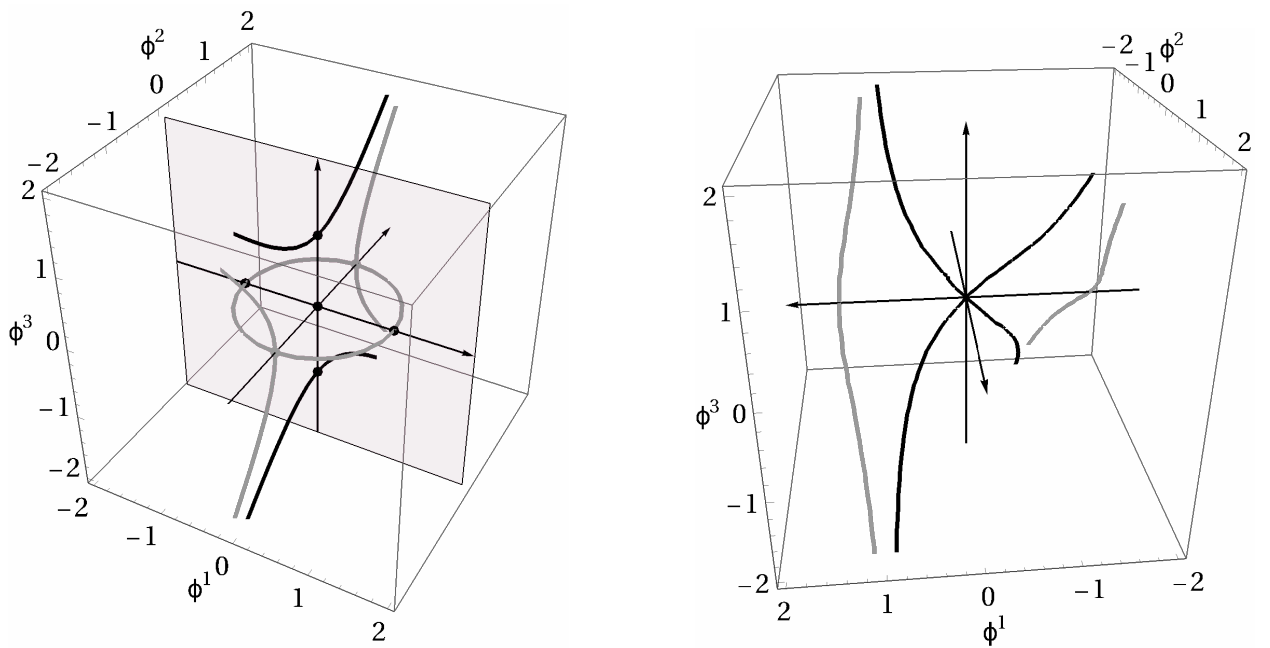


Рисунок 3.3 — Трёхмерные сечения пространства полей трёхмерной плоскостью  $\phi^4 = 0$  (слева) и  $\phi^4 = 1$  (справа). Накладно видно, что кривые одного цвета на рисунке 3.2 (справа) действительно являются сечениями связного вакуумного многообразия. Сечением графика плоскостью на рисунке слева является, очевидно, рисунок 3.2 (слева).

## 4 ПОЛУЧЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО НАБОРА ВАКУУМОВ

Приведем метод, позволяющий для данного потенциала получить новый потенциал с тем же набором решений.

Пусть  $V$  —  $m$ -полевой потенциал,  $v_{\pm}$  — нули потенциала, которым соответствует решение  $\phi(x)$  уравнений движения  $\frac{d^2\phi}{dx^2} = (\nabla V)(\phi)$ , орбита  $\phi(x)$  есть кривая  $\mathcal{M}$ . Пусть также  $F$  — неотрицательная функция, обращающаяся в ноль на орбите вместе со своими частными производными. Тогда можно рассмотреть новый потенциал

$$\tilde{V} = V + F, \quad (4.1)$$

имеющий ту же пару нулей  $v_{\pm}$ , и для которого уравнения движения обретут вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dx^2} &= (\nabla \tilde{V})(\phi) \\ &= (\nabla V)(\phi) + (\nabla F)(\phi). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Подстановка решения  $\phi(x)$  в них даст

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dx^2}(x) &= (\nabla V)(\phi) + (\nabla F)(\phi)|_{\mathcal{M}} \\ &= \frac{d^2\phi}{dx^2}(x) + 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

— верное тождество, т.е.  $\phi(x)$  — решение уравнений движения для потенциала  $\tilde{V}$ .

Заметим, что при подобном построении потенциала  $\tilde{V}$  можно сохранить и более одного решения. Для этого нужно выбрать аналогичный набор функций  $F^1, \dots, F^n$  для каждого из  $n$  решений. Потенциал в таком случае

будет иметь вид

$$\tilde{V} = V + F^1 \cdot \dots \cdot F^n. \quad (4.4)$$

Данный метод позволяет сохранять решения исходного потенциала, но не гарантирует отсутствия новых, в исходном потенциале не содержащихся.

Зачастую, в приложениях требуются потенциалы с дискретным набором нулей. Прибавление функции  $F^1 \cdot \dots \cdot F^n$  позволяет из потенциала с поверхностью нулей выбрать необходимый набор из  $n$  решений и построить новый потенциал, среди решений которого будут все избранные.

**Пример.** Воспользуемся результатами из примера 3.2. Фиксируем две пары констант

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_1 = \frac{1}{2}, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2}, \beta_2 = 1, \end{aligned} \quad (4.5)$$

для каждой из которых существует кинковое решение  $\phi_K^{(1)}, \phi_K^{(2)}$  с орбитами  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  с концами в вакуумах

$$\begin{aligned} v_{\pm}^1 &= \left( \frac{1}{4} \frac{\sqrt{10}}{(19 \cdot 3 \pm 8\sqrt{41})^{\frac{1}{4}}}, \frac{1}{2} \frac{\sqrt{10}}{(19 \cdot 3 \pm 8\sqrt{41})^{\frac{1}{4}}}, \right. \\ &\quad \left. \frac{(19 \cdot 3 \pm 8\sqrt{41})^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{2} \frac{(19 \cdot 3 \pm 8\sqrt{41})^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{10}} \right), \\ v_{\pm}^2 &= \left( \frac{1}{2} \frac{\sqrt{5}}{(33 \pm 4\sqrt{29})^{\frac{1}{4}}}, \frac{\sqrt{5}}{(33 \pm 4\sqrt{29})^{\frac{1}{4}}}, \right. \\ &\quad \left. \frac{(33 \pm 4\sqrt{29})^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{5}}, -\frac{(33 \pm 4\sqrt{29})^{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{5}} \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Размерность  $\mathcal{N}_{\pm}$  равна двум, т.е. для получения дискретных нулей потенциала требуется найти еще две пары функций  $F^s, G^s$ ,  $s = 1, 2$  для каждой  $\mathcal{M}_s$  соответственно. Функция  $F = F(\frac{\phi^1}{\phi^2}, \frac{\phi^3}{\phi^4})$  определяет орбиты обоих решений.

Пусть тогда  $F = \frac{\phi^1}{\phi^2} + \frac{\phi^3}{\phi^4}$ . Для каждого решения получим

$$\begin{aligned} F|_{\mathcal{M}_1} &= \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}, \\ F|_{\mathcal{M}_2} &= \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Т.е., орбиты решений удовлетворяют уравнениям  $F = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ . Для устранения сингулярностей домножим каждое из них на  $\phi^2\phi^4$ , получим функции  $F^1, F^2$ :

$$\begin{aligned} F^1 &= \phi^1\phi^4 + \phi^2\phi^3 + \frac{1}{2}\phi^2\phi^4, \\ F^2 &= \phi^1\phi^4 + \phi^2\phi^3 + \frac{3}{2}\phi^2\phi^4. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Для нахождения функций  $G^s$ , заметим, что для любых кинковых решений

$$\begin{aligned} \phi_K^1\phi_K^3 &= \alpha\beta, \\ \phi_K^2\phi_K^4 &= -\alpha\beta, \end{aligned} \quad (4.9)$$

откуда

$$[\phi^1\phi^3 - \phi^2\phi^4]_{\mathcal{M}_s} = 2\alpha_s\beta_s. \quad (4.10)$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} G^1 &= \phi^1\phi^3 - \phi^2\phi^4 - \frac{1}{2}, \\ G^2 &= \phi^1\phi^3 - \phi^2\phi^4 - 1. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Градиенты полученных функций  $F^s, G^s$  не обращаются в ноль на  $\mathcal{M}_s$ , однако, это можно исправить, возведя каждую из функций в квадрат. Тогда новый потенциал  $\tilde{V}$  может быть получен как

$$\begin{aligned} \tilde{V} &= V + (F^1F^2)^2 + (G^1G^2)^2 \\ &= 2|\phi|^2 \left\{ [(\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2 - 1]^2 + 4[\phi^1\phi^3 + \phi^2\phi^4]^2 \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ [(\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2 + 1]^2 + 4[\phi^1\phi^3 + \phi^2\phi^4]^2 \right\} \\ &\quad + \left[ \phi^1\phi^4 + \phi^2\phi^3 + \frac{1}{2}\phi^2\phi^4 \right]^2 \left[ \phi^1\phi^4 + \phi^2\phi^3 + \frac{3}{2}\phi^2\phi^4 \right]^2 \\ &\quad + \left[ \phi^1\phi^3 - \phi^2\phi^4 - \frac{1}{2} \right]^2 \left[ \phi^1\phi^3 - \phi^2\phi^4 - 1 \right]^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе развит геометрический подход к нахождению статических кинковых решений в многополевых теоретико-полевых моделях, основанный на теории гармонических морфизмов и свойствах BPS-уравнений.

Доказано утверждение о том, что если пересечение поверхностей уровня функций  $F^s$  образует кривую  $\mathcal{M}$ , в каждой точке которой градиенты  $\nabla F^s$  ортогональны  $\nabla W$ , то эта кривая является орбитой некоторого решения BPS-уравнений. Данный критерий позволяет верифицировать орбиту без решения самих уравнений, что существенно упрощает поиск кинков.

Введен конформный суперпотенциал — векторная функция  $w = (W^1, \dots, W^n)$ , компоненты которой удовлетворяют соотношению

$$\nabla W^k \cdot \nabla W^s = 2V \delta^{ks}. \quad (4.13)$$

Действие ортогональных матриц на конформный суперпотенциал порождает параметрическое семейство BPS-уравнений, что позволяет находить кинковые решения, недоступные при фиксированном выборе суперпотенциала.

Слабо конформные отображения — в частности, полиномиальные — являются гармоническими морфизмами, для которых доказан ряд ограничительных теорем.

В качестве нетривиального приложения построена явная четырех-полевая модель, потенциал которой определяется гармоническим морфизмом  $\psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Вакуумное многообразие этой модели — некомпактное: оно включает точку и пару двумерных поверхностей. Найдено параметрическое семейство кинковых решений, связывающих различные точки вакуумного многообразия. Это разительно контрастирует с аналогичными

двухполевыми моделями, где единственная кинковая орбита определялась уравнением прямой  $\phi^2 = 0$ .

Наконец, предложен метод получения потенциала с дискретным набором нулей из потенциала с непрерывным вакуумным многообразием путем прибавления произведения функций, обращающихся в нуль на заданных орбитах. Метод не нарушает структуру уже известных кинковых решений, но может порождать новые.

Физические приложения полученных результатов весьма широки. В космологии описанные многополевые модели с некомпактными вакуумными многообразиями и параметрическими семействами кинковых решений могут служить теоретической основой для изучения сетей доменных стенок нестандартной топологии [1]. Модели с дискретными вакуумами, получаемые описанным методом, представляют интерес для построения космологических сценариев с несколькими последовательными фазовыми переходами. В физике частиц развитый формализм применим к суперсимметричным моделям, где некомпактные вакуумные многообразия возникают естественным образом в суперсимметричных потенциалах, а BPS-кинки отвечают состояниям, насыщающим границу масс в центральных зарядах алгебры суперсимметрии.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Vilenkin A., Shellard E. P. S.* Cosmic Strings and Other Topological Defects. — Cambridge U.K. : Cambridge University Press, 2000.
2. *Vachaspati T.* Kinks and Domain Walls: An Introduction to Classical and Quantum Solitons. — Cambridge U.K. : Cambridge University Press, 2006.
3. *Manton N., Sutcliffe P.* Topological Solitons. — Cambridge U.K. : Cambridge University Press, 2004.
4. *Shnir Y. M.* Topological and Non-Topological Solitons in Scalar Field Theories. — Cambridge U.K. : Cambridge University Press, 2018.
5. *Rajaraman R.* Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. — Москва : Мир, 1985. — 414 с.
6. *Hull C. M.* New gauged  $N = 8$ ,  $D = 4$  supergravities // Class. Quantum Grav. — 2003. — Vol. 20. — P. 5407.
7. The sine-Gordon Model and its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High Energy Physics. Vol. 10 / ed. by J. Cuevas-Maraver, P. G. Kevrekidis, F. L. Williams. — Heidelberg : Springer-Verlag, 2014. — (Nonlinear Systems and Complexity).
8. *Higgs P. W.* Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons // Phys. Rev. Lett. — 1964. — Vol. 13. — P. 508.
9. *Bogomolny E. B.* Stability of Classical Solutions // Sov. J. Nucl. Phys. — 1976. — Vol. 24. — P. 449. — [Yad. Fiz. 24, 861 (1976)].
10. *Prasad M. K., Sommerfield C. M.* Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon // Phys. Rev. Lett. — 1975. — Vol. 35. — P. 760.

11. Topological Defects and the Trial Orbit Method / D. Bazeia [et al.] // Mod. Phys. Lett. A. — 2002. — Vol. 17. — P. 1945.
12. *Alonso Izquierdo A., González León M. A., Mateos Guilarte J.*  $N = 2$  supersymmetric kinks and real algebraic curves // Phys. Lett. B. — 2000. — Vol. 480. — P. 373.
13. Construction of Topological Defect Networks with Complex Scalar Fields / V. I. Afonso [et al.] // Nucl. Phys. B. — 2009. — Vol. 810. — P. 427.
14. *Striet J., Bais F. A.* Dynamical vacuum selection in field theories with flat directions in their potential // J. High Energy Phys. — 2003. — Vol. 2003. — P. 032.
15. What becomes of vortices in theories with flat directions / A. A. Penin [et al.] // Phys. Lett. B. — 1996. — Vol. 389. — P. 13.
16. Vortices in theories with flat directions / A. Achúcarro [et al.] // Phys. Rev. D. — 2002. — Vol. 66. — P. 105013.
17. *Pickles M., Urrestilla J.* Nielsen-Olesen strings in Supersymmetric models // J. High Energy Phys. — 2003. — Vol. 2003. — P. 052.
18. *Baird P., Wood J. C.* Harmonic morphisms between Riemannian manifolds. Vol. 29. — Oxford University Press, 2003. — (London Mathematical Society Monographs).
19. *Svensson M.* Polynomial harmonic morphisms : дис. ... маг. / Svensson M. — Lund University, 1998.
20. *Alonso Izquierdo A., González León M. A., Mateos Guilarte J.* Kinks from dynamical systems: domain walls in a deformed  $O(N)$  linear sigma model // Nonlinearity. — 2000. — Vol. 13. — P. 1137.
21. *Guerrero R., Rodriguez R. O., Chavez R.* A  $SU(5) \times Z_2$  kink solution and its local stability // 1903.10634 // arXiv. — 2019.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

В этом разделе мы докажем свойство, сформулированное в 2.1.

Пусть дан  $m$ -полевой суперпотенциал  $W$ , и пусть также известны функционально независимые функции  $F^s : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, s = \overline{2, m}$  такие, что

- 1)  $\dim(F^s)^{-1}(0) = m - 1$  — множество уровня нуля есть гладкая поверхность размерности  $m - 1$ .
- 2)  $\bigcap (F^s)^{-1}(0) = \mathcal{M}, \dim \mathcal{M} = 1$  — некоторая гладкая кривая.
- 3)  $(\nabla W \nabla F^s)|_{\mathcal{M}} = 0$ .
- 4)  $|\nabla F^s|_{\mathcal{M}} \neq 0, |\nabla W|_{\mathcal{M}} \neq 0$  (за исключением, быть может, конечного числа точек).

Тогда существует решение  $\phi = \phi(x)$  уравнений BPS

$$\frac{d\phi}{dx} = (\nabla W)(\phi), \quad (4.14)$$

причем его орбита есть кривая (или часть кривой)  $\mathcal{M}$ .

**Доказательство.** Из уравнений BPS получим систему

$$\frac{d\phi^1}{W_1} = \dots = \frac{d\phi^m}{W_m}. \quad (4.15)$$

Пусть  $\phi(a), a \in A$  — параметризация  $\mathcal{M}$ , и пусть система (4.15) не обращается в тождество на  $\mathcal{M}$ , т.е.

$$W_s(\phi) = \phi_a^s A_s, \quad (4.16)$$

где  $A_s = A_s(a)$  — некоторые функции, причем  $A_s \neq A_k$  для некоторой пары  $s, k$ . Множество  $A$  определяет семейство линейных оболочек  $L(a) = L\{\nabla(F^s)(\phi)(a) | s = \overline{2, m}\}$ , причем  $\dim L(a) = m - 1$ , т.е. существует одномерное ортогональное дополнение  $L^\perp(a)$  оболочки  $L(a)$ . Очевидно,  $L^\perp(a) = L\{\phi_a(a)\}$ . По условию,  $\nabla(W)(\phi) \perp \nabla(F^s)(\phi)$ , т.е.  $\nabla(W)(\phi) \in$

$L^\perp(a)$ , т.е., ввиду одномерности  $L^\perp(a)$ ,  $W_s(\phi) = \phi_a^s \cdot B$  для некоторой функции  $B = B(a) : A \rightarrow \mathbb{R}$ , что неверно ввиду (4.16). Полученное противоречие доказывает утверждение.

**Замечание.** Данное утверждение не гарантирует, что полученное решение будет топологическим солитоном, или что оно будет иметь конечную энергию.