Моделирование динамики кластеров доменных стенок в ранней Вселенной

Летягин Иван Дмитриевич
Научный руководитель: к.ф.-м.н., доц. каф. 40, Никулин В.В.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

25 июня 2026 г.

Отчёт о дипломной работе

Введение

Первичные чёрные дыры (ПЧД) являются многообещающими кандидатами для объяснения происхождения чёрных дыр промежуточных масс, части скрытой массы Вселенной, стохастического фона гравитационных волн, а также могут быть центрами ранних галактик.
Рассматриваемый механизм образования ПЧД — коллапс полевых доменных стенок.
Ранее исследовалась эволюция сферических стенок, но в ходе численного моделирования образуются конфигурации более сложной геометрии

Цель: уточнить спектр масс ПЧД, образующихся через коллапс доменных стенок без использования сферического приближения
Задачи:

- Вывести уравнение, описывающее эволюцию стенки в тонкостенном приближении на фоне внешней метрики
- Разработать способ численного описания движения поверхности доменной стенки
- Провести моделирование кластера доменных стенок и получить спектр масс ПЧД

Полевая структура доменных стенок

В ходе численного моделирования кластеров доменных стенок[1] из квантовых флуктуаций скалярного поля на инфляционной стадии возникают сложные несферические конфигурации:

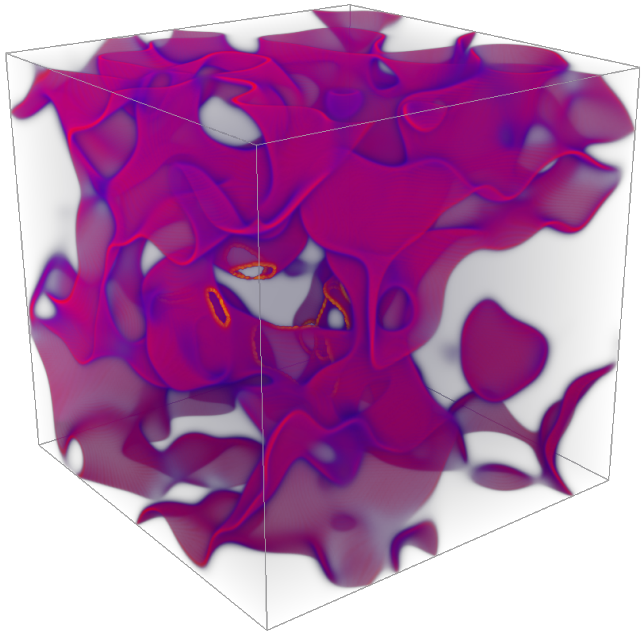

Рис.: «Солитонная пена»

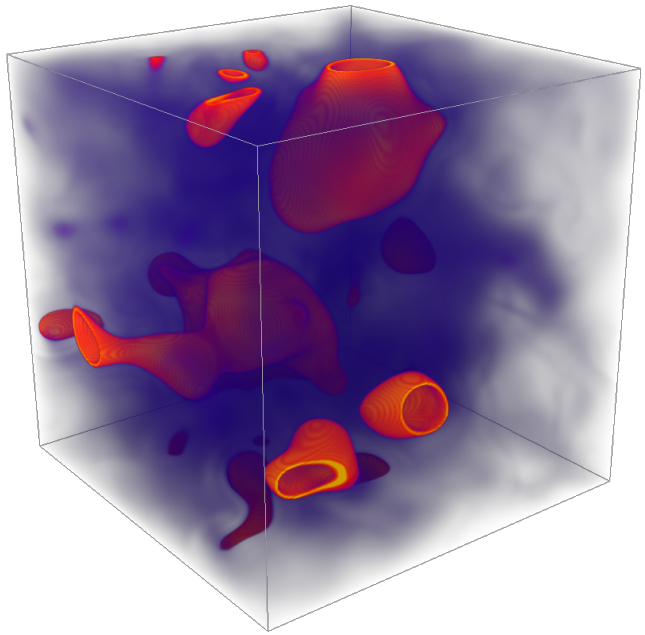

Рис.: «Доменные пузыри»

[1] Kirillov, A.A. and Murygin, B.S. and Nikulin, V.V. Soliton foam formation in the early Universe, 2025

Тонкостенное приближение

Связь между системами координат — $X^\mu = X^\mu_{\text{wall}}(\tau, \vec{s}) + e^\mu(\tau, \vec{s})\, h$

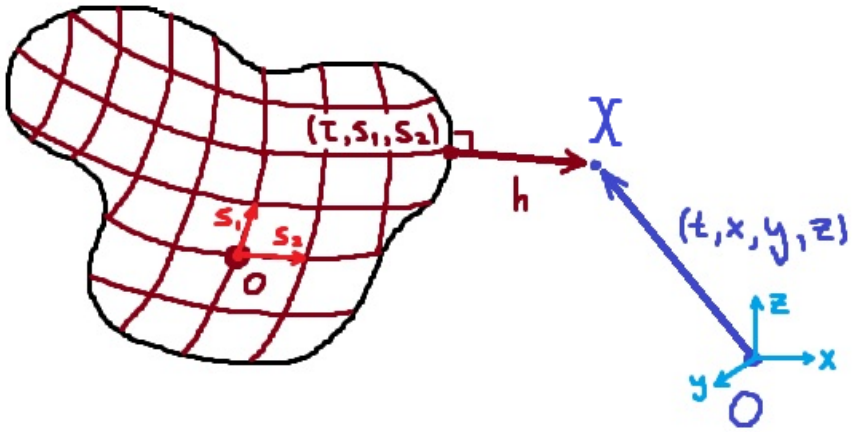

Рис.: Переход к новой системе координат; точка X представлена в новых координатах (τ, s_1, s_2, h) и в старых координатах (t, x, y, z)

Переход от полевого описания к поверхностному

$$S[\phi] = \int d^4x \sqrt{-\eta} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi\, \partial^\mu \phi - V(\phi) \right) \approx -\sigma \int d\tau\, ds^2 \sqrt{|\partial_a X^\mu_{\text{wall}} \partial_b X^{\text{wall}}_\mu|} \quad (1)$$

Уравнение движения

Варьируя действие, получаем уравнение движения:

Уравнение движения релятивистской мембраны

$$\frac{1}{\sqrt{h}}\,\partial_a\left(\sqrt{h}\,h^{ab}\partial_b X^\sigma\right) + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\,h^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu = 0 \tag{2}$$

где h^{ab} — метрика на поверхности доменной стенки, индексы a и b обозначают внутренние координаты стенки (τ, s_1 и s_2).

Рассмотрим эволюцию стенок на фоне плоской статической Вселенной (метрика Минковского). Тогда уравнение движения принимает вид:

Релятивистское волновое уравнение

$$\ddot{\vec{X}} - \frac{1}{\gamma^2}\,\Delta_s \vec{X} = 0 \tag{3}$$

где Δ_s — оператор Лапласа-Бельтрами на поверхности стенки, $\gamma = \gamma(\dot{X})$ — гамма-фактор точки на стенке.

Анализ эволюции кластеров

Рассматриваемый механизм эволюции доменных стенок — движение из-за сил поверхностного натяжения. Гравитационное взаимодействие пренебрежимо мало.
В прошлых исследованиях[2] использовалось сферическое приближение, которое не позволяет учитывать один из механизмов эволюции стенок — фрагментацию.

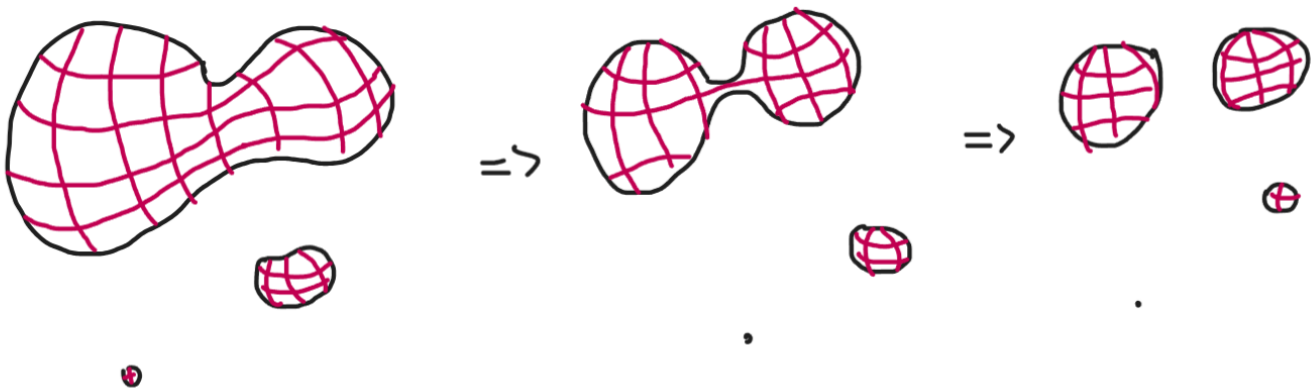

Рис.: Наглядный пример механизма фрагментации доменных стенок сложных форм

[2] Belotsky K. M. et al. Clusters of Primordial Black Holes // Eur. Phys. J. C. — 2019. — Т. 79. — № 3. — С. 246.

Геометрия кластера

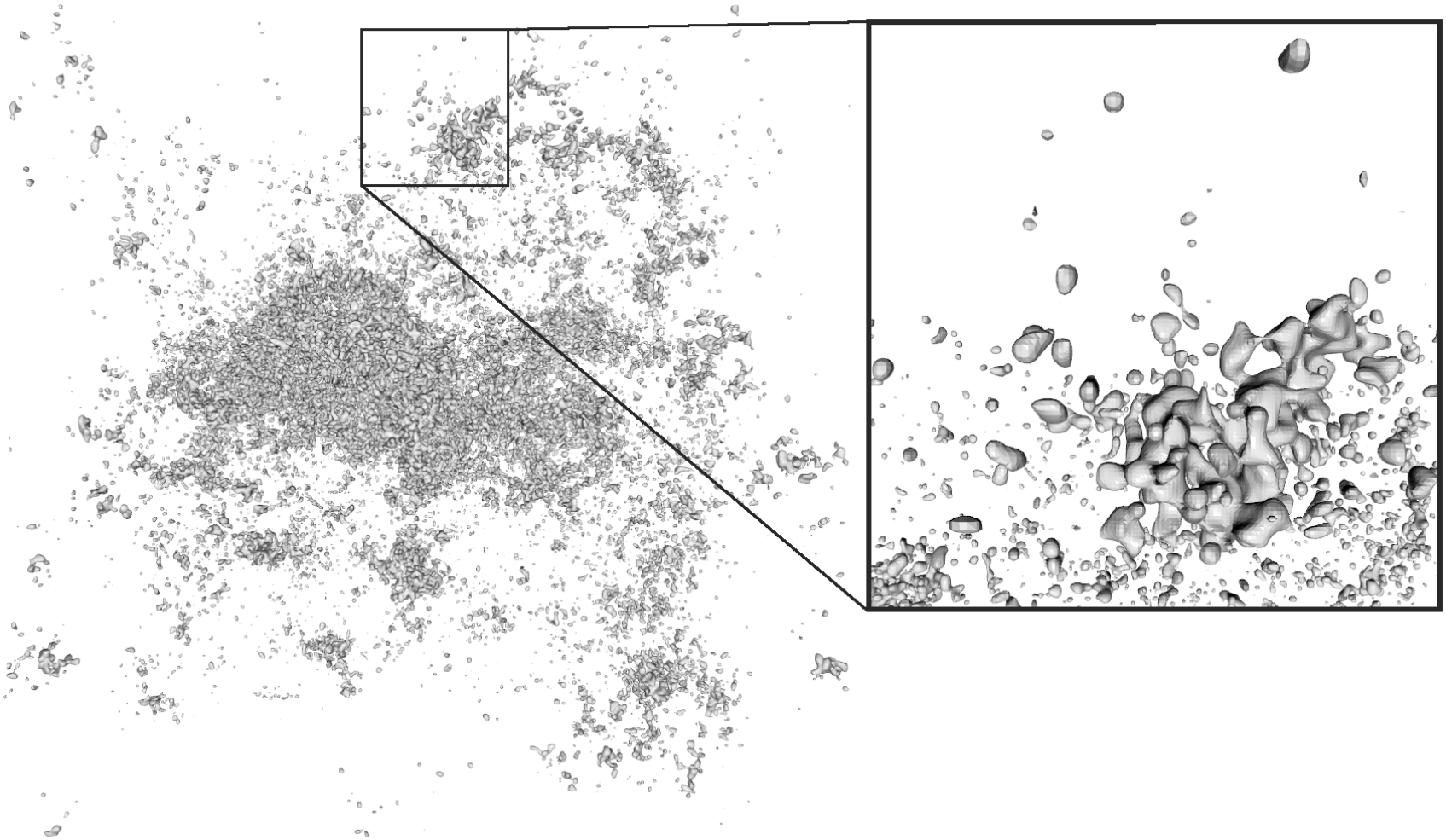

Рис.: Пример начального состояния кластера доменных стенок, сгенерированного флуктуациями скалярного поля на инфляционной стадии; параметры генерации — размер 5 e-фолдов, $\phi_{\text{in}} = 2.3$, $P(k) \propto k^{-3}$

Спектр ПЧД

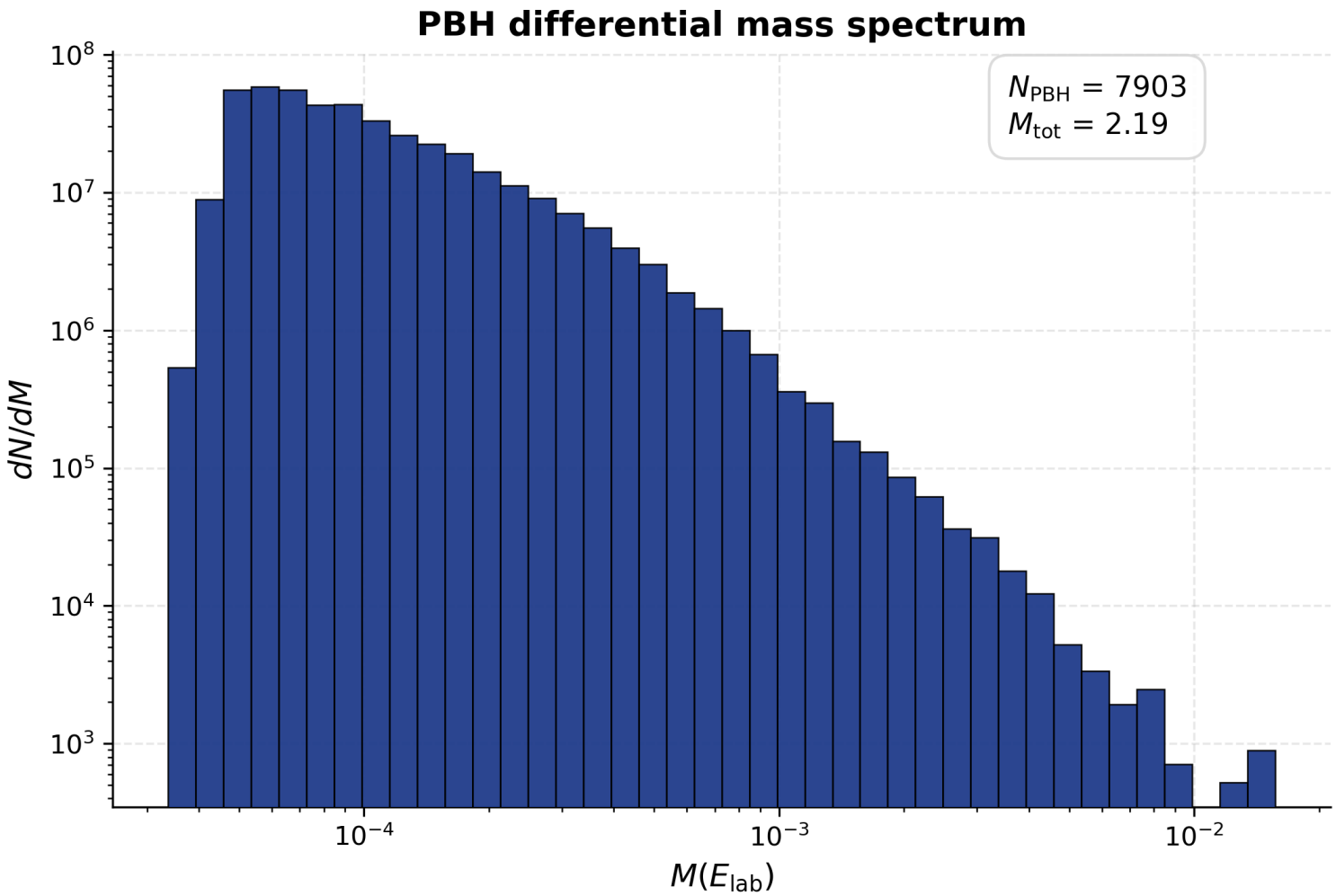

Рис.: Пример дифференциального спектра масс ПЧД, образованного коллапсом кластера доменных стенок размером 5 e-фолдов, $\phi_{\mathrm{in}} = 2.3$, $P(k) \propto k^{-3}$

Анализ статистики

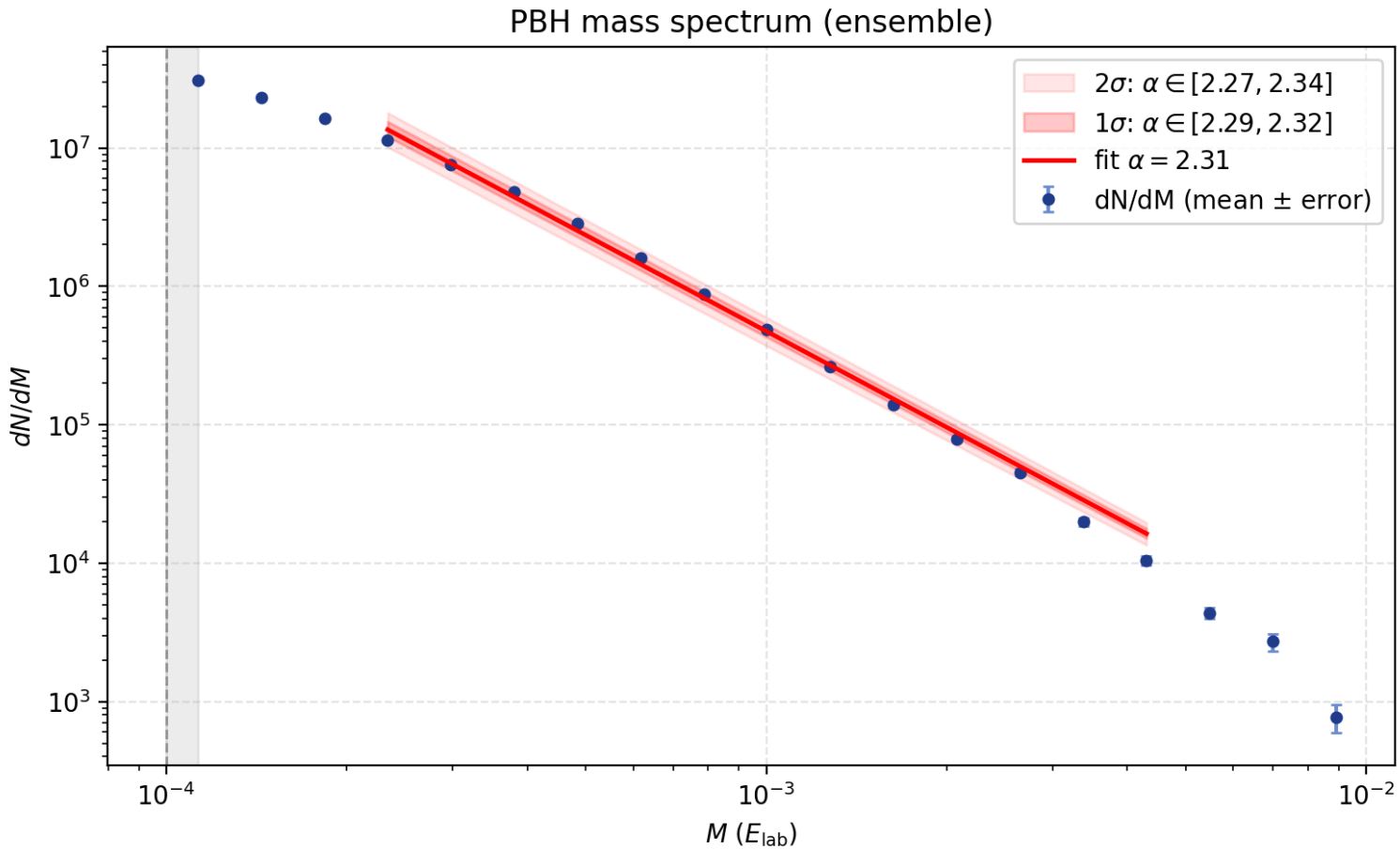

Рис.: Монте–Карло дифференциальный спектр масс ПЧД по ансамблю из 15 прогонов (5 e-фолдов, $\phi_{\text{in}} = 2.3$, $P(k) \propto k^{-3}$). Красная линия — фитирование взвешенным МНК $dN/dM \propto M^{-\alpha}$, $\alpha = 2{,}31^{+0{,}01}_{-0{,}02}$; закрашенные области — доверительные интервалы по бутстрепу

Анализ спектра

Для теоретической модели[1] образования ПЧД через коллапс стенок в сферическом приближении спектр масс имеет вид:

Теоретический спектр

$$\frac{dN}{dM} \propto M^{-\alpha}, \quad \alpha = 1,75$$

Для ансамбля симуляции спектр масс имеет наклон:

Фитирование численного спектра

$$\alpha = 2{,}31^{+0{,}01}_{-0{,}02} \quad (1\sigma), \qquad \alpha \in [2{,}27;\ 2{,}34] \quad (2\sigma)$$

Наблюдается преобладание ПЧД меньших масс, что предположительно вызвано фрагментацией больших стенок сложной геометрии.

[1] Belotsky K. M. et al. Clusters of Primordial Black Holes // Eur. Phys. J. C. — 2019. — Т. 79. — № 3. — С. 246.

Заключение

Решённые задачи:

1. Выведено общее уравнение движения доменной стенки на фоне внешней метрики в тонкостенном приближении
2. Написана программа для численной симуляции эволюции кластеров, позволяющая определять множество параметров доменных стенок и образующихся из них ПЧД
3. Уточнён спектр масс: $dN/dM \propto M^{-2,31^{+0,01}_{-0,02}}$ вместо теоретического $dN/dM \propto M^{-1,75}$. Отличие, предположительно, вызвано фрагментацией.

В дальнейшем будут решены задачи:

1. Учёт диссипации энергии за счёт излучения гравитационных волн, скалярных частиц, потока Хаббла и взаимодействия с плазмой
2. Сравнение с будущими экспериментальными данными, способными дать наблюдательный спектр ПЧД (LIGO/Virgo/KAGRA, LISA, NANOGrav)

Приложение 1: Тонкостенный переход

Преобразования ниже делаются с учётом того, что $(\phi')^2 = 2V(\phi)$ и $\int 2V(\phi_{\text{wall}})\, dh = \sigma$

Переход от полевой динамики к поверхностной

$$
\begin{aligned}
S[\phi] &= \int d^4x\sqrt{-\eta}\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - V(\phi)\right) = \\
&= \int d\tau\, ds^2\, dh\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\left(\gamma_{ab}\,\partial^a\phi\,\partial^b\phi - \partial^h\phi\,\partial^h\phi\right) - V(\phi)\right) = \\
&= \int d\tau\, ds^2\, dh\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\left(\gamma_{ab}\,\partial^a\phi_{\text{wall}}(h)\,\partial^b\phi_{\text{wall}}(h) - \partial^h\phi_{\text{wall}}(h)\,\partial^h\phi_{\text{wall}}(h)\right) - V(\phi_{\text{wall}})\right) = \\
&= \int d\tau\, ds^2\, dh\sqrt{\gamma}\left(-\frac{1}{2}\left(\phi'_{\text{wall}}(h)\right)^2 - V(\phi_{\text{wall}})\right) = -\int d\tau\, ds^2 \int 2V(\phi_{\text{wall}})\sqrt{\gamma}\, dh = \\
&= -\sigma\int d\tau\, ds^2\sqrt{\gamma} = -\sigma\int d\tau\, ds^2\sqrt{\left|\partial_a X^\mu_{\text{wall}}\,\partial_b X^{\text{wall}}_\mu\right|} = S_{\text{NG}}[X_{\text{wall}}]\,,
\end{aligned}
$$

Приложение 2: Численная схема

В качестве приближенно симплектического метода был выбран метод leapfrog-интегратора с KDK (kick-drift-kick) реализацией, который сохраняет фазовый объём с высокой точностью по теореме о композициях симплектиков.
KDK-интегратор состоит из трёх шагов — два полушага по импульсу и один шаг по координате, которые описываются уравнениями Гамильтона:

Уравнения Гамильтона

$$\dot{\pi} = -\vec{n}\frac{\partial H}{\partial \vec{x}}, \qquad \dot{v}_{\perp} = \frac{\partial H}{\partial \pi} \tag{4}$$

Таким образом совершается классический переход от одного уравнения второго порядка к двум уравнениям первого порядка.

Приложение 2: Численная схема

Дано: $(\vec{r}_i^{\,n}, \pi_i^n)$, шаг h, натяжение σ

- **Геометрия в начале:** $L\vec{r}, A, \vec{n} \leftarrow \text{compute_geometry}(\vec{r}_i^{\,n})$
- $\gamma_i = \sqrt{1 + (\pi_i^n/(\sigma A_i))^2}, \; F_i = \frac{\sigma}{\gamma_i}\vec{n}_i L\vec{r}_i$
- $\pi_i^{n+1/2} = \pi_i^n + \frac{h}{2}F_i$ (первый полу-кик)
- $v_{\perp i} = \pi_i^{n+1/2} \Big/ \sqrt{(\sigma A_i)^2 + (\pi_i^{n+1/2})^2}$ (точная связь)
- $\vec{r}_i^{\,n+1} = \vec{r}_i^{\,n} + h\, v_{\perp i}\, \vec{n}_i$ (дрейф)
- **Геометрия в конце:** $L\vec{r}', A', \vec{n}' \leftarrow \text{compute_geometry}(\vec{r}^{\,n+1})$
- $\gamma_i' = \sqrt{1 + (\pi_i^{n+1/2}/(\sigma A_i'))^2}, \; F_i' = \frac{\sigma}{\gamma_i'}\vec{n}_i'^{\,T} L\vec{r}_i'$
- $\pi_i^{n+1} = \pi_i^{n+1/2} + \frac{h}{2}F_i'$ (второй полу-кик)

Приложение 3: Треугольная сетка, регуляризация

Начальная полевая конфигурация кластера переводится в поверхность с помощью триангуляции алгоритмом marching cubes. Полученная триангулированная поверхность симулируется методами, описанными в Приложении 2.
Так как треугольная сетка для устойчивости решения требует максимальной регулярности (входящие треугольники должны быть максимально близки к равносторонним), то в ходе симуляции используются различные методы регуляризации:

- Тангенциальное сглаживание — это сдвиг вершин вдоль поверхности (в касательной плоскости), чтобы выровнять сетку почти без изменения её формы
- Схлопывание рёбер — это удаление ребра, которое короче некоторого заданного предела
- Переворот рёбер — это замена общей диагонали в паре соседних треугольников на другую с целью улучшения формы сетки без смещения вершин

Схлопывание рёбер и задаёт разрешение сетки, позволяя детектировать образование ПЧД.

Приложение 4: Уравнение движения на фоне FLRW

Учёт *FLRW*-метрики расширяющейся Вселенной при слабо меняющейся постоянной Хаббла H приводит к сложным нелинейным уравнениям:

$$\boxed{\ddot{\vec{X}} + 2H\dot{\vec{X}}\left(1 - \frac{a^2}{\gamma^2}\left(\nabla_s \vec{X}\right)^2\right) + \frac{1}{\gamma}\dot{\vec{X}}\left(\omega + \frac{\partial_\tau \gamma}{\gamma}\right) - \frac{1}{\gamma^2}\Delta_h \vec{X} = 0,} \tag{5}$$

где $h^{ab} = diag\left(1, -\mathcal{H}^{ab}\right)$, $\omega = \dfrac{\partial_\tau \mathcal{H}}{2\mathcal{H}}$, $\nabla_s = \left(\partial_{s_1}, \partial_{s_2}\right)$ $\gamma = \partial_\tau t$, а $\partial_\tau \gamma$ ищется из уравнения:

$$\partial_\tau \gamma + \omega\gamma - \Delta_h t + Ha^2\left(\gamma^2 \dot{\vec{X}}^2 - \left(\nabla_s \vec{X}\right)^2\right) = 0 \tag{6}$$

Данные уравнения представляются крайне сложными для анализа и дискретизации, поэтому в работе рассматривался более простой случай метрики Минковского.