

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

УДК 524.834:519.633, 539.12.01

**ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К БАКАЛАВРСКОЙ ДИПЛОМНОЙ РАБОТЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ КЛАСТЕРОВ ДОМЕННЫХ СТЕНОК В РАННЕЙ
ВСЕЛЕННОЙ**

Студент _____ И. Д. Летягин

Научный руководитель,
к.ф.-м.н. _____ В. В. Никулин

Москва 2026

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ КЛАСТЕРОВ ДОМЕННЫХ СТЕНОК В РАННЕЙ
ВСЕЛЕННОЙ**

Студент _____ И. Д. Летягин

Научный руководитель,
к.ф.-м.н. _____ В. В. Никулин

Рецензент,
к.ф.-м.н. _____ С. Р. Рамазанов

Секретарь ГЭК,
к.ф.-м.н. _____ А. А. Кириллов

Зав. каф. №40,
д.ф.-м.н., проф. _____ М. Д. Скорохватов

СОДЕРЖАНИЕ

Перечень сокращений и обозначений	3
Введение	4
1 Полевое описание доменных стенок	6
1.1 Плоские доменные стенки	6
1.2 Доменные стенки произвольной формы	7
2 Поверхностное описание доменных стенок	10
2.1 Вывод уравнения движения	10
2.2 Полная энергия доменной стенки в тонкостенном приближении	11
3 Численные методы	13
3.1 Дискретизация уравнений	13
3.2 Регуляризация сетки и детекция ПЧД	14
3.3 Анализ численных результатов	19
Заключение	22
A Вывод уравнения движения доменной стенки на фоне FLRW-метрики	23
A.1 Вывод уравнения движения в общем виде	23
A.2 Рассмотрение FLRW-метрики	25
B Программная реализация wall_sim	27
B.1 Структура вычислительного конвейера	27
B.2 Соответствие модулей разделам основного текста	27
B.3 Параметры расчётов и запуск	28
Список использованных источников	29

ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

В настоящей пояснительной записке применяют следующие сокращения и обозначения:

ПЧД	первичная чёрная дыра
ТЭИ	тензор энергии–импульса
FLRW	метрика Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера
NG	действие Намбу–Гото
НТ	действие Хоу–Такера
KDK	kick-drift-kick (интегратор «кик–дрейф–кик»)
QCD	Quantum Chromodynamics (квантовая хромодинамика)
dof	degrees of freedom (число степеней свободы)

ВВЕДЕНИЕ

Идея о существовании первичных чёрных дыр (ПЧД) была высказана около шестидесяти лет назад [1]. С развитием современных методов астрофизических наблюдений повышается интерес к ПЧД для объяснения многих явлений. Согласно современным представлениям, ПЧД могут являться кандидатами в чёрные дыры промежуточных масс [2], вносить вклад в скрытую массу Вселенной и стохастический фон гравитационных волн [3], а также выступать в качестве зародышей для формирования центров ранних галактик, наблюдаемых в современных астрофизических экспериментах [4]. В настоящее время существует множество теорий образования ПЧД: образование из первичных флуктуаций плотности, коллапс топологических дефектов (струны и доменные стенки), спонтанное нарушение симметрии в ходе фазового перехода (например, во время QCD-перехода) [5—9]. В данной работе рассматривается механизм образования ПЧД, рассмотренный в статье [3], через коллапс сферизованных доменных стенок, образованных квантовыми флуктуациями в инфляционном периоде.

Доменная стенка — полевая конфигурация, формируемая полем с потенциалом, имеющим несколько вакуумов (минимумов). В рассматриваемой модели [3] различные вакуумы поля образуются в ходе спонтанного нарушения калибровочной инвариантности, вызываемого квантовыми флуктуациями полей. Доменные стенки давно изучаются в космологии как топологические дефекты, возникающие при фазовых переходах с вырожденными вакуумами [10; 11]. Уже в ранних работах было показано, что сеть стенок может доминировать в плотности энергии Вселенной и вступать в противоречие с наблюдаемой однородностью [12; 13]. Гравитационные свойства стенок в общей теории относительности исследовались для плоских и замкнутых конфигураций [14; 15]; в тонкостенном пределе их динамика описывается моделью тонкой оболочки с условиями сшивки Израэля [16]. Отдельное направление связано с образованием первичных чёрных дыр при коллапсе стенок в постинфляционном периоде [3; 5; 17]. В настоящей работе рассматривается именно этот механизм с акцентом на несферической геометрии кластеров стенок, для которой полевое описание становится вычислительно трудоёмким, и применяется поверхностное приближение в духе [11].

В прошлых исследованиях предполагалось, что стенки эволюционируют в сферическом виде [3], т. е. имеется некоторый короткий период сферизации доменных стенок через обмен энергией с внешним веществом, после окончания которого начинается непосредственная эволюция кластера доменных стенок. Данное предположение позволяло проводить аналитическое исследование динамики и строить спектр масс ПЧД. В ходе численного моделирования генерации кластеров [18] наблюдается сильно несферическое и фрактально-подобное поведение структуры доменных стенок, что существенно влияет на динамику и на спектр ПЧД. В прошлых работах [18], направленных на моделирование несферических стенок, рассчитывалась полевая эволюция кластеров, но из-за высокой вычислительной сложно-

сти по памяти данный подход позволяет рассматривать только малые области пространства, из которых невозможно набрать достаточную статистику при Монте–Карло моделировании образования ПЧД.

В рамках данной работы выводится тонкостенное приближение для поверхности доменной стенки, использование которого позволяет расширить границы симулируемого объёма, поскольку численное полевое описание имеет сложность $O(N^3)$ по памяти, где N — характерный размер моделируемой области, а сложность поверхностного описания — $O(N^2)$.

Цель: уточнить спектр масс ПЧД, образующихся через коллапс доменных стенок в тонкостенном приближении без использования сферического приближения.

Задачи:

- Вывести уравнение, описывающее эволюцию стенки в тонкостенном приближении на фоне внешней метрики
- Разработать способ численного описания движения поверхности доменной стенки
- Провести моделирование кластера доменных стенок и получить спектр масс ПЧД

Глава 1 Полевое описание доменных стенок

1.1 Плоские доменные стенки

Будем рассматривать систему с действием:

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right) \quad (1.1)$$

Рассмотрим простейший вид потенциала, порождающего доменные стенки — ϕ^4 -потенциал:

$$V(\phi) = \lambda(\phi^2 - v^2)^2 \quad (1.2)$$

Данный полиномиальный потенциал выделяется тем, что он имеет два минимума, то есть два классических вакуума $\phi^{\text{vac}} = \pm v$. Конфигурация поля в области максимума между вакуумами описывает доменную стенку [19].

Из принципа наименьшего действия получается уравнение поля — уравнение Клейна–Гордона:

$$\partial^2 \phi + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0 \quad (1.3)$$

Статическим плоским решением уравнений (1.3) для потенциала (1.2), описывающим переход между вакуумами $\pm v$, является профиль кинка:

$$\phi(x) = v \tanh\left(\pm \sqrt{\frac{\lambda}{2}} v (x - x_0)\right) \quad (1.4)$$

Выражение (1.4) справедливо в приближении тонкой стенки, когда толщина доменной стенки пренебрежимо мала.

Тензор энергии–импульса (ТЭИ) для доменной стенки имеет вид:

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - g_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right) \quad (1.5)$$

Для тонкой плоской доменной стенки ТЭИ записывается в явном виде как

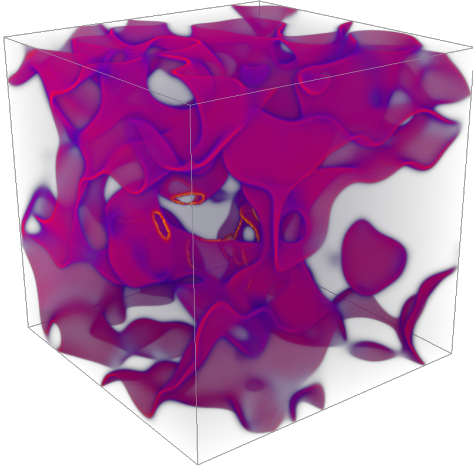
$$T^{ij} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Поверхностная плотность энергии плоской доменной стенки толщиной $\delta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}v}$:

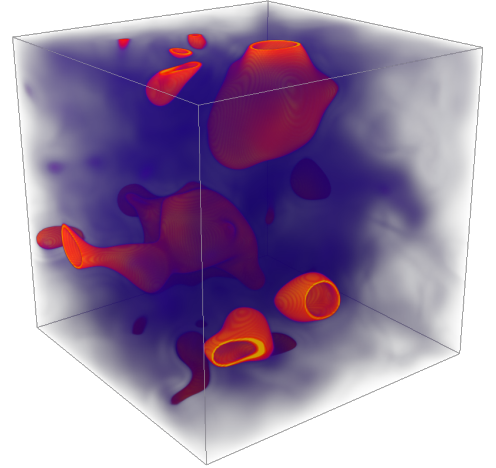
$$\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} 2V(\phi_{\text{wall}}) dx \approx \int_{-\delta}^{+\delta} 2V(\phi_{\text{wall}}) dx = \frac{\sqrt{2\lambda}}{3} v^3 \quad (1.7)$$

1.2 Доменные стенки произвольной формы

Как было сказано выше, в ходе численного моделирования генерации кластеров доменных стенок порождаются полевые конфигурации сложных форм (рис. 1.1), что не позволяет явного аналитического рассмотрения их динамики. С другой стороны, прямая полевая численная симуляция также является затруднительной, поскольку данный подход требует несоразмерно большого количества оперативной памяти для вычислений. Переход от описания всего поля внутри некоторой области пространства к описанию динамики исключительно поверхности доменных стенок позволяет катастрофически оптимизировать численное вычисление по памяти (полевое — $O(N^3)$ → поверхностное — $O(N^2)$).



(а) Пример «солитонной пены»



(б) Пример «доменных пузырей»

Рисунок 1.1 — Результаты компьютерного моделирования доменных стенок в ранней Вселенной из работы [18]

Сделаем переход от полевого описания к эффективному поверхностному описанию, т. е. получим уравнения движения в тонкостенном приближении. Предположим, что после достаточного промежутка времени поле ϕ почти во всём пространстве сошлось к минимумам потенциала $V(\phi)$ и колебания вокруг этих минимумов затухли — пространство перешло в вакуумные состояния v_i , за исключением тех граничных областей, где эти состояния соприкасаются и образуют стенки, описываемые функцией $\phi_{\text{wall}}(x)$ — решение уравнения (1.3). Тогда действие (1.1) можно рассматривать через призму кинкового решения и перейти от теории поля ϕ к эффективной теории, описывающей динамику тонких двумерных мировых поверхностей стенок как новых объектов.

Для этого нужно перейти в новую систему координат, привязанную к сформировавшимся доменным стенкам: $(t, x, y, z) \rightarrow (\tau, s_1, s_2, h)$, где h — высота над ближайшей точкой доменной стенки, s_1, s_2 — внутренние координаты этой точки на стенке (аналоги углов в сферической системе координат), τ — собственное (локальное) время в этой точке стенки (часы движутся вместе с поверхностью стенки). Новые координаты криволинейны (поскольку стенка имеет произвольную форму) и нестационарны (поскольку стенка движется).

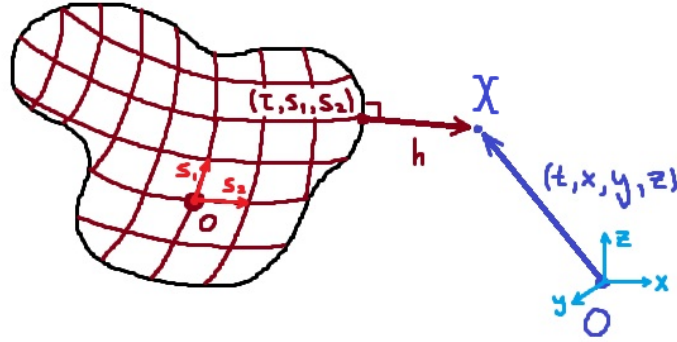


Рисунок 1.2 — Переход к новой системе координат, связанной с доменной стенкой (изображена чёрным). Точка X представлена как в новых координатах (красным, (τ, s_1, s_2, h)), так и в старых координатах (синим, (t, x, y, z)).

Тогда старые координаты можно выразить через новые следующим образом:

$$X^\mu = X_{\text{wall}}^\mu(\tau, s_1, s_2) + e^\mu(\tau, s_1, s_2) h, \quad (1.8)$$

где $X_{\text{wall}}^\mu(\tau, s_1, s_2)$ — координата точки на поверхности доменной стенки от её внутренних координат (τ, s_1, s_2) , а $e^\mu(\tau, s_1, s_2)$ — единичный вектор нормали к поверхности стенки в этой точке.

Индукцированная метрика¹ на поверхности стенки имеет вид:

$$\gamma_{ab} = \partial_a X_{\text{wall}}^\mu \partial_b X_{\text{wall}}^\nu \eta_{\mu\nu}, \quad (1.9)$$

где индексы a и b обозначают внутренние координаты, т. е. пробегают значения τ, s_1, s_2 .

¹ Данная метрика верна, если стенка тонкая ($h \approx \delta$), вращательное движение пренебрежимо мало по сравнению с поступательным, а радиус кривизны существенно больше толщины.

Совершим переход к поверхностному описанию действия:

$$\begin{aligned}
S[\phi] &= \int d^4x \sqrt{-\eta} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right) = \\
&= \int d\tau ds^2 dh \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \left(\gamma_{ab} \partial^a \phi \partial^b \phi - \partial^h \phi \partial^h \phi \right) - V(\phi) \right) = \\
&= \int d\tau ds^2 dh \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \left(\gamma_{ab} \partial^a \phi_{\text{wall}}(h) \partial^b \phi_{\text{wall}}(h) - \partial^h \phi_{\text{wall}}(h) \partial^h \phi_{\text{wall}}(h) \right) - V(\phi_{\text{wall}}) \right) = \\
&= \int d\tau ds^2 dh \sqrt{\gamma} \left(-\frac{1}{2} (\phi'_{\text{wall}}(h))^2 - V(\phi_{\text{wall}}) \right) = - \int d\tau ds^2 \int 2V(\phi_{\text{wall}}) \sqrt{\gamma} dh = \\
&= -\sigma \int d\tau ds^2 \sqrt{\gamma} = -\sigma \int d\tau ds^2 \sqrt{|\partial_a X_{\text{wall}}^\mu \partial_b X_\mu^{\text{wall}}|} = S_{\text{NG}}[X_{\text{wall}}], \tag{1.10}
\end{aligned}$$

где полученное действие является аналогом действия Намбу–Гото для мембраны, вариация которого даёт вид уравнения движения.

Так как полученное действие обладает сложной алгебраической структурой из-за квадратного корня индуцированной метрики, то прямая вариация крайне сложна. В теории струн вводится аналог данного действия — действие Хоу–Такера для релятивистской мембраны [20]:

$$S_{HT}[X(\tau, \vec{s})] = -\frac{\sigma}{2} \int d\tau d^2s (\sqrt{h} h^{ab} \partial_a X_{\text{wall}}^\mu \partial_b X_\mu^{\text{wall}} - \sqrt{h}), \tag{1.11}$$

где h — произвольная метрика на поверхности стенки, причём можно простейшими преобразованиями показать справедливость калибровки вида $h_{ab} = \gamma_{ab}$.

В дальнейшем мы рассматриваем только динамику доменных стенок, поэтому у X_{wall}^μ будем опускать уточняющий индекс wall.

Глава 2 Поверхностное описание доменных стенок

2.1 Вывод уравнения движения

Будем рассматривать действие из прошлой главы:

$$S[X(\tau, \mathbf{s})] = -\frac{\sigma}{2} \int d\tau d^2s (\sqrt{h} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu - \sqrt{h}) \quad (2.1)$$

Варьируя действие (2.1) по координатам и считая h независимым полем, можно получить уравнение движения поверхности тонкой доменной стенки на фоне внешней метрики $g_{\mu\nu}$ [11] (подробный вывод для FLRW-фона приведён в приложении А):

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{h}} \partial_a (\sqrt{h} h^{ab} \partial_b X^\sigma) + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu = 0}, \quad (2.2)$$

где $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu})$ — символ Кристоффеля второго рода.

Случай фоновой $FLRW$ -метрики расширяющейся Вселенной при слабо меняющейся постоянной Хаббла H приводит к сложным нелинейным уравнениям:

$$\boxed{\ddot{\vec{X}} + 2H\dot{\vec{X}} \left(1 - \frac{a^2}{\gamma^2} (\nabla_s \vec{X})^2\right) + \frac{1}{\gamma} \dot{\vec{X}} \left(\omega + \frac{\partial_\tau \gamma}{\gamma}\right) - \frac{1}{\gamma^2} \Delta_s \vec{X} = 0}, \quad (2.3)$$

где $h^{ab} = \text{diag}(1, -\mathcal{H}^{\tilde{a}\tilde{b}})$, $\omega = \frac{\partial_\tau \mathcal{H}}{2\mathcal{H}}$, $\nabla_s = (\partial_{s_1}, \partial_{s_2})$, $\gamma = \partial_\tau t$, а $\partial_\tau \gamma$ ищется из уравнения:

$$\partial_\tau \gamma + \omega \gamma - \Delta_s t + H a^2 \left(\gamma^2 \dot{\vec{X}}^2 - (\nabla_s \vec{X})^2 \right) = 0 \quad (2.4)$$

Полученные уравнения диссипативны по энергии (из-за потока Хаббла) и сложны по анализу, поэтому в первом приближении для построения последовательной космологической картины будем рассматривать более простое уравнение (на фоне метрики Минковского), при условии слабой эволюции кривизны поверхности доменной стенки ($\omega = 0$).

Учёт всех приближений, оговорённых выше, сводит уравнение (2.3) к уравнению движения релятивистской мембраны:

$$\ddot{\vec{X}} - \frac{1}{\gamma^2} \Delta_s \vec{X} = 0, \quad (2.5)$$

где $\Delta_s \vec{X} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}}} \nabla_s (\sqrt{\mathcal{H}} \mathcal{H}^{ab} \nabla_s \vec{X})$ — оператор Лапласа–Бельтрами на поверхности.

2.2 Полная энергия доменной стенки в тонкостенном приближении

Вид зависимости полной энергии системы от параметров задачи является ключевым для выбора правильного метода численного решения задачи. Нам необходимо выбрать интегратор, который максимально сохраняет полную энергию (симплектический) и вычислительно прост (явный). Найдём вид гамильтониана системы.

Для вывода энергии воспользуемся действием Намбу–Гото, полученным ранее:

$$S_{NG} = -\sigma \int d\tau ds^2 \sqrt{\gamma},$$

где $\gamma = \det(\gamma_{ab})$, $\gamma_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu$

Найдём явный вид метрики γ_{ab} , воспользовавшись калибровкой $\tau = t$.

$$\begin{aligned}\gamma_{00} &= \dot{X}^\mu \dot{X}_\mu = 1 - v^2 \\ \gamma_{i0} &= \partial_i X^\mu \dot{X}_\mu = -\vec{v} \cdot \partial_i \vec{X} \\ \gamma_{ii} &= -\partial_i \vec{X} \cdot \partial_j \vec{X} \\ \gamma &= \det(\gamma_{ab}) = (1 - v_\perp^2) \det(\gamma_{ij})\end{aligned}$$

Заметим, что $\det(\gamma_{ij}) ds^2 = dA$, где dA — элемент площади поверхности доменной стенки.

Подставив явный вид $\sqrt{\gamma}$ в действие, получим:

$$S = -\sigma \int d\tau dA \sqrt{1 - v_\perp^2} \implies L = -\sigma \int dA \sqrt{1 - v_\perp^2}$$

Перейдём от лагранжиана к гамильтониану:

$$\begin{aligned}P_\perp \equiv \pi &= \frac{\partial L}{\partial v_\perp} = \sigma \frac{v_\perp}{\sqrt{1 - v_\perp^2}} = \sigma \gamma v_\perp, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_\perp^2}} \\ H &= \int dA \pi v_\perp - L = \sigma \int dA \frac{1}{\sqrt{1 - v_\perp^2}} \\ E &= \sigma \int dA \frac{1}{\sqrt{1 - v_\perp^2}} = \sigma \int \gamma dA\end{aligned}$$

Выразим всё через нормальный импульс π :

$$\begin{aligned}v_\perp &= \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + \sigma^2}}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{\pi^2 + \sigma^2}}{\sigma} \\ \mathcal{H} &= \pi v_\perp - \mathcal{L} = \sqrt{\pi^2 + \sigma^2}\end{aligned}$$

Явный вид энергии поверхности доменной стенки:

$$H = \int dA \sqrt{\pi^2 + \sigma^2} \quad (2.6)$$

Заметим, что полученное выражение напоминает полную энергию релятивистской частицы $E = \sqrt{m^2 + p^2}$. Для задач с таким гамильтонианом имеется отдельный сложный класс интеграторов, один из которых будет рассмотрен далее.

Уравнения Гамильтона:

$$v_{\perp} = \frac{dH}{d\pi}, \quad \dot{\pi} = -\vec{n} \frac{dH}{d\vec{r}} \quad (2.7)$$

Глава 3 Численные методы

Программная реализация описана в приложении Б; исходный код опубликован в репозитории https://github.com/grootberg/wall_sim-v1.0.

Ниже будет ищаться численное решение волнового уравнения (2.5) на треугольной сетке. Треугольная сетка строится с помощью алгоритма триангуляции marching cubes (марширующих кубов) [21] на основе изоповерхностей исходной полевой конфигурации, стенированной флуктуациями скалярного поля на инфляционной стадии [18].

3.1 Дискретизация уравнений

Явная дискретизация волнового уравнения (2.5) будет иметь вид:

$$\vec{r}(t+h) = 2\vec{r}(t) - \vec{r}(t-h) + h^2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{L} \vec{r}(t), \quad (3.1)$$

где h — шаг по времени, $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{L} = \Delta_s$ — дискретизация оператора Лапласа–Бельтрами в виде произведения матриц, \mathbf{M} — матрица масс (площадей) треугольников, \mathbf{L} — невзвешенный оператор Лапласа–Бельтрами, задающийся формулой $\mathbf{L}\vec{r}(v_i) = \frac{1}{2} \sum_{v_j \in N_1(v_i)} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij})(\vec{r}(v_j) - \vec{r}(v_i))$, подробнее данное представление разобрано в [22; 23].

Данная явная схема дискретизации второго порядка обладает большим недостатком — она не сохраняет симплектическую структуру гамильтониана задачи, т.е. полученное решение минимизирует ошибку траектории движения точек, но ценой ухудшения факта сохранения полной энергии системы. Так как поставленная задача требует наиболее точного сохранения энергии, то воспользуемся симплектической схемой, которая получается переходом от лагранжевого формализма к гамильтонову.

Найдём правильный дискретный вид уравнений. Для этого дискретизируем гамильтониан (2.6) на треугольную сетку:

$$H = \int dA \sqrt{\pi^2 + \sigma^2} \approx \sum_{i=1}^N \sqrt{\sigma^2 A_i^2 + \pi_i^2}, \quad (3.2)$$

где здесь и далее суммирование идёт по всем вершинам треугольников, полученных после алгоритма триангуляции, A_i — площадь клетки Вороного, описанной вокруг вершины.

Уравнения Гамильтона:

$$v_{\perp i} = \frac{dH}{d\pi_i} = \frac{\pi_i}{\sqrt{\sigma^2 A_i^2 + \pi_i^2}} \quad (3.3)$$

$$\dot{\pi}_i = -\vec{n}_i \frac{dH}{d\vec{r}_i} \approx \frac{\sigma}{\gamma_i} (L\vec{r}_i) \vec{n}_i, \quad (3.4)$$

где $\gamma_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\pi_i}{\sigma A_i}\right)^2}$ — лоренцевский фактор.

Мы перешли от одного уравнения второго порядка к двум уравнениям первого порядка. Рассмотрим простейший симплектический метод решения — KDK-интегратор (kick-drift-kick), применимость которого подробно рассматривается в [24].

Algorithm 1 Один шаг KDK для релятивистской мембраны

- 1: **Дано:** (\vec{r}_i^n, π_i^n) , шаг h , натяжение σ
 - 2: $L\vec{r}, A, \vec{n} \leftarrow \text{compute_geometry}(\vec{r}^n)$ ▷ геометрия в начале шага
 - 3: $\gamma_i \leftarrow \sqrt{1 + (\pi_i^n / (\sigma A_i))^2}$
 - 4: $F_i \leftarrow (\sigma / \gamma_i) (L\vec{r})_i \vec{n}_i$
 - 5: $\pi_i^{n+1/2} \leftarrow \pi_i^n + \frac{h}{2} F_i$ ▷ первый полу-кик
 - 6: $v_{\perp i} \leftarrow \pi_i^{n+1/2} / \sqrt{(\sigma A_i)^2 + (\pi_i^{n+1/2})^2}$ ▷ точная связь
 - 7: $\vec{r}_i^{n+1} \leftarrow \vec{r}_i^n + h v_{\perp i} \vec{n}_i$ ▷ дрейф вдоль нормали в начале шага
 - 8: $L\vec{r}', A', \vec{n}' \leftarrow \text{compute_geometry}(\vec{r}^{n+1})$ ▷ геометрия в конце шага
 - 9: $\gamma'_i \leftarrow \sqrt{1 + (\pi_i^{n+1/2} / (\sigma A'_i))^2}$
 - 10: $F'_i \leftarrow (\sigma / \gamma'_i) (L\vec{r}')_i \vec{n}'_i$
 - 11: $\pi_i^{n+1} \leftarrow \pi_i^{n+1/2} + \frac{h}{2} F'_i$ ▷ второй полу-кик
 - 12: $E_i = \sqrt{\sigma^2 A_i'^2 + (\pi_i^{n+1})^2}$ ▷ энергия
-

3.2 Регуляризация сетки и детекция ПЧД

Для устойчивости решения от сетки требуется высокая регулярность, т. е. треугольники, соединяющие вершины, должны быть как можно ближе к равносторонним. Обеспечение поставленного условия производится посредством трёх методов перестроения сетки — тангенциальное сглаживание, схлопывание рёбер и переворот рёбер [23].

- Тангенциальное сглаживание — это сдвиг вершин вдоль поверхности (в касательной плоскости), чтобы выровнять сетку почти без изменения её формы.
- Схлопывание рёбер — это удаление ребра, которое короче некоторого заданного предела.
- Переворот рёбер — это замена общей диагонали в паре соседних треугольников на

другую с целью улучшения формы сетки без смещения вершин.

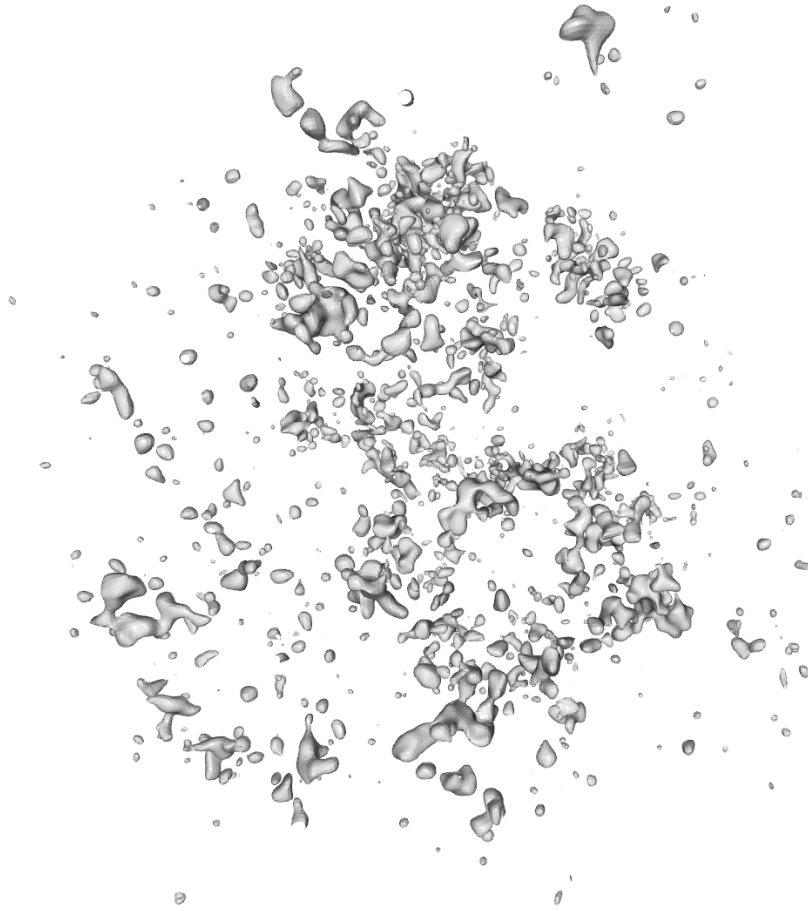


Рисунок 3.1 — Пример начального состояния кластера доменных стенок после триангуляции полевой конфигурации размера 4 е-фолда, сгенерированной флуктуациями скалярного поля на инфляционной стадии (методы генерации описаны в статье [18]).

Описанные выше алгоритмы перестроения сетки всё же имеют некоторый недостаток, связанный с тем, что любое изменение формы сетки влияет на энергию системы, так как энергия пропорциональна полной площади поверхности, а все методы так или иначе изменяют площадь локально. Также при сжатии стенки до размеров разрешения сетки схлопывание рёбер полностью удаляет её из расчётной области. Последний факт позволяет реализовать алгоритм детекции образования ПЧД.

В системе нет явных каналов диссипации энергии (нет излучения скалярных квантов и гравитационных волн, не учитывается хаббловский поток и взаимодействие с внешним веществом), а E^α — точный интеграл движения. Поэтому, если между двумя проверками фрагмент стенки α полностью пропал из сетки (перестроение сетки сжало его до точки, а схлопывание рёбер удалило из расчётной области), его энергия не могла никуда исчезнуть и должна была сосредоточиться под гравитационным радиусом. В спектр вносится $M^\alpha = E^\alpha$, измеренная на последнем временном шаге, на котором фрагмент стенки ещё наблюдался. Таким образом, фиксируя состояния на последовательных временных шагах и сравнивая текущий и предыдущий шаги, можно определять, какие стенки коллапсировали в ПЧД.

Для проверки схемы была проведена калибровка на известном примере — сфериче-

ской доменной стенки, масса образующейся ПЧД равна $M = 4\pi\sigma R^2$. При регуляризации на каждом шаге масса ПЧД, получающаяся в ходе моделирования, отличается от истинной примерно на 0,5%.

Для кластера, представленного на рисунке 3.1, в ходе симуляции получаются значения, представленные ниже. Параметры генерации кластера: вид спектра $P(k) \propto k^{-3}$, размер кластера 4 е-фолда, начальное значение поля $\phi_{in} = 2.4$. Параметры симуляции: временной шаг $h = 1.0 \cdot 10^{-5}$, схлопывание и переворот рёбер на каждом шаге, сглаживание каждые десять шагов.

Энергетика и кинематика доменной стенки

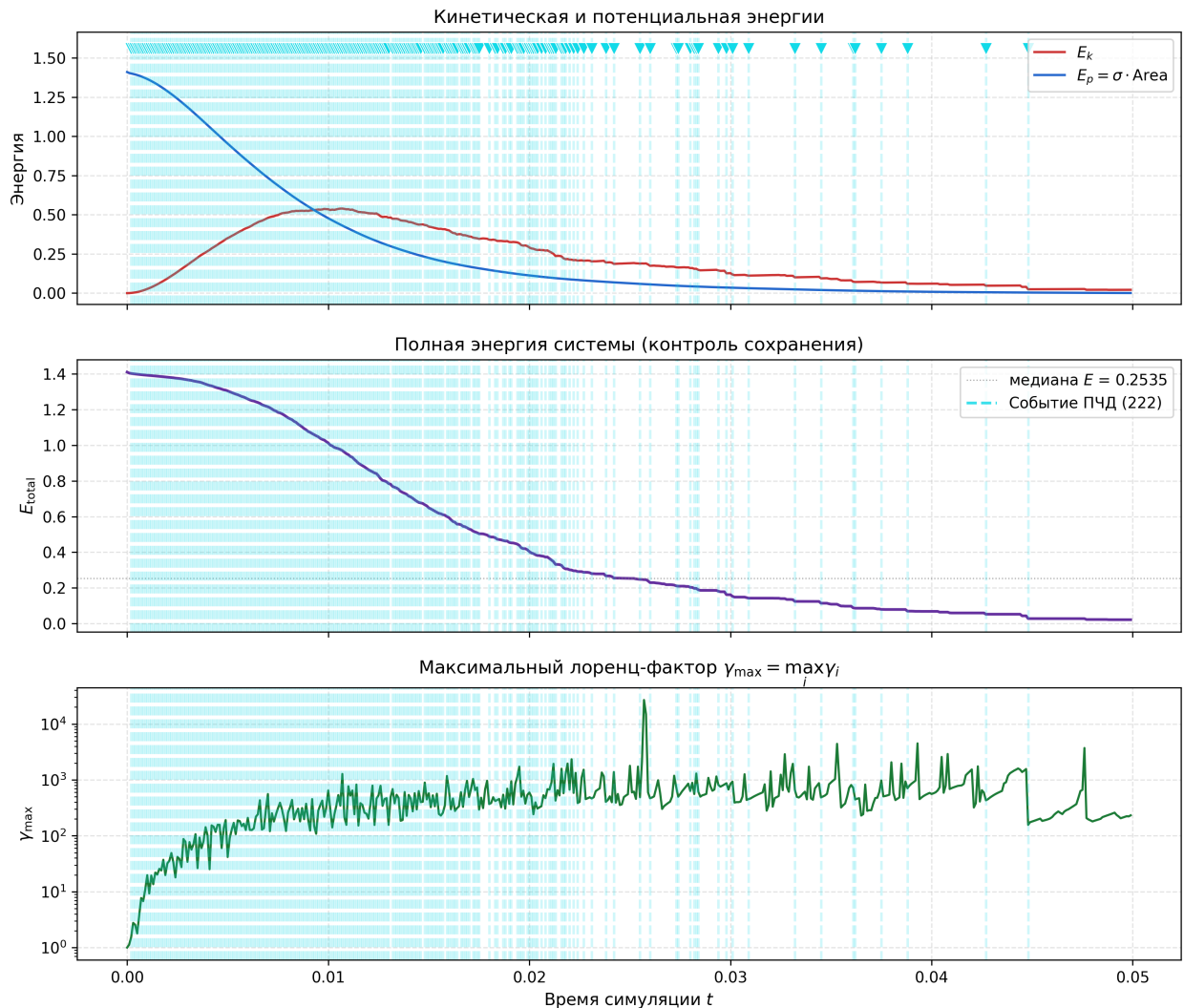


Рисунок 3.2 — Графики энергии и максимального лоренцевского фактора для кластера размером 4 е-фолда, представленного на рисунке 3.1.

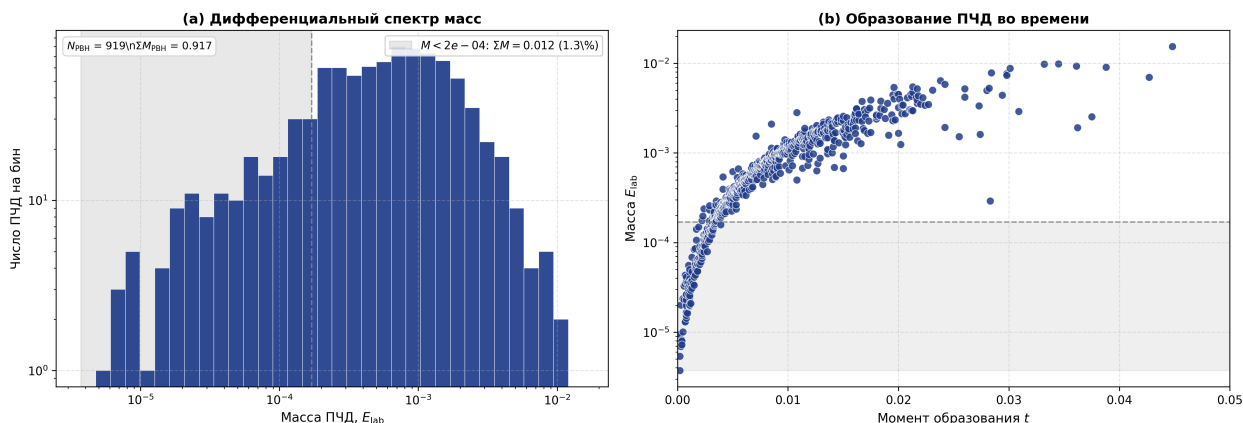


Рисунок 3.3 — Спектр ПЧД, образованных коллапсом кластера доменных стенок размером 4 е-фолда, представленного на рисунке 3.1.

На рисунке 3.2 видно, что происходит преобразование потенциальной энергии в кинетическую с периодическими падениями, вызванными перестроением сетки. Из графика лоренцевского фактора можно сделать вывод об ультрарелятивистском характере движения стенок ($\gamma \geq 10^2$).

На рисунке 3.3 можно примерно оценить характер зависимости числа ПЧД от массы² доменных стенок: $dN/dM \propto M^{-2}$. Стоит обратить внимание на значения, лежащие левее масс порядка 10^{-3} , которые делятся на две подгруппы:

- ПЧД с массами $\leq 2 \cdot 10^{-4}$ являются численным шумом, так как исходная генерация не может создать доменную стенку массой $\leq 2 \cdot 10^{-4}$.
- ПЧД с массами от $2 \cdot 10^{-4}$ до 10^{-3} отличаются от характера зависимости в области больших масс из-за ультрафиолетовых эффектов³ и из-за методов регуляризации сетки.

Другой пример генерации кластера: вид спектра $P(k) \propto k^{-3}$, размер кластера 5 е-фолдов, начальное значение поля $\phi_{in} = 2.3$. Параметры симуляции: временной шаг $h = 0.25 \cdot 10^{-5}$, схлопывание и переворот рёбер на каждом шаге, сглаживание каждые десять шагов.

² Все значения приведены к масштабу постоянной Хаббла H .

³ Под ультрафиолетовыми эффектами здесь понимаются искажения, связанные с конечным числом е-фолдов при генерации начальной конфигурации: наименьший физически осмысленный масштаб структур в кластере ограничен параметрами инфляционной стадии. С увеличением числа е-фолдов этот масштаб смещается к меньшим массам, и вклад таких искажений в спектре уменьшается.



Рисунок 3.4 — Пример начального состояния кластера доменных стенок после триангуляции полевой конфигурации размера 5 e-фолда, сгенерированной флуктуациями скалярного поля на инфляционной стадии (методы генерации описаны в статье [18]).

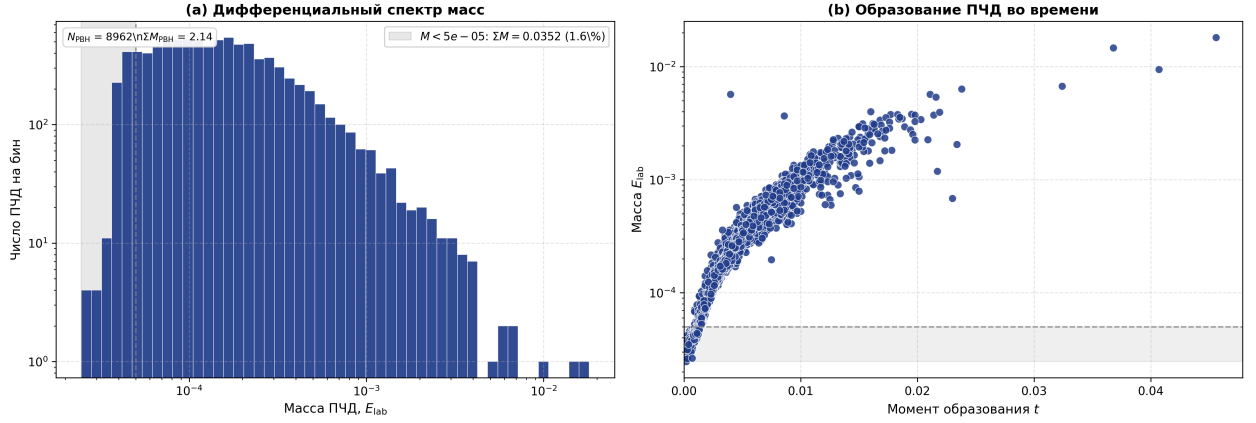


Рисунок 3.5 — Спектр ПЧД, образованных коллапсом кластера доменных стенок размером 5 е-фолдов, представленного на рисунке 3.4.

На рисунке 3.5 зависимость имеет примерный характер $dN/dM \propto M^{-2.25}$, что заметно круче, чем у сферической модели.

3.3 Анализ численных результатов

Теоретический интегральный спектр масс ПЧД [3], образованных коллапсом сферических стенок, имеет вид:

$$N(M) = \frac{1}{2} \exp\left\{\frac{3}{2} \left[2N_{\text{inf}} - \ln\left(HN_{\text{inf}}\sqrt{\frac{M}{\pi\mu}}\right)\right]\right\} \operatorname{erfc}\left(\frac{2\pi(\phi_{\text{cr}} - \phi_u)}{H\sqrt{2N_{\text{inf}} - \ln\left(HN_{\text{inf}}\sqrt{\frac{M}{\pi\mu}}\right)}}\right) \quad (3.5)$$

Дифференциальный спектр в области высоких масс для сферических стенок имеет характер наклона $dN/dM \propto M^{-1.75}$ (следует из (3.5)).

Для количественного сравнения с численными результатами проведена статистическая обработка ансамбля методом Монте–Карло из пятнадцати независимых прогонов симуляции (различные случайные начальные конфигурации кластера при фиксированных параметрах $P(k) \propto k^{-3}$, размер 5 е-фолдов, $\phi_{\text{in}} = 2.3$, временной шаг $h = 1.0 \cdot 10^{-5}$). События коллапса объединяются в логарифмические интервалы по массе; для каждого бина вычисляется среднее число ПЧД и статистическая погрешность по прогонам. Подгонка степенного закона $dN/dM \propto M^{-\alpha}$ выполняется в дважды логарифмических координатах методом взвешенных наименьших квадратов с весами, обратными статистической погрешности; неопределённость наклона оценивается дополнительно методом бутстрепа с повторной выборкой прогонов (2000 итераций).

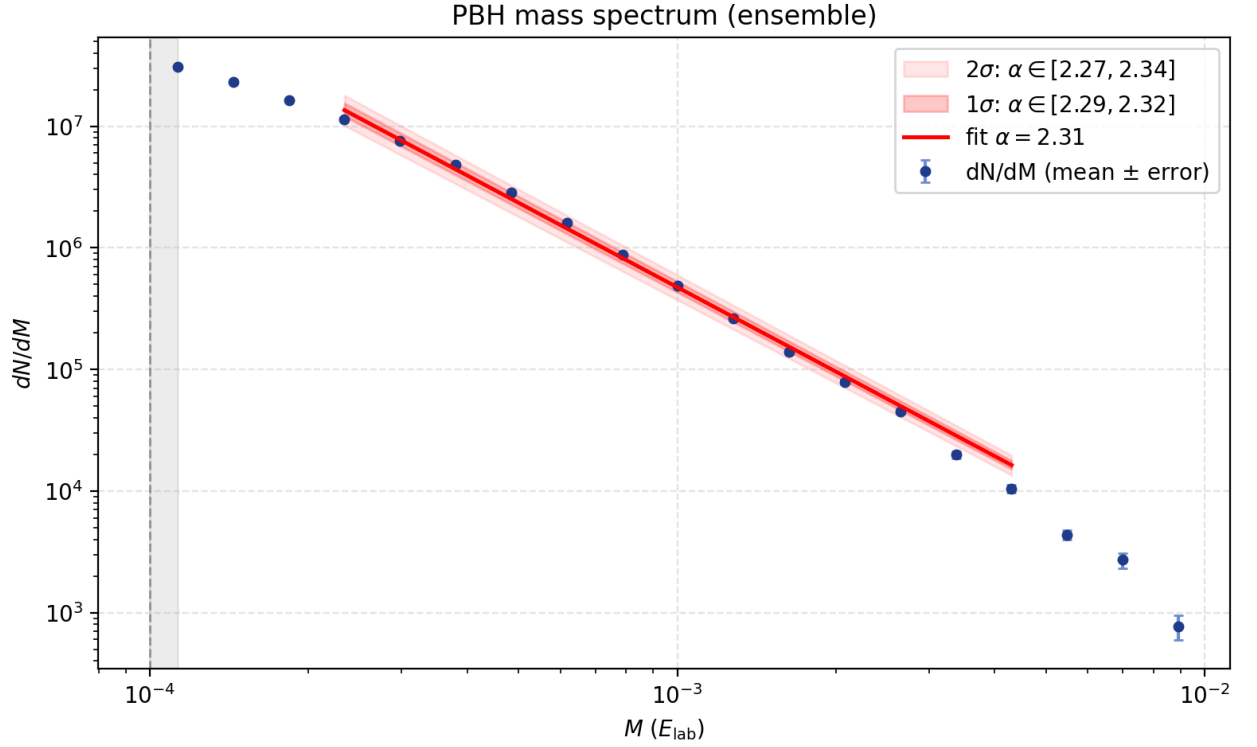


Рисунок 3.6 — Усреднённый дифференциальный спектр масс ПЧД по ансамблю из 15 прогонов (5 е-фолдов). Точки — dN/dM (среднее \pm ошибка по прогонам); красная линия — подгонка $dN/dM \propto M^{-\alpha}$, $\alpha = 2,31$; закрашенные области — доверительные интервалы наклона по бутстрепу (1σ и 2σ).

На рисунке 3.6 приведён усреднённый дифференциальный спектр. Область масс $M \leq 2 \cdot 10^{-4}$ (заштрихована на графике) исключена из подгонки как область доминирующего численного шума и ультрафиолетовых эффектов. В рабочем диапазоне $2 \cdot 10^{-4} \leq M \leq 5 \cdot 10^{-3}$ спектр хорошо описывается степенной зависимостью с показателем

$$\alpha = 2,31^{+0,01}_{-0,02} \quad (1\sigma), \quad \alpha \in [2,27; 2,34] \quad (2\sigma), \quad (3.6)$$

что примерно согласуется с визуальной оценкой по отдельным прогонам: $dN/dM \propto M^{-2}$ для 4 е-фолдов (рис. 3.3) и $dN/dM \propto M^{-2.25}$ для 5 е-фолдов (рис. 3.5).

Полученный показатель $\alpha \approx 2,31$ заметно превышает теоретическое значение $\alpha \approx 1,75$ для коллапса сферических стенок. Это означает более крутое убывание dN/dM с ростом массы и, эквивалентно, большую относительную долю ПЧД малых масс в несферической модели: при той же суммарной энергии кластера коллапсирует большее число менее массивных фрагментов. Физически такой сдвиг связан с возможностью дробления доменных стенок сложной геометрии на меньшие части, отсутствующей в сферическом приближении.

В области $M \geq 10^{-2}$ статистика резко сокращается (на графике увеличиваются погрешности), поэтому наклон в хвосте спектра определяется с меньшей достоверностью. Отклонения от идеального степенного закона вблизи нижней границы подгонки могут быть связаны с конечным разрешением сетки и ультрафиолетовыми эффектами генерации кластера; их вклад уменьшается с ростом числа е-фолдов. Отклонения и резкий рост погрешности

в области верхней границы подгонки могут быть вызваны недостаточным временем симуляции, что выражается в неполной эволюции очень массивных стенок, а также в эффектах малой статистики.

Подгонка степенным законом носит приближённый характер: приведённое значение χ^2/dof ($\approx 3,46$ для Пуассоновской статистики по бинам) превышает единицу, что указывает на отклонение от прямого степенного закона ⁴.

Таким образом, в уточнённой модели имеется преобладание ПЧД меньших масс по сравнению с грубой сферической оценкой (3.5), что, предположительно, вытекает из несферической геометрии кластера и возможности дробления доменных стенок на менее массивные фрагменты.

⁴ Теоретическая формула (3.5) сама по себе имеет слабое отклонение от явного степенного вида.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе бакалаврской работы рассматривалась простейшая модель доменных стенок без учёта гравитационного взаимодействия, конечной толщины стенки, излучения скалярных частиц и перезамыкания стенок; в качестве фона использовалось пространство Минковского. Эволюция кластеров рассматривалась с целью получения спектра ПЧД, образующихся при коллапсе доменных стенок.

Основные результаты работы:

- Выведено общее уравнение движения доменной стенки на фоне внешнего пространства в тонкостенном приближении
- Разработано программное обеспечение `wall_sim` для численной симуляции эволюции кластеров (приложение Б), позволяющее определять множество параметров доменных стенок и ПЧД
- Получен спектр масс ПЧД, смоделированный методом Монте–Карло с достаточной статистикой

Новизна работы заключается в отсутствии предположения об начальной сферичности доменных стенок. В результате смоделированный спектр масс характеризуется преобладанием ПЧД малых масс по сравнению с предыдущими теоретическими предсказаниями [3], основанными на сферическом приближении. Теоретический спектр из предыдущих работ dN/dM имеет наклон $\approx -1,75$, а численный (ансамбль из 15 прогонов) — $\approx -2,31_{-0,02}^{+0,01}$ (1σ). Полученный эффект, предположительно, возникает из-за фрагментации стенок сложной формы. Полученный вид спектра будет сравниваться с будущими наблюдениями в области гравитационно-волновой астрономии.

Данная работа будет продолжена для уточнения отдельных аспектов модели:

- Учёт диссипации энергии за счёт излучения гравитационных волн, скалярных частиц, потока Хаббла и взаимодействия с плазмой
- Оптимизация кода для моделирования больших объёмов пространства и перенос на вычислительный кластер
- Сравнение с будущими экспериментальными данными, способными дать наблюдательный спектр ПЧД (LIGO/Virgo/KAGRA, LISA, NANOGrav)

Приложение А Вывод уравнения движения доменной стенки на фоне FLRW-метрики

В разд. 2.1 основного текста приведены уравнения (2.2), (2.3) и (2.4) без подробного вывода. Ниже воспроизводится полная цепочка преобразований: от вариации действия (2.1) на произвольном фоне до уравнений в плоской FLRW-метрике с постоянным параметром Хаббла H .

А.1 Вывод уравнения движения в общем виде

Рассматривается доменная стенка, заданная вложением $X^\mu(\tau, \vec{s})$, где τ — внутреннее (локальное) время на поверхности, $\vec{s} = (s_1, s_2)$ — внутренние координаты. Внешняя метрика $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$ в общем случае зависит от координат окружающего пространства-времени. Вспомогательная метрика мирового листа h_{ab} вводится независимо; вариацию выполняем по X^μ при фиксированном h_{ab} (вспомогательное поле Хоу–Такера).

Обобщая действие (2.1) на произвольную внешнюю метрику, запишем

$$S_P[X(\tau, \mathbf{s})] = -\frac{\sigma}{2} \int d\tau d^2s \left(\sqrt{h} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu} - \sqrt{h} \right), \quad (\text{A.1})$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения, $a, b \in (\tau, s_1, s_2)$. Далее используется разложение $h^{ab} = \text{diag}(1, -\mathcal{H}^{ab})$, $\sqrt{h} = \sqrt{\mathcal{H}}$, где \mathcal{H}^{ab} — пространственная часть метрики на поверхности. Оператор Лапласа–Бельтрами только по \vec{s} задаётся как

$$\Delta_s X^\mu = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}}} \partial_{\vec{s}} \left(\sqrt{\mathcal{H}} \mathcal{H}^{ab} \partial_{\vec{s}} X^\mu \right). \quad (\text{A.2})$$

Производные по τ обозначаются точкой: $\dot{X}^\mu = \partial_\tau X^\mu$; по \vec{s} — $\nabla_s X^\mu = \partial_{\vec{s}} X^\mu$, $\nabla_s = (\partial_{s_1}, \partial_{s_2})$. Координаты вложения: $X^0 = t$ (глобальное время), $X^i = \vec{X}$ (положение точки стенки).

Вариация действия. В слагаемом $-\sqrt{h}$ действия (A.1) нет зависимости от X^μ , поэтому

$$\delta_X S_P = -\frac{\sigma}{2} \int d\tau d^2s \sqrt{h} h^{ab} \delta(\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}). \quad (\text{A.3})$$

Так как $g_{\mu\nu}$ зависит от x через $X(\tau, \vec{s})$, имеем $\delta g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} \delta X^\lambda$. Вариация подынтегрального выражения:

$$\delta(\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}) = \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \partial_\lambda g_{\mu\nu} \delta X^\lambda + 2g_{\mu\nu} \partial_a \delta X^\mu \partial_b X^\nu. \quad (\text{A.4})$$

Интегрируя второе слагаемое по частям по τ , s_1 , s_2 (граничные члены обращаются в нуль) и используя произвольность δX^λ , получаем

$$\sqrt{h} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \partial_\lambda g_{\mu\nu} - 2\partial_a \left(\sqrt{h} h^{ab} g_{\lambda\nu} \partial_b X^\nu \right) = 0. \quad (\text{A.5})$$

Раскрывая производную во втором члене по правилу Лейбница и группируя слагаемые с $\partial_a g_{\lambda\nu}$, приходим к виду

$$\sqrt{h} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu (\partial_\lambda g_{\mu\nu} - 2\partial_\mu g_{\lambda\nu}) - 2g_{\lambda\nu} \partial_a \left(\sqrt{h} h^{ab} \partial_b X^\nu \right) = 0. \quad (\text{A.6})$$

Множитель в скобках при свёртке с симметричным тензором $h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu$ (симметричен по $\mu \leftrightarrow \nu$) равен $-2\Gamma_{\lambda,\mu\nu}$, где

$$\Gamma_{\lambda,\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \quad (\text{A.7})$$

— символ Кристоффеля первого рода. Умножая (A.6) на $g^{\lambda\sigma}$ и деля на $2\sqrt{h}$, получаем уравнение движения в согласовании с [11]:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{h}} \partial_a \left(\sqrt{h} h^{ab} \partial_b X^\sigma \right) + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu = 0}, \quad (\text{A.8})$$

где $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu})$ — символ Кристоффеля второго рода. Уравнение (A.8) совпадает с (2.2) основного текста.

Разложение по τ и \vec{s} . Подставляя $h^{ab} = \text{diag}(1, -\mathcal{H}^{ab})$ в (A.8) и используя (A.2), первый член разлагается на производные по τ и пространственную часть:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{h}} \partial_a \left(\sqrt{h} h^{ab} \partial_b X^\lambda \right) &= \ddot{X}^\lambda + \omega \dot{X}^\lambda - \Delta_s X^\lambda, \\ \omega &= \frac{\partial_\tau \mathcal{H}}{2\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Второй член в (A.8) при $h^{\tau\tau} = 1$, $h^{\tau i} = 0$, $h^{ij} = -\mathcal{H}^{ij}$ принимает вид

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda (\dot{X}^\mu \dot{X}^\nu - \nabla_s X^\mu \nabla_s X^\nu). \quad (\text{A.10})$$

В совокупности для каждой компоненты λ :

$$\ddot{X}^\lambda + \omega \dot{X}^\lambda - \Delta_s X^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda (\dot{X}^\mu \dot{X}^\nu - \nabla_s X^\mu \nabla_s X^\nu) = 0. \quad (\text{A.11})$$

A.2 Рассмотрение FLRW-метрики

Рассматривается плоская FLRW-метрика на инфляционной стадии с постоянным H :

$$g_{00} = 1, \quad g_{ij} = -a^2(t) \delta_{ij}, \quad (\text{A.12})$$

$$\Gamma_{ij}^0 = Ha^2 \delta_{ij}, \quad \Gamma_{0j}^i = \Gamma_{j0}^i = H\delta_j^i, \quad (\text{A.13})$$

остальные $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ равны нулю.

Уравнения для t и \vec{X} . При $\lambda = 0$ (т. е. $X^0 = t$) из (A.11) следует

$$\partial_\tau \gamma + \omega \gamma - \Delta_s t + Ha^2 \left((\dot{\vec{X}})^2 - (\nabla_s \vec{X})^2 \right) = 0, \quad (\text{A.14})$$

где введён лоренцевский фактор $\gamma = \partial_\tau t$. При $\lambda = i$ получаем

$$\ddot{\vec{X}} + \omega \dot{\vec{X}} - \Delta_s \vec{X} + 2H \left(\gamma \dot{\vec{X}} - \nabla_s t \nabla_s \vec{X} \right) = 0, \quad (\text{A.15})$$

где $\dot{\vec{X}} = \partial_\tau \vec{X}$ — производная по локальному времени τ .

Условие ортогональности. Касательные векторы $e_\tau^\mu = (\partial_\tau t, \partial_\tau \vec{X})$ и $e_s^\mu = (\partial_s t, \partial_s \vec{X})$ ортогональны нормали к стенке, откуда $g_{\mu\nu} e_\tau^\mu e_s^\nu = 0$. Для метрики (A.12):

$$\partial_\tau t \partial_s t - a^2(t) \partial_\tau \vec{X} \cdot \partial_s \vec{X} = 0. \quad (\text{A.16})$$

Выражая $\nabla_s t$ и используя $\gamma = \partial_\tau t$:

$$\nabla_s t = \frac{a^2(t) \dot{\vec{X}} \cdot \nabla_s \vec{X}}{\gamma}. \quad (\text{A.17})$$

Подстановка (A.17) в (A.15) даёт уравнение для \vec{X} без явной зависимости от $\nabla_s t$:

$$\ddot{\vec{X}} - \Delta_s \vec{X} + 2H \dot{\vec{X}} \left(\gamma - \frac{a^2}{\gamma} (\nabla_s \vec{X})^2 \right) + \omega \dot{\vec{X}} = 0, \quad (\text{A.18})$$

при этом уравнение (A.14) не меняется.

Переход к глобальному времени. Связь производных по τ и t :

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau} = \gamma \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}, \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \tau^2} = \dot{\gamma} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} + \gamma^2 \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2}. \quad (\text{A.20})$$

После переобозначения $\dot{\vec{X}} = \partial \vec{X} / \partial t$ (производная по глобальному времени) уравнение (A.18) совпадает с (2.3):

$$\ddot{\vec{X}} + 2H\dot{\vec{X}} \left(1 - \frac{a^2}{\gamma^2} (\nabla_s \vec{X})^2 \right) + \frac{1}{\gamma} \dot{\vec{X}} \left(\omega + \frac{\partial_\tau \gamma}{\gamma} \right) - \frac{1}{\gamma^2} \Delta_s \vec{X} = 0.$$

В согласованной записи для $\partial_\tau \gamma$ получается уравнение (2.4):

$$\partial_\tau \gamma + \omega \gamma - \Delta_s t + H a^2 \left(\gamma^2 \dot{\vec{X}}^2 - (\nabla_s \vec{X})^2 \right) = 0,$$

где в последнем слагаемом $\dot{\vec{X}} = \partial_\tau \vec{X}$.

Уравнения (2.3) и (2.4) нелинейны и, в отличие от модели на фоне метрики Минковского, в общем случае диссипативны по энергии стенки (из-за членов с H). Поэтому в численных расчётах основного текста использовано упрощение (2.5) при $\omega = 0$ и плоском фоне.

Приложение В Программная реализация `wall_sim`

В гл. 3 изложены дискретизация уравнения (2.5), КДК-интегратор (алгоритм 1) и алгоритмы перестроения сетки с детекцией ПЧД. Ниже кратко описана реализация этих методов в пакете `wall_sim` (Python, PyTorch, вычисления на GPU). Полный исходный код, примеры входных данных и инструкция по запуску доступны в репозитории https://github.com/grootberg/wall_sim-v1.0.

В.1 Структура вычислительного конвейера

Расчёт начинается с полевой конфигурации скалярного поля $\phi(\vec{r})$, сохранённой в формате HDF5. По изоповерхностям $\phi = \phi_{\text{cr}}$ строится треугольная сетка поверхности доменной стенки (marching cubes, гл. 3), которая загружается в `wall_sim` как набор регионов в файле `mesh_regions.h5`. Далее для каждого региона выполняется временная эволюция: на каждом шаге — КДК-интегратор, периодически — перестроение сетки; параллельно отслеживаются связные компоненты стенки и фиксируются события коллапса в ПЧД. На выходе формируются графики энергии, спектр масс ПЧД и таблица событий в формате TSV.

В.2 Соответствие модулей разделам основного текста

Таблица В.1 — Основные модули пакета `wall_sim`

Модуль	Содержание
<code>geometry.py</code>	Вычисление дискретного оператора \mathbf{L} , площадей A_i и нормалей \vec{n}_i на треугольной сетке
<code>dynamics.py</code>	Реализация одного шага KDK (<code>kdk_step</code>) и расчёт энергий E , γ_{\max}
<code>remesh.py</code>	Тангенциальное сглаживание, схлопывание и переворот рёбер (разд. 3.2)
<code>bubbles.py</code>	Поиск связанных компонент стенки, отслеживание фрагментов и детекция ПЧД
<code>mesh_io.py</code>	Загрузка сеток из HDF5 и H5, подготовка начальных данных
<code>solver_regions.py</code>	Главный цикл симуляции по регионам кластера
<code>main_regions.py</code>	Точка входа: запуск расчёта, построение графиков и экспорт результатов

В.3 Параметры расчётов и запуск

Параметры симуляций гл. 3 задаются в скрипте `main_regions.py` и файле `config.py`. Типичные значения, использованные в работе: шаг по времени $h = 10^{-5}$ (для 4 е-фолдов) или $h = 2,5 \cdot 10^{-6}$ (для 5 е-фолдов); схлопывание рёбер на каждом шаге; переворот рёбер каждые два шага; тангенциальное сглаживание каждые 10 шагов с параметром $\alpha = 0,3$. Порог массы ПЧД, отсекаемой как численный шум, задаётся константой `MASS_RESOLUTION_CUT = 2 \cdot 10^{-4}`.

Запуск расчёта по регионам кластера (из корня репозитория, с установленным пакетом):

```
python -m wall_sim.main_regions
```

Скрипт `main_single.py` предназначен для симуляции одной связной поверхности. Результаты сохраняются в каталог `examples/`: графики энергии, `pbh_spectrum.png` и файл событий `pbh_events.tsv`.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Zel'dovich Y. B., Novikov I. D.* The Hypothesis of Cores Retarded during Expansion and the Hot Cosmological Model // *Sov. Astron.* — 1967. — Vol. 10. — P. 602.
2. *Carr B., Kühnel F.* Primordial Black Holes as Dark Matter: Recent Developments // *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* — 2020. — Vol. 70. — P. 355–394. — arXiv: [2006.02838](https://arxiv.org/abs/2006.02838) [[astro-ph.CO](#)].
3. Clusters of Primordial Black Holes / K. M. Belotsky [et al.] // *Eur. Phys. J. C.* — 2019. — Vol. 79, no. 3. — P. 246. — arXiv: [1807.06590](https://arxiv.org/abs/1807.06590) [[astro-ph.CO](#)].
4. *Curtis-Lake E., et al.* Spectroscopic confirmation of four metal-poor galaxies at $z=10.3-13.2$ // *Nat. Astron.* — 2023. — Vol. 7, no. 5. — P. 622–632. — arXiv: [2212.04568](https://arxiv.org/abs/2212.04568) [[astro-ph.GA](#)].
5. *Rubin S. G., Khlopov M. Y., Sakharov A. S.* Primordial black holes from non-equilibrium second order phase transition // *Grav. Cosmol.* — 2000. — Vol. 6, Suppl. — P. 51–58. — arXiv: [0005271](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0005271) [[hep-ph](#)].
6. *Popov A. A., Rubin S. G., Sakharov A. S.* Primordial Black Holes from Spatially Varying Cosmological Constant Induced by Field Fluctuations in Extra Dimensions // *Universe.* — 2024. — Vol. 10, no. 4. — P. 166. — arXiv: [2404.00449](https://arxiv.org/abs/2404.00449) [[astro-ph.CO](#)].
7. *Nikulin V. V., Krasnov M. A., Rubin S. G.* Compact extra dimensions as the source of primordial black holes // *Front. Astron. Space Sci.* — 2022. — Vol. 9. — P. 927144. — arXiv: [2204.06360](https://arxiv.org/abs/2204.06360) [[gr-qc](#)].
8. *García-Bellido J., Linde A. D., Wands D.* Density perturbations and black hole formation in hybrid inflation // *Phys. Rev. D.* — 1996. — Vol. 54, no. 10. — P. 6040–6058. — arXiv: [astro-ph/9605094](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9605094).
9. *Линде А. Д.* Физика элементарных частиц и инфляционная космология. — М. : Наука, 1990. — 280 с. — ISBN 5-02-014345-6.
10. *Kibble T.* Topology of cosmic domains and magnetic monopoles // *J. Phys. A.* — 1976. — Vol. 9, no. 8. — P. 1387–1398.
11. *Vilenkin A., Shellard E.* Cosmic Strings and Other Topological Defects. — Cambridge : Cambridge University Press, 1994. — 517 p. — (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). — ISBN 9780521391535.
12. *Zel'dovich Y. B., Kobzarev I. Y., Okun L. B.* Cosmological consequences of a spontaneous breakdown of a discrete symmetry // *J. Exp. Theor. Phys.* — 1975. — Vol. 40, no. 1. — P. 1–5. — *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **67**, 3–11 (1974).

13. *Vilenkin A.* Cosmological evolution of domain walls // *Phys. Lett. B.* — 1981. — Vol. 99. — P. 307–310.
14. *Vilenkin A.* Gravitational field of vacuum domain walls // *Phys. Lett. B.* — 1983. — Vol. 133. — P. 177–179.
15. *Ipser J., Sikivie P.* The gravitational field of a cosmic domain wall // *Phys. Rev. D.* — 1984. — Vol. 30, no. 3. — P. 712–719.
16. *Israel W.* Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity // *Nuovo Cim. B.* — 1966. — Vol. 44. — P. 1–14.
17. *Rubin S. G., Sakharov A. S., Khlopov M. Y.* The formation of primary galactic nuclei during phase transitions in the early universe // *J. Exp. Theor. Phys.* — 2001. — Vol. 92, no. 6. — P. 921–929. — arXiv: [0106187 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/0106187).
18. *Kirillov A. A., Murygin B. S., Nikulin V. V.* Soliton foam formation in the early Universe // *Phys. Lett. B.* — 2025. — Vol. 860. — P. 139201. — arXiv: [2412.18997 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/2412.18997).
19. *Рубаков В. А.* Классические калибровочные поля. — М. : Эдиториал УРСС, 1999. — 336 с. — ISBN 5-8360-0003-4.
20. *Howe P., Tucker R.* A locally supersymmetric and reparametrization invariant action for a spinning membrane // *J. Phys. A.* — 1977. — Vol. 10, no. 9. — P. L155–L158.
21. *Lorensen W., Cline H.* Marching Cubes: A High Resolution 3D Surface Construction Algorithm // *ACM SIGGRAPH Comput. Graph.* — 1987. — Vol. 21, no. 4. — P. 163–169.
22. *Pinkall U., Polthier K.* Computing Discrete Minimal Surfaces and Their Conjugates // *Experiment. Math.* — 1993. — Vol. 2, no. 1. — P. 15–36.
23. *Polygon Mesh Processing / M. Botsch [et al.].* — Boca Raton : A K Peters/CRC Press, 2010. — 242 p. — ISBN 9781568814261.
24. *Hairer E., Lubich C., Wanner G.* Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations. Vol. 31. — 2nd ed. — Berlin : Springer, 2006. — 644 p. — (Springer Series in Computational Mathematics). — ISBN 978-3-540-30666-5.