

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»  
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ  
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

УДК 531.3, 539.1.05

**ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА  
К БАКАЛАВРСКОЙ ДИПЛОМНОЙ РАБОТЕ  
ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМА РЕЗОНАНСНОГО ОБМЕНА  
ЭНЕРГИЕЙ В СТОЛКНОВЕНИЯХ СОЛИТОНОВ**

Студент \_\_\_\_\_ А. С. Никифоров  
Научный руководитель,  
д.ф.-м.н. \_\_\_\_\_ В. А. Гани

Москва 2026

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

**ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМА РЕЗОНАНСНОГО ОБМЕНА  
ЭНЕРГИЕЙ В СТОЛКНОВЕНИЯХ СОЛИТОНОВ**

Студент	_____ А. С. Никифоров
Научный руководитель, д.ф.-м.н.	_____ В. А. Гани
Рецензент, к.ф.-м.н.	_____ В. Е. Маслов
Секретарь ГЭК, к.ф.-м.н.	_____ А. А. Кириллов
Зав. каф. №40, д.ф.-м.н., проф.	_____ М. Д. Скорохватов

# СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ

В настоящей работе применяются следующие сокращения и обозначения.

## Сокращения

$K$	кинк;
$\bar{K}$	антикинк;
$K-\bar{K}$	конфигурация кинк–антикинк;
$\bar{K}-K$	конфигурация антикинк–кинк;
<b>Бион</b>	долгоживущее осциллирующее связанное состояние кинка и антикинка;
<b>FFT</b>	быстрое преобразование Фурье.

## Обозначения

$\varphi(x, t)$	действительное скалярное поле;
$V(\varphi)$	потенциал полевой модели;
$W(\varphi)$	суперпотенциал;
$M_K$	масса статического кинка;
$v_{\text{in}}$	начальная скорость столкновения;
$v_{\text{out}}$	скорость разлёта после столкновения;
$v_{\text{cr}}$	критическая скорость однократного разлёта;
$x_0$	начальное полурасстояние между центрами солитонов;
$a$	полурасстояние между центрами кинка и антикинка в спектральной задаче;
$U(x)$	эффективный потенциал задачи малых возмущений;
$\omega$	частота нормальной моды;
$\gamma(x)$	функция поглощения в приграничном слое;
$L$	половина длины расчётной области;
$N$	число узлов пространственной сетки;

$\Delta x$  шаг пространственной сетки.

## РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа содержит 50 страниц, 16 рисунков, 19 использованных источников и 1 приложение.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:**  $K-\bar{K}$  СТОЛКНОВЕНИЯ, СОЛИТОН, БИОН, СПЕКТР ВОЗБУЖДЕНИЙ КИНКА, СТЕПЕННАЯ АСИМПТОТИКА КИНКА, МОДЕЛЬ  $\varphi^8$ , МОДЕЛЬ  $\varphi^{10}$ .

Объектом исследования являются  $K-\bar{K}$  столкновения в одномерных скалярных полевых моделях с потенциалом высокого порядка. Предметом исследования являются резонансные окна разлёта, динамика столкновений и связь наблюдаемых режимов со спектром возбуждений составной конфигурации  $K-\bar{K}$ . Целью настоящего исследования является анализ и объяснение резонансных явлений при столкновении кинков и антикинков в моделях с потенциалом высокого порядка. Особое внимание уделяется поиску окон разлёта, анализу многократных столкновений и исследованию связи наблюдаемой динамики со спектром возбуждений составной конфигурации  $K-\bar{K}$ .

В работе рассмотрено семейство моделей с потенциалом  $V(\varphi) = \varphi^{2n}(1 - \varphi^2)^2$ , получены неявные уравнения кинковых решений, их асимптотики и выражения для массы кинков через суперпотенциал. Выполнено численное моделирование столкновений  $K-\bar{K}$  в моделях  $\varphi^8$  и  $\varphi^{10}$  с поиском окон разлёта и последующим спектральным анализом; модель  $\varphi^{12}$  рассмотрена в аналитической части как естественное продолжение семейства. Для численного моделирования использованы минимизированные начальные условия, уменьшающие паразитные возмущения, связанные с перекрытием степенных хвостов. Получены зависимости скорости разлёта от начальной скорости, выявлены двукратные окна разлёта и проведён спектральный анализ составных конфигураций  $K-\bar{K}$ . Результаты показывают, что резонансные окна могут быть связаны с возбуждением коллективных мод промежуточного связанного состояния, даже если изолированный кинк не имеет внутренней колебательной моды.

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ</b>	<b>2</b>
<b>РЕФЕРАТ</b>	<b>4</b>
<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	<b>7</b>
<b>1 Кинковые решения</b>	<b>9</b>
<b>2 Резонансные явления в <math>K-\bar{K}</math> столкновениях и спектры возбуждений</b>	<b>12</b>
2.1 Резонансные явления в $K-\bar{K}$ столкновениях . . . . .	12
2.2 Спектр возбуждений уединённого кинка . . . . .	13
2.3 Постановка задачи о $K-\bar{K}$ столкновении . . . . .	15
2.3.1 Первая минимизация . . . . .	16
2.3.2 Вторая минимизация . . . . .	16
2.3.3 Нахождение потенциальной ямы для пары $K-\bar{K}$ . . . . .	17
<b>3 Кинковые решения в моделях с потенциалом <math>V(\varphi)=\varphi^{2n}(1-\varphi^2)^2</math></b>	<b>20</b>
3.1 Суперпотенциал и масса кинков . . . . .	20
3.2 Общий вид неявных уравнений . . . . .	21
3.3 Общий вид асимптотик . . . . .	24
3.4 Модель $\varphi^8$ . . . . .	25
3.5 Модель $\varphi^{10}$ . . . . .	26
3.6 Модель $\varphi^{12}$ . . . . .	27
<b>4 Результаты численного моделирования</b>	<b>29</b>
4.1 Численные результаты для модели $\varphi^8$ . . . . .	29
4.1.1 Двукратные окна и образование биона . . . . .	30
4.1.2 Спектральный анализ двукратных окон . . . . .	31

4.2	Численные результаты для модели $\varphi^{10}$ . . . . .	34
4.3	Замечание о модели $\varphi^{12}$ . . . . .	36
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b>		<b>37</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ А Комментарии по численному моделированию</b>		<b>39</b>
A.1	Численная схема решения уравнения движения . . . . .	39
A.2	Спектральное вычисление пространственной производной . .	42
A.3	Численная реализация первой и второй минимизации . . . . .	44
A.3.1	Первая минимизация . . . . .	44
A.3.2	Вторая минимизация . . . . .	45
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ</b>		<b>49</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Кинковые решения нелинейных полевых уравнений находят широкое применение в различных областях теоретической физики, в частности в космологии при описании процессов, происходивших в ранней Вселенной [1–4]. Кинк является одним из простейших типов солитонных решений: он представляет собой топологически нетривиальную конфигурацию поля, соединяющую различные вакуумные состояния модели. На ранних этапах эволюции Вселенной скалярные поля могли находиться в состоянии, при котором их среднее значение ещё не релаксировало в один из возможных вакуумов. В результате спонтанного нарушения симметрии различные области пространства могли переходить в разные вакуумные состояния, что приводило к образованию разделяющих их доменных стенок [2; 4].

В направлении, перпендикулярном доменной стенке, её профиль описывается кинковым решением соответствующей полевой модели. Если образуется несколько доменных стенок, то естественным образом возникает задача об эволюции системы нескольких стенок. В простейшем случае такая система может быть описана конфигурацией  $K-\bar{K}$ . Уже в ранних работах по модели  $\varphi^4$  было показано, что такая динамика может приводить не только к простому разлёту или захвату [5; 6]. В дальнейшем для  $K-\bar{K}$  столкновений была выявлена сложная резонансная структура: образование связанных состояний, разлёт после одного соударения, а также резонансный разлёт после двух или более соударений [7–10].

В настоящей работе рассматривается взаимодействие кинковых решений в моделях с потенциалом в виде полинома высокой степени [11; 12]. Характерной особенностью кинковых решений в таких моделях является наличие степенной асимптотики, т.е. медленного приближения поля к вакуумному значению по мере удаления от центра кинка [13; 14]. Это приводит к дальнедействующему взаимодействию кинка и антикинка и делает неприменимой простую постановку начальных условий через анзац в виде суммы

изолированных кинкового и антикинкового решений. Поэтому для корректного численного моделирования необходимо использовать минимизированные начальные конфигурации, позволяющие уменьшить влияние паразитных возмущений, возникающих из-за перекрытия степенных хвостов [12; 15].

Целью настоящего исследования является анализ и объяснение резонансных явлений при столкновении кинков и антикинков в моделях с потенциалом высокого порядка. Особое внимание уделяется поиску окон разлёта, анализу многократных столкновений и исследованию связи наблюдаемой динамики со спектром возбуждений составной конфигурации  $K-\bar{K}$ .

Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи:

- 1) изучена структура и свойства уединённого кинка в рассматриваемых моделях;
- 2) сформулирована задача о столкновении кинка и антикинка;
- 3) построены минимизированные начальные условия для численного моделирования;
- 4) выполнено численное решение уравнений движения и определены окна разлёта;
- 5) проведён спектральный анализ колебаний между соударениями для скоростей соответствующих центрам окон многократных столкновений.

# 1 Кинковые решения

Рассмотрим теоретико-полевою модель с одним действительным скалярным полем  $\varphi$ , эволюционирующим в  $(1 + 1)$ -мерном пространстве-времени [1; 3]. При этом действие имеет вид

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \mathcal{L} \left( \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right), \quad (1.1)$$

где плотность функции Лагранжа задаётся выражением

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - V(\varphi). \quad (1.2)$$

Интегрирование в (1.1) ведётся по некоторому отрезку  $[t_1, t_2]$  по времени, в то время как по пространственной переменной  $x$  интегрирование выполняется по всей действительной оси. Функция  $V(\varphi)$  в (1.2) называется потенциалом и определяет конкретную теоретико-полевою модель.

Пусть  $V(\varphi)$  – неотрицательная функция, имеющая два или более вырожденных минимума

$$\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots,$$

в которых

$$V(\bar{\varphi}_1) = V(\bar{\varphi}_2) = \dots = 0.$$

Нули потенциала называются вакуумами теоретико-полевою модели [2; 3].

Принцип наименьшего действия, применённый к (1.1), приводит к уравнению движения для поля  $\varphi$ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\varphi} = 0. \quad (1.3)$$

Функционал энергии, соответствующий лагранжиану (1.2), имеет вид

$$E[\varphi(x, t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + V(\varphi) \right] dx. \quad (1.4)$$

В статическом случае  $\varphi = \varphi(x)$  уравнение (1.3) принимает вид

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{dV}{d\varphi}, \quad (1.5)$$

а энергия (1.4) записывается как

$$E[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + V(\varphi) \right] dx. \quad (1.6)$$

Кинком называется решение  $\varphi_K(x)$  уравнения (1.5), удовлетворяющее граничным условиям [1; 2]

$$\varphi_K(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi_K(x) = \bar{\varphi}_i, \quad \varphi_K(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_K(x) = \bar{\varphi}_j, \quad (1.7)$$

где  $\bar{\varphi}_i < \bar{\varphi}_j$  — два соседних вакуума модели. В случае  $\bar{\varphi}_i > \bar{\varphi}_j$  соответствующее решение называют антикинком и обозначают  $\varphi_{\bar{K}}(x)$ . Для краткости в дальнейшем оба решения,  $\varphi_K(x)$  и  $\varphi_{\bar{K}}(x)$ , часто будем называть кинками или солитонами. В связи с кинковыми решениями часто используется понятие топологического сектора. Например, про кинк и антикинк, соединяющие вакуумы  $\bar{\varphi}_i$  и  $\bar{\varphi}_j$ , то есть имеющие асимптотики (1.7), говорят, что они принадлежат топологическому сектору  $(\bar{\varphi}_i, \bar{\varphi}_j)$ . В случае статического кинкового решения порядок уравнения (1.5) может быть понижен с учётом граничных условий (1.7):

$$\frac{d\varphi}{dx} = \pm \sqrt{2V(\varphi)}. \quad (1.8)$$

Знак “+” в этом уравнении соответствует кинку, а знак “−” — антикинку. Из уравнения (1.8) и свойств потенциала  $V(\varphi)$  следует, что кинк является строго монотонно возрастающей функцией координаты, а антикинк — убывающей.

Заметим, что статическое кинковое решение имеет минимальную энергию среди всех возможных полевых конфигураций в данном топологическом секторе. Этот факт может быть выведен с учётом (1.6), (1.7) и (1.8).

Кроме того, наряду с потенциалом модели  $V(\varphi)$  бывает удобно ввести функцию  $W(\varphi)$ , связанную с  $V(\varphi)$  следующим образом:

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} \left( \frac{dW}{d\varphi} \right)^2. \quad (1.9)$$

Функцию  $W(\varphi)$  называют суперпотенциалом или препотенциалом [1; 3]. В этом случае уравнение (1.8) можно записать как

$$\frac{d\varphi}{dx} = \pm \frac{dW}{d\varphi}. \quad (1.10)$$

С использованием суперпотенциала энергия статического кинка или антикинка, называемая также его массой, может быть записана в виде

$$M_K = E[\varphi_K(x)] = |W(\bar{\varphi}_i) - W(\bar{\varphi}_j)|. \quad (1.11)$$

Заметим, что в силу релятивистской инвариантности рассматриваемого класса полевых моделей движущийся кинк может быть получен из статического при помощи преобразования Лоренца [1]. Энергия кинка, движущегося со скоростью  $v < 1$ , равна

$$E(v) = \frac{M_K}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (1.12)$$

Общие сведения о кинковых решениях в теоретико-полевых моделях приведены, например, в монографиях [1–3].

## 2 Резонансные явления в кинк–антикинк столкновениях и спектры возбуждений

### 2.1 Резонансные явления в $K-\bar{K}$ столкновениях

Первые численные исследования  $K-\bar{K}$  динамики в модели  $\varphi^4$  относятся к работам А. Е. Кудрявцева и Б. С. Гетманова [5; 6]. В дальнейшем резонансная структура таких столкновений была подробно изучена и связана с многократными окнами разлёта [7–10; 16]. В модели  $\varphi^4$  существует критическая начальная скорость  $v_{cr}$ , разделяющая основные сценарии взаимодействия. При  $v_i > v_{cr}$  кинк и антикинк после одного соударения разлетаются на бесконечность. При  $v_i < v_{cr}$  обычно происходит захват пары и образование медленно распадающегося связанного состояния, которое принято называть бионом. Однако при начальных скоростях ниже критической захват не является безальтернативным вариантом. Кинк и антикинк могут столкнуться, на некоторое время разойтись, затем вновь сблизиться и после второго соударения разлететься на бесконечность. Соответствующие интервалы начальных скоростей называются окнами разлёта. Если окончательный разлёт происходит после двух соударений, говорят о двукратном окне разлёта; аналогично определяются трёхкратные и более окна. Совокупность таких окон обычно имеет сложную фрактальную структуру [7–9].

Для модели  $\varphi^4$  появление окон разлёта объясняется резонансным обменом энергией между поступательным движением кинка и антикинка и внутренней колебательной модой уединённого кинка. При первом соударении часть кинетической энергии переходит в колебательную степень свободы. Если время между последовательными соударениями оказывается близким к резонансному значению, часть энергии, временно запасённой в колебательной степени свободы, может вернуться в поступательное движение. В результате кинк и антикинк получают достаточно кинетической

энергии, чтобы покинуть область взаимодействия. [7; 16].

Такое объяснение естественным образом приводит к задаче о нахождении спектра малых возмущений кинка. В частности, необходимо определить, существует ли у уединённого кинка дискретная колебательная мода, способная временно накапливать энергию между соударениями.

## 2.2 Спектр возмущений уединённого кинка

Представим скалярное поле  $\varphi(x, t)$  как стационарное решение  $\varphi_K(x)$  с малым возмущением  $\delta\varphi(x, t)$ :

$$\varphi(x, t) = \varphi_K(x) + \delta\varphi(x, t), \quad \|\delta\varphi\| \ll \|\varphi_K\|. \quad (2.1)$$

Подставим это выражение в уравнение движения и оставим только слагаемые первого порядка по  $\delta\varphi$ . Для производной потенциала имеем

$$\frac{dV(\varphi_K + \delta\varphi)}{d\varphi} \approx \frac{dV(\varphi_K)}{d\varphi} + \frac{d^2V(\varphi_K)}{d\varphi^2} \delta\varphi. \quad (2.2)$$

Так как статический кинк удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\varphi_K}{dx^2} = \frac{dV}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_K}, \quad (2.3)$$

линеаризованное уравнение для малого возмущения принимает вид

$$\frac{\partial^2\delta\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\delta\varphi}{\partial x^2} + V''(\varphi_K(x))\delta\varphi = 0. \quad (2.4)$$

Будем искать возмущение методом разделения переменных:

$$\delta\varphi(x, t) = \psi(x)T(t). \quad (2.5)$$

Подстановка (2.5) в (2.4) даёт

$$\psi(x)T''(t) - \psi''(x)T(t) + V''(\varphi_K(x))\psi(x)T(t) = 0. \quad (2.6)$$

После деления на  $\psi(x)T(t)$  получаем

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} - V''(\varphi_K(x)). \quad (2.7)$$

Левая часть зависит только от времени, а правая только от координаты, поэтому обе части равны некоторой постоянной. Выберем её в виде  $-\omega^2$ . Тогда временная часть удовлетворяет уравнению

$$T''(t) + \omega^2 T(t) = 0, \quad (2.8)$$

а её общее решение имеет вид

$$T(t) = A \cos(\omega t + \xi) \quad (2.9)$$

Выберем фазу так, чтобы

$$\delta\varphi(x, t) = \psi(x) \cos(\omega t). \quad (2.10)$$

Тогда пространственная часть удовлетворяет уравнению

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + V''(\varphi_K(x)) \right] \psi(x) = \omega^2 \psi(x), \quad \psi(x) \in L^2. \quad (2.11)$$

Обозначая

$$U(x) = V''(\varphi_K(x)), \quad (2.12)$$

получаем оператор

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + U(x). \quad (2.13)$$

Собственные значения  $\omega^2 > 0$  соответствуют внутренним колебательным модам уединённого кинка, а значение  $\omega^2 = 0$  соответствует трансляционной моде.

Для кинков со степенными асимптотиками ситуация отличается от классического случая  $\varphi^4$ : уединённый кинк со степенной асимптотикой хотя бы с одной стороны не имеет дискретной внутренней колебательной моды, кроме трансляционной [12; 17]. Поэтому одних только спектров изолированных кинков недостаточно для объяснения окон разлёта в моделях

с медленно меняющимися хвостами.

## 2.3 Постановка задачи о $K-\bar{K}$ столкновении

При построении начальных условий для численного моделирования столкновений типа  $K-\bar{K}$  важно учитывать характер асимптотик сталкивающихся кинков [12; 15]. Так, например, в классической модели  $\varphi^4$  кинк и антикинк обращены друг к другу экспоненциально убывающими хвостами. Поэтому при достаточно большом начальном расстоянии их перекрытие экспоненциально мало, и суперпозиция решений в виде изолированных движущихся кинка и антикинка может использоваться как хорошее приближение для начальной конфигурации. Однако для кинковых решений со степенными асимптотиками такой анзац неприменим. В этом случае хвосты убывают медленно, поэтому их перекрытие остаётся заметным даже при больших расстояниях между центрами солитонов. В результате простая суперпозиция кинка и антикинка приводит к существенным численным искажениям, которые могут заметно влиять на дальнейшую динамику системы. Поэтому для задания начальной конфигурации целесообразно использовать лоскутный анзац, представленный в англоязычной литературе термином *split-domain ansatz*, который служит начальным приближением для процедуры минимизации [12; 15]:

$$\varphi(x, t) = [1 - H(x)]\varphi_K(x + x_0 - vt) + H(x)\varphi_{\bar{K}}(x - x_0 + vt), \quad (2.14)$$

где  $H(x)$  — функция Хевисайда. Такой анзац фиксирует желаемое расположение солитонов, однако имеет излом в точке сшивки, поэтому непосредственно использовать его как начальное условие нельзя.

Из уравнения (2.14) можно получить граничные

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x, t) = \bar{\varphi}, \quad (2.15)$$

где  $\bar{\varphi}$  — соответствующее вакуумное значение поля, и начальные условия для решения уравнения движения:

$$\varphi(x, 0) = [1 - H(x)]\varphi_K(x + x_0) + H(x)\varphi_{\bar{K}}(x - x_0), \quad (2.16)$$

$$\varphi_t(x, 0) = -v[1 - H(x)]\varphi'_{\bar{K}}(x + x_0) + vH(x)\varphi'_{\bar{K}}(x - x_0). \quad (2.17)$$

### 2.3.1 Первая минимизация

Первая минимизация предназначена для получения сглаженного начального профиля поля  $\varphi(x, 0)$ , соответствующего конфигурации “кинк+антикинк” при заданном расстоянии между солитонами и заданной скорости. Для одиночного движущегося кинка  $\varphi(x, t) = \phi(x - vt)$  выполняется

$$(1 - v^2)\phi''(\xi) - V'(\phi(\xi)) = 0, \quad \xi = x - vt. \quad (2.18)$$

Смысл первой минимизации состоит в нахождении функции  $\varphi(x)$ , которая была бы как можно ближе к решению этого уравнения и одновременно сохраняла центры кинка и антикинка в точках  $\pm x_0$ . Для этого минимизируется функционал

$$I[\varphi] = \|(1 - v^2)D_2\varphi - V'(\varphi)\|_2^2 + C|\varphi(-x_0) - \tilde{\phi}|^2 + C|\varphi(x_0) - \tilde{\phi}|^2, \quad (2.19)$$

где  $D_2$  — оператор второй производной,  $\tilde{\phi}$  — выбранное значение поля, фиксирующее положение центра каждого солитона, а  $C$  — эмпирическая константа. Минимизированный профиль  $\varphi_{\min}(x)$  затем используется как улучшенное начальное условие:

$$\varphi(x, 0) = \varphi_{\min}(x). \quad (2.20)$$

Первая минимизация устраняет излом исходного анзаца и даёт профиль, который согласован с уравнением движения существенно лучше, чем простая сумма или сшивка решений.

### 2.3.2 Вторая минимизация

В качестве первого приближения для второго начального условия (2.17) можно взять

$$u_t(x, 0) = v \operatorname{sgn}(x) \varphi'_{\min}(x). \quad (2.21)$$

Такая функция направляет кинк и антикинк навстречу друг другу. Однако  $u_t(x, 0)$  сохраняет излом в точке  $x = 0$ , что приводит к генерации малой паразитной волны и искажает дальнейшую динамику столкновения. Целью второй минимизации является подбор такой функции  $u_t(x, 0)$ , при котором фиксированный профиль поля  $u(x, 0)$  начинает эволюционировать в соответствии с уравнением движения без искусственного излома в центре конфигурации.

Для этого минимизируется функционал

$$J[u] = \|D_t u_t - D_2 u + V'(u)\|_2^2 + C \|u_t + v u_x\|_2^2 + C \|u_t - v u_x\|_2^2. \quad (2.22)$$

### 2.3.3 Нахождение потенциальной ямы для пары $K-\bar{K}$

Для объяснения появления резонансных явлений в моделях, где уединённый кинк не имеет внутренней колебательной моды, необходимо рассматривать спектр не только отдельного кинка, но и составной конфигурации  $K-\bar{K}$  [17; 18]. Пусть  $\varphi_{K\bar{K}}(x; a)$  — минимизированный профиль пары при фиксированном параметре полурасстояния  $a$  между центрами кинка и антикинка. Поле такой конфигурации представим в виде

$$\varphi(x, t) = \varphi_{K\bar{K}}(x; a) + \psi(x) \cos(\omega t). \quad (2.23)$$

После линеаризации получается спектральная задача, аналогичная одномерному уравнению Шрёдингера:

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + U(x; a) \right] \psi(x) = \omega^2 \psi(x), \quad U(x; a) = V''(\varphi_{K\bar{K}}(x; a)). \quad (2.24)$$

На рисунке 2.1 показан пример эффективной потенциальной ямы для конфигурации  $K-\bar{K}$  в модели  $\varphi^8$ .

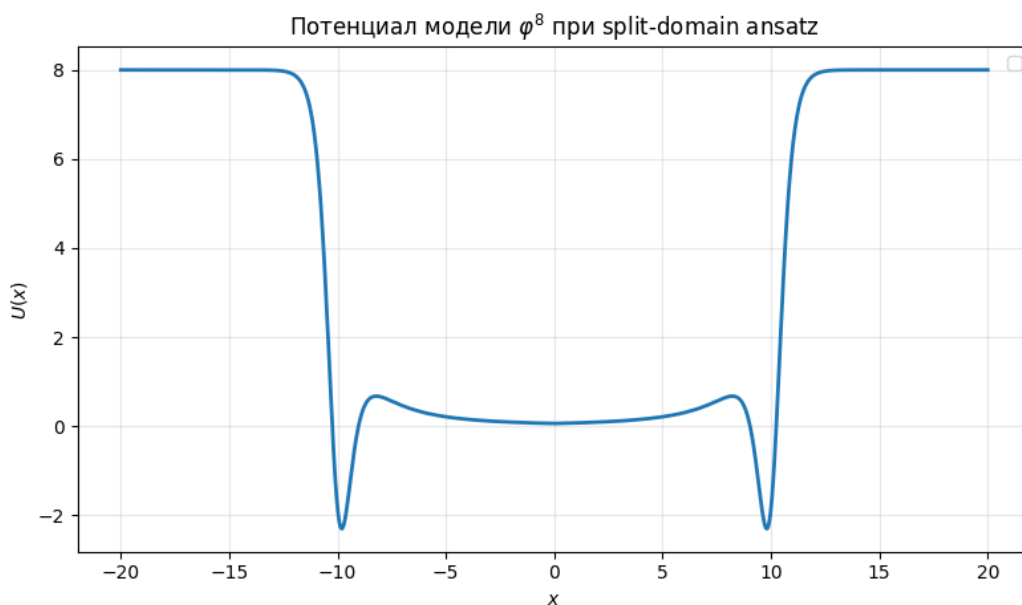


Рисунок 2.1 — Потенциальная яма для модели  $\varphi^8$  при конфигурации  $K-\bar{K}$

Именно функция  $U(x; a)$  играет роль потенциальной ямы. Когда кинк и антикинк находятся на конечном расстоянии друг от друга, их суммарный профиль может создавать потенциальную яму. В этой яме могут существовать дискретные уровни  $\omega^2$ , соответствующие коллективным вибрационным модам системы. При столкновении часть кинетической энергии поступательного движения может временно переходить в такие связанные моды, а затем возвращаться обратно [17; 18].

Похожая задача о нахождении спектра возбуждений системы  $K-\bar{K}$  рассматривалась для модели  $\varphi^8$  в работе Е. Белендрясовой и В. А. Гани [17]. В этой работе для построения эффективной потенциальной ямы использовался простой неминимизированный анзац типа суммы. В настоящей работе для той же цели используется минимизированный анзац, что позволяет уменьшить паразитные искажения, связанные с перекрытием степенных хвостов.

Если поменять порядок расположения солитонов и рассмотреть конфигурацию  $\bar{K}-K$ , форма эффективного потенциала существенно меняется. В рассматриваемом случае отсутствие окон разлёта для  $\bar{K}-K$  столкновений согласуется с тем, что для соответствующей потенциальной ямы не возникает дискретных колебательных уровней, способных накапливать энергию между последовательными соударениями.

На рисунке 2.2 приведён соответствующий потенциал для конфигурации  $\bar{K}-K$ .

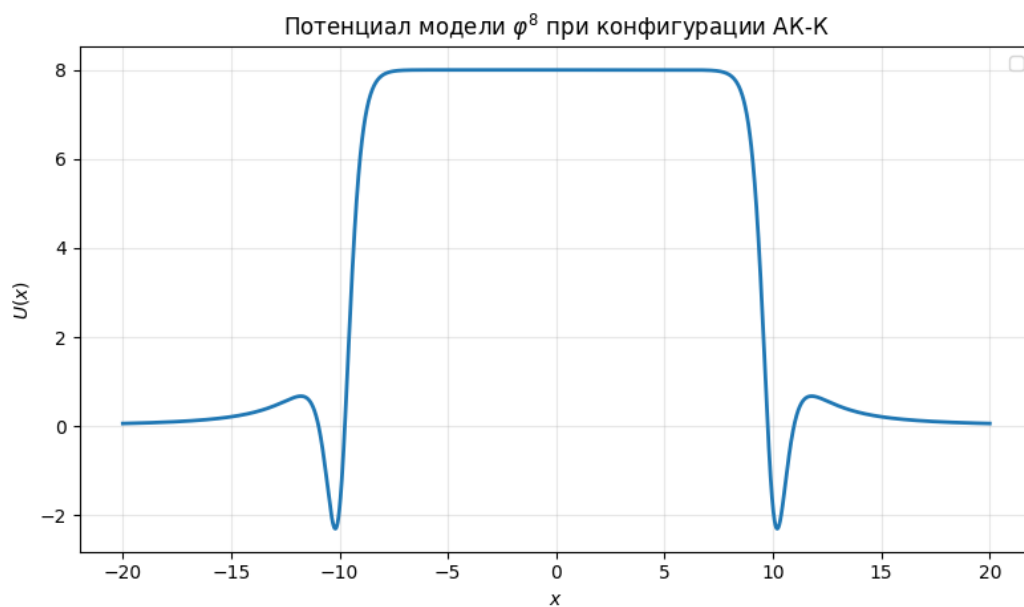


Рисунок 2.2 — Потенциал  $U(x)$  модели  $\varphi^8$ , демонстрирующий отсутствие колебательных мод в системе  $\bar{K}-K$

### 3 Кинковые решения в моделях с потенциалом $V(\varphi) = \varphi^{2n}(1 - \varphi^2)^2$

Рассмотрим семейство полевых моделей с потенциалом [11; 12]

$$V_n(\varphi) = \varphi^{2n}(1 - \varphi^2)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.1)$$

При  $n = 1$  получается модель  $\varphi^6$ , при  $n = 2$  — модель  $\varphi^8$ , при  $n = 3$  — модель  $\varphi^{10}$ , при  $n = 4$  — модель  $\varphi^{12}$  [11; 12].

В статическом случае уравнение первого порядка для кинкового решения в секторе  $0 < \varphi < 1$  имеет вид

$$\frac{d\varphi}{dx} = \sqrt{2V_n(\varphi)} = \sqrt{2} \varphi^n (1 - \varphi^2). \quad (3.2)$$

Отсюда

$$\frac{d\varphi}{\varphi^n(1 - \varphi^2)} = \sqrt{2} dx, \quad (3.3)$$

и поэтому кинковое решение определяется из неявного уравнения

$$\int \frac{d\varphi}{\varphi^n(1 - \varphi^2)} = \sqrt{2} (x - x_0). \quad (3.4)$$

#### 3.1 Суперпотенциал и масса кинков

Для потенциала (3.1) можно явно выписать суперпотенциал, что позволяет найти массу кинков при произвольном  $n$  [1; 11]. Используя определение (1.9), выберем

$$\frac{dW_n}{d\varphi} = \sqrt{2} \varphi^n (1 - \varphi^2). \quad (3.5)$$

Тогда

$$V_n(\varphi) = \frac{1}{2} \left( \frac{dW_n}{d\varphi} \right)^2 = \varphi^{2n} (1 - \varphi^2)^2. \quad (3.6)$$

Интегрируя (3.5), получаем

$$W_n(\varphi) = \sqrt{2} \left( \frac{\varphi^{n+1}}{n+1} - \frac{\varphi^{n+3}}{n+3} \right) + C_W. \quad (3.7)$$

Аддитивная константа  $C_W$  не влияет на массу кинка, поэтому далее можно положить  $C_W = 0$ .

Масса кинка в секторе  $(0, 1)$  равна разности значений суперпотенциала на соответствующих вакуумах:

$$M_n^{(0,1)} = |W_n(1) - W_n(0)| = \sqrt{2} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{(n+1)(n+3)}. \quad (3.8)$$

Для сектора  $(-1, 0)$  имеем

$$M_n^{(-1,0)} = |W_n(0) - W_n(-1)| = \frac{2\sqrt{2}}{(n+1)(n+3)}. \quad (3.9)$$

Следовательно, кинк в каждом из двух топологических секторов семейства моделей (3.1) имеет массу

$$M_n = \frac{2\sqrt{2}}{(n+1)(n+3)}. \quad (3.10)$$

## 3.2 Общий вид неявных уравнений

Вид интеграла (3.4) зависит от четности показателя  $n$  [11].

Пусть сначала

$$n = 2k + 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

Тогда

$$\frac{1}{\varphi^{2k+1}(1-\varphi^2)} = \frac{1}{2(1-\varphi)} - \frac{1}{2(1+\varphi)} + \sum_{i=0}^k \frac{1}{\varphi^{2i+1}}. \quad (3.12)$$

Интегрируя это выражение, получаем

$$\int \frac{d\varphi}{\varphi^{2k+1}(1-\varphi^2)} = \ln \varphi - \frac{1}{2} \ln(1-\varphi^2) - \sum_{i=1}^k \frac{1}{2i\varphi^{2i}} + C. \quad (3.13)$$

Следовательно, для нечетного  $n = 2k + 1$  неявное уравнение кинка имеет вид

$$\ln \varphi - \frac{1}{2} \ln(1 - \varphi^2) - \sum_{i=1}^k \frac{1}{2i\varphi^{2i}} = \sqrt{2} (x - x_0) \quad (3.14)$$

При  $k = 0$  сумма отсутствует.

Теперь пусть

$$n = 2k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.15)$$

В этом случае

$$\frac{1}{\varphi^{2k}(1 - \varphi^2)} = \frac{1}{2(1 - \varphi)} + \frac{1}{2(1 + \varphi)} + \sum_{i=1}^k \frac{1}{\varphi^{2i}}. \quad (3.16)$$

После интегрирования получаем

$$\int \frac{d\varphi}{\varphi^{2k}(1 - \varphi^2)} = \operatorname{arth} \varphi - \sum_{i=1}^k \frac{1}{(2i - 1)\varphi^{2i-1}} + C. \quad (3.17)$$

Следовательно, для четного  $n = 2k$  неявное уравнение кинка имеет вид

$$\operatorname{arth} \varphi - \sum_{i=1}^k \frac{1}{(2i - 1)\varphi^{2i-1}} = \sqrt{2} (x - x_0) \quad (3.18)$$

Полученные неявные уравнения задают профиль кинка  $\varphi(x)$ , соединяющего вакуумы  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 1$ . На рисунке 3.1 приведены профили решений для первых значений параметра  $k$  в случаях (3.18) и (3.14).

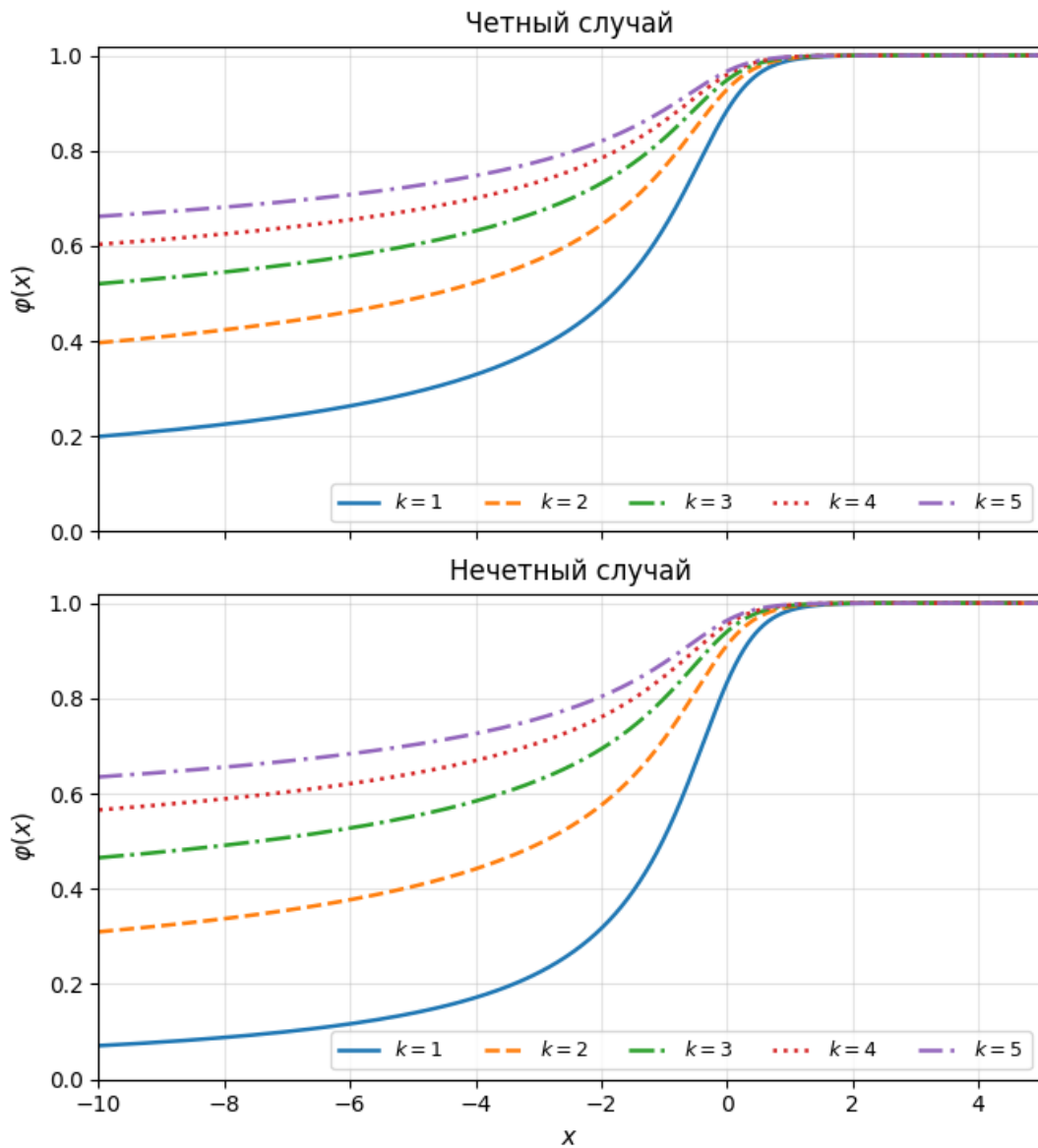


Рисунок 3.1 — Профили кинковых решений  $\varphi(x)$ , заданных неявными уравнениями общего вида

Для антикинка, соответствующего переходу  $1 \rightarrow 0$ , выбирается противоположный знак в уравнении первого порядка:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\sqrt{2} \varphi^n (1 - \varphi^2). \quad (3.19)$$

Поэтому его неявное решение получается заменой

$$\sqrt{2}(x - x_0) \rightarrow -\sqrt{2}(x - x_0). \quad (3.20)$$

Для сектора  $-1 < \varphi < 0$  удобно ввести  $\chi = -\varphi$ . Тогда  $0 < \chi < 1$ , и для функции  $\chi(x)$  получаются те же самые неявные уравнения. После этого решение

в секторе  $(-1, 0)$  восстанавливается по формуле

$$\varphi(x) = -\chi(x). \quad (3.21)$$

### 3.3 Общий вид асимптотик

Рассмотрим кинк в секторе  $0 < \varphi < 1$ . При  $x \rightarrow -\infty$  поле стремится к вакууму  $\varphi = 0$ , а при  $x \rightarrow +\infty$  — к вакууму  $\varphi = 1$ .

Для нечетного  $n = 2k + 1$  из (3.14) при  $\varphi \rightarrow 0$  главный вклад дает последний член суммы:

$$-\frac{1}{2k\varphi^{2k}} \sim \sqrt{2}(x - x_0), \quad k \geq 1. \quad (3.22)$$

Отсюда

$$\varphi(x) \sim \frac{1}{[2k\sqrt{2}(x_0 - x)]^{1/(2k)}} \quad x \rightarrow -\infty. \quad (3.23)$$

Для частного случая  $k = 0$ , соответствующего модели  $\varphi^6$ , левый хвост является экспоненциальным, поскольку в уравнении отсутствуют отрицательные степени  $\varphi$ .

При  $\varphi \rightarrow 1$  положим

$$\varphi = 1 - \epsilon, \quad 0 < \epsilon \ll 1. \quad (3.24)$$

Тогда из (3.14) следует

$$\epsilon \sim \frac{1}{2} e^{-H_k} e^{-2\sqrt{2}(x-x_0)}, \quad (3.25)$$

где  $H_k = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i}$  — гармонические числа.

Следовательно,

$$\varphi(x) \sim 1 - \frac{1}{2} e^{-H_k} e^{-2\sqrt{2}(x-x_0)} \quad x \rightarrow +\infty. \quad (3.26)$$

Для четного  $n = 2k$  из (3.18) при  $\varphi \rightarrow 0$  главный вклад имеет вид

$$-\frac{1}{(2k-1)\varphi^{2k-1}} \sim \sqrt{2}(x - x_0). \quad (3.27)$$

Отсюда

$$\varphi(x) \sim \frac{1}{[(2k-1)\sqrt{2}(x_0-x)]^{1/(2k-1)}} \quad x \rightarrow -\infty. \quad (3.28)$$

При  $\varphi \rightarrow 1$  получаем

$$\epsilon \sim 2e^{-2A_k}e^{-2\sqrt{2}(x-x_0)}, \quad A_k = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2i-1}, \quad (3.29)$$

и поэтому

$$\varphi(x) \sim 1 - 2e^{-2A_k}e^{-2\sqrt{2}(x-x_0)} \quad x \rightarrow +\infty. \quad (3.30)$$

Таким образом, для моделей  $\varphi^{2n+4}$  при  $n \geq 2$  кинковые решения обладают степенным хвостом со стороны вакуума  $\varphi = 0$  и экспоненциальным хвостом со стороны вакуума  $\varphi = 1$  [11; 13].

### 3.4 Модель $\varphi^8$

Для модели  $\varphi^8$  имеем  $n = 2$ , то есть  $n = 2k$  при  $k = 1$ . Потенциал имеет вид

$$V(\varphi) = \varphi^4(1 - \varphi^2)^2. \quad (3.31)$$

Подставляя  $k = 1$  в общее уравнение (3.18), получаем

$$\operatorname{arth} \varphi - \frac{1}{\varphi} = \sqrt{2}(x - x_0) \quad (3.32)$$

Из общей формулы (3.28) при  $k = 1$  следует левая степенная асимптотика

$$\varphi(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2}(x_0 - x)} \quad x \rightarrow -\infty. \quad (3.33)$$

Правая асимптотика получается из (3.30). При  $k = 1$  имеем  $A_1 = 1$ , поэтому

$$\varphi(x) \sim 1 - 2e^{-2}e^{-2\sqrt{2}(x-x_0)} \quad x \rightarrow +\infty. \quad (3.34)$$

Для кинка в секторе  $(-1, 0)$  используется замена  $\varphi = -\chi$ , где  $\chi$  удовлетворяет уравнению (3.32). Поэтому со стороны вакуума  $\varphi = 0$  сохраняется степенный хвост, а со стороны вакуума  $\varphi = -1$  — экспоненциальный. Соответствующие профили показаны на рисунке 3.2.

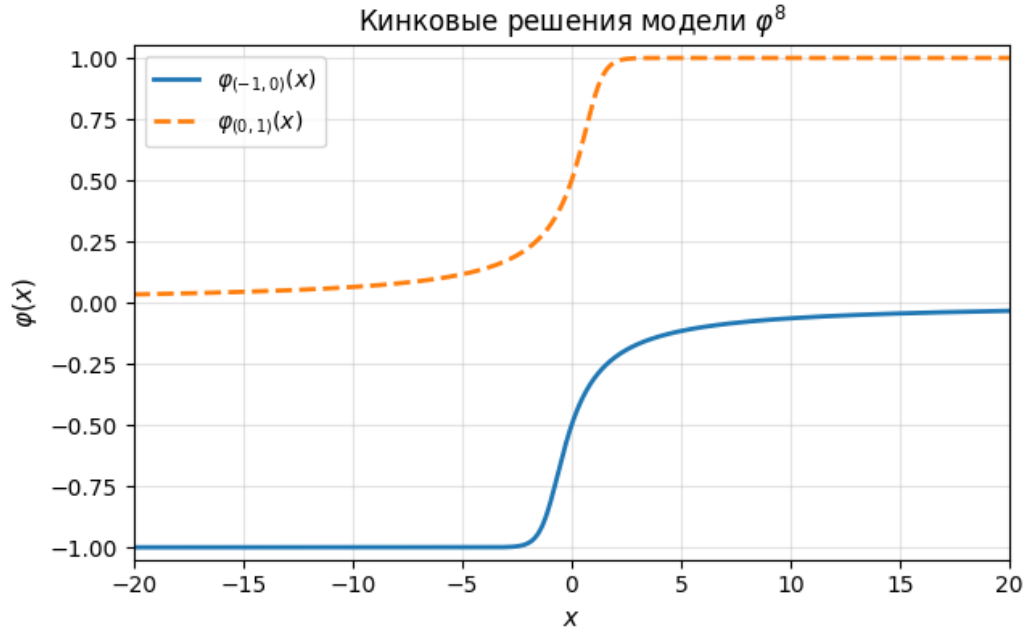


Рисунок 3.2 — Кинковые решения  $\varphi_{(-1,0)}(x)$  и  $\varphi_{(0,1)}(x)$  в модели  $\varphi^8$

### 3.5 Модель $\varphi^{10}$

Для модели  $\varphi^{10}$  имеем  $n = 3$ , то есть  $n = 2k + 1$  при  $k = 1$ . Потенциал имеет вид

$$V(\varphi) = \varphi^6(1 - \varphi^2)^2. \quad (3.35)$$

Подставляя  $k = 1$  в общее уравнение (3.14), получаем

$$\ln \varphi - \frac{1}{2} \ln(1 - \varphi^2) - \frac{1}{2\varphi^2} = \sqrt{2}(x - x_0) \quad (3.36)$$

Из общей формулы (3.23) при  $k = 1$  следует

$$\varphi(x) \sim \frac{1}{[2\sqrt{2}(x_0 - x)]^{1/2}} \quad x \rightarrow -\infty. \quad (3.37)$$

Для правого хвоста при  $k = 1$  имеем  $H_1 = 1$ , поэтому из (3.26) получаем

$$\varphi(x) \sim 1 - \frac{1}{2} e^{-1} e^{-2\sqrt{2}(x-x_0)} \quad x \rightarrow +\infty. \quad (3.38)$$

Профили кинковых решений модели  $\varphi^{10}$  приведены на рисунке 3.3.

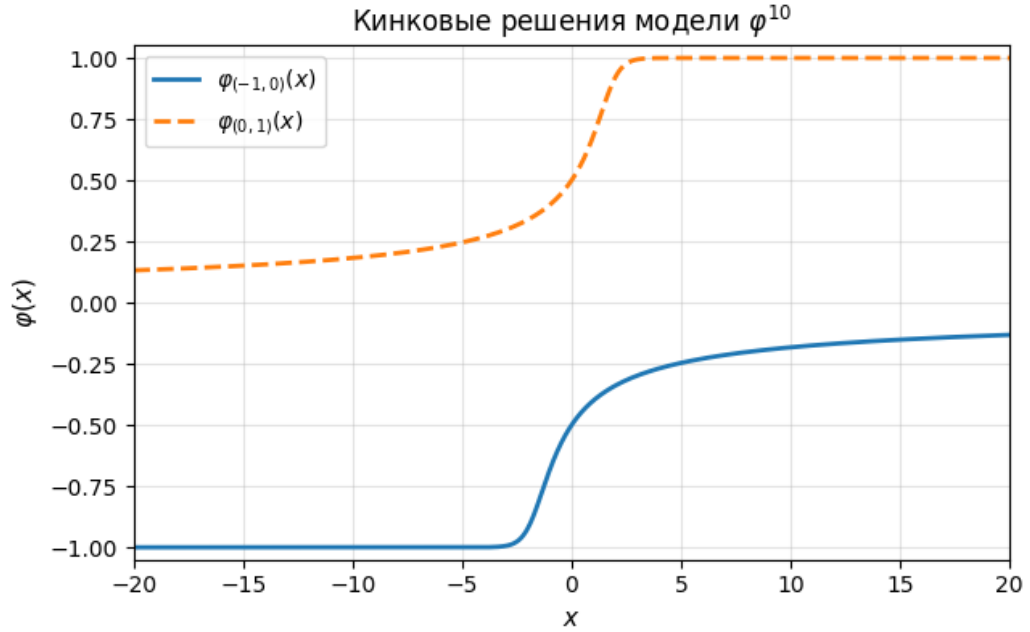


Рисунок 3.3 — Кинковые решения  $\varphi_{(-1,0)}(x)$  и  $\varphi_{(0,1)}(x)$  в модели  $\varphi^{10}$

### 3.6 Модель $\varphi^{12}$

Для модели  $\varphi^{12}$  имеем  $n = 4$ , то есть  $n = 2k$  при  $k = 2$ . Потенциал имеет вид

$$V(\varphi) = \varphi^8(1 - \varphi^2)^2. \quad (3.39)$$

Подставляя  $k = 2$  в общее уравнение (3.18), получаем

$$\operatorname{arth} \varphi - \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{3\varphi^3} = \sqrt{2}(x - x_0) \quad (3.40)$$

Из общей формулы (3.28) при  $k = 2$  следует

$$\varphi(x) \sim \frac{1}{[3\sqrt{2}(x_0 - x)]^{1/3}} \quad x \rightarrow -\infty. \quad (3.41)$$

Для правого хвоста при  $k = 2$  имеем

$$A_2 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}. \quad (3.42)$$

Поэтому из (3.30) получаем

$$\varphi(x) \sim 1 - 2e^{-8/3}e^{-2\sqrt{2}(x-x_0)} \quad x \rightarrow +\infty. \quad (3.43)$$

Профили кинковых решений модели  $\varphi^{12}$  приведены на рисунке 3.4.

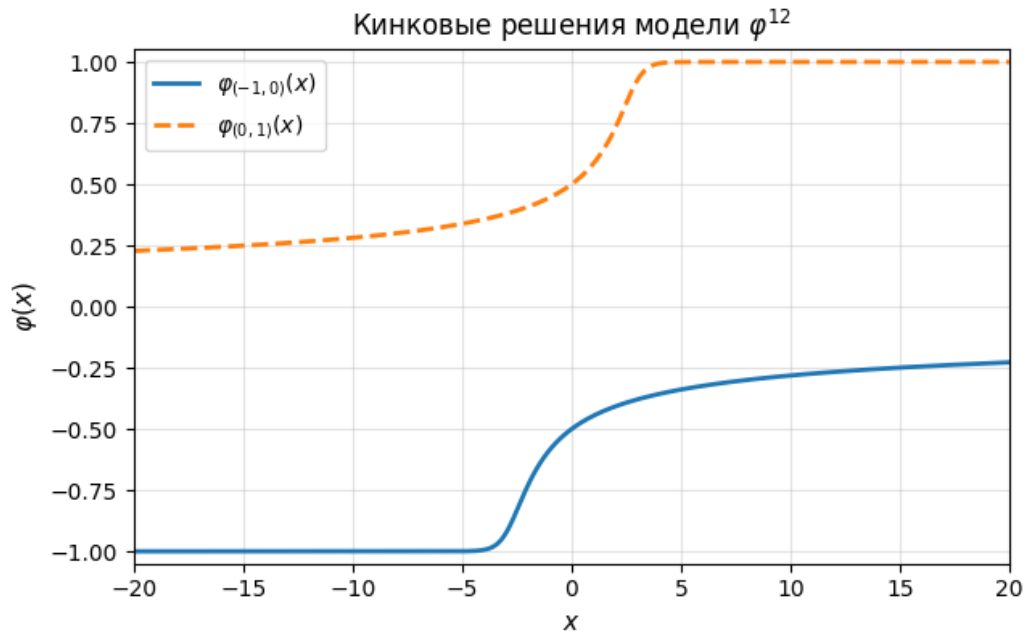


Рисунок 3.4 — Кинковые решения  $\varphi_{(-1,0)}(x)$  и  $\varphi_{(0,1)}(x)$  в модели  $\varphi^{12}$

## 4 Результаты численного моделирования

### 4.1 Численные результаты для модели $\varphi^8$

Для модели  $\varphi^8$  была рассмотрена начальная конфигурация типа  $K-\bar{K}$ , в которой солитоны направлены навстречу друг другу степенными асимптотиками. В расчётах использовались минимизированные начальные условия, построенные на основе split-domain ansatz.

Численное моделирование показывает, что при изменении начальной скорости  $v_{in}$  возникают различные сценарии эволюции: однократный разлёт, многократные окна разлёта и захват пары с образованием долгоживущего осциллирующего связанного состояния. На рисунке 4.1 приведена зависимость модуля скорости разлёта  $|v_{out}|$  от начальной скорости  $v_{in}$  для двукратных окон разлёта.

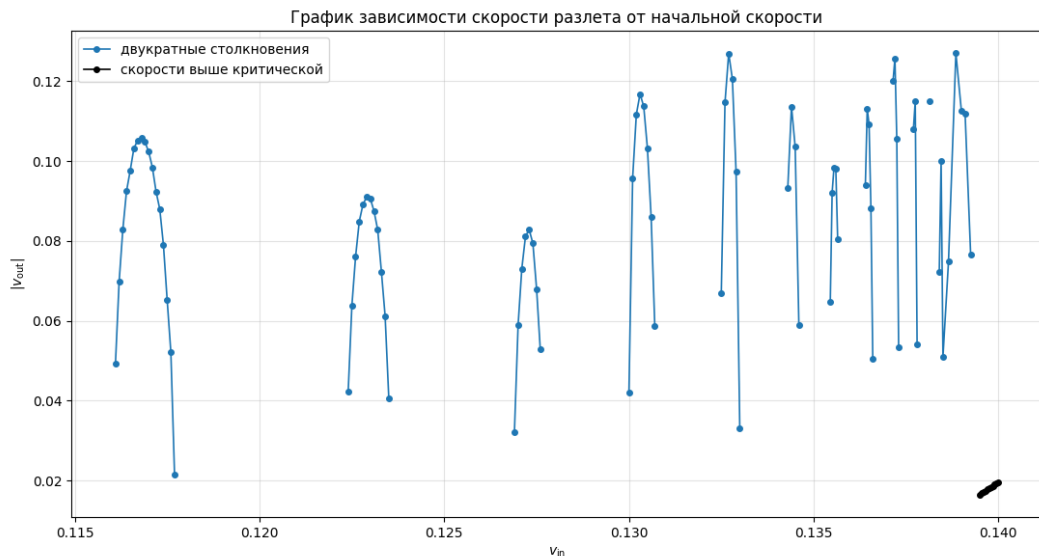


Рисунок 4.1 — Зависимость скорости разлёта  $|v_{out}|$  от начальной скорости  $v_{in}$  для модели  $\varphi^8$

Видно, что область однократного разлёта формирует сравнительно регулярную ветвь при больших  $v_{in}$ . При меньших скоростях разлёт возможен

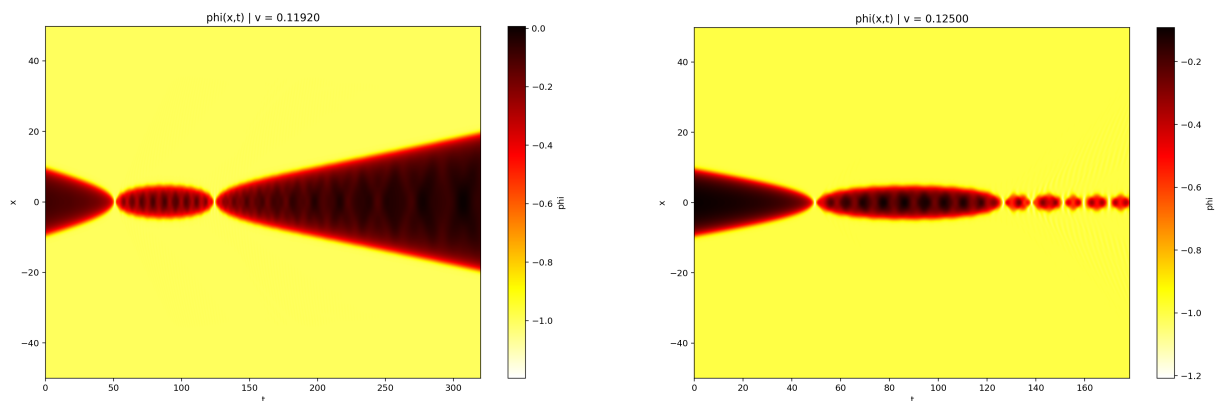
только в узких многократных окнах. Основной вклад дают двукратные окна, однако на их границах появляются более узкие окна с тремя и большим числом соударений. Такая структура качественно согласуется с известной феноменологией многократных резонансных окон в моделях с несколькими вакуумами и в моделях поля более высокого порядка [12].

#### 4.1.1 Двукратные окна и образование биона

Отдельно был рассмотрен случай, соответствующий центру одного из двукратных окон:

$$v_{\text{in}} = 0,12295.$$

Пространственно-временная картина  $\varphi(x, t)$ , показанная на рисунке 4.2, демонстрирует сравнение двух сценариев эволюции: двукратного разлёта и образования биона.



(а) Двукратный разлёт при  $v_{\text{in}} = 0,12295$

(б) Образование биона при значении начальной скорости близкой к центру окна

Рисунок 4.2 — Пространственно-временная эволюция поля  $\varphi(x, t)$  в модели  $\varphi^8$

В случае  $v_{\text{in}} = 0,12295$  первое столкновение происходит при  $t \simeq 50$ , после чего формируется промежуточное осциллирующее состояние пары. В интервале между первым и вторым соударениями поле в центральной области совершает несколько малых колебаний. Эти колебания можно интерпретировать как временное накопление части энергии поступательного движения в коллективной степени свободы составной конфигурации. Затем происходит повторное столкновение, после которого кинк и антикинк расходятся.

Для сравнения на рисунке 4.3 приведена пространственно-временная

эволюция поля для другого двукратного окна:

$$v_{\text{in}} = 0,13655.$$

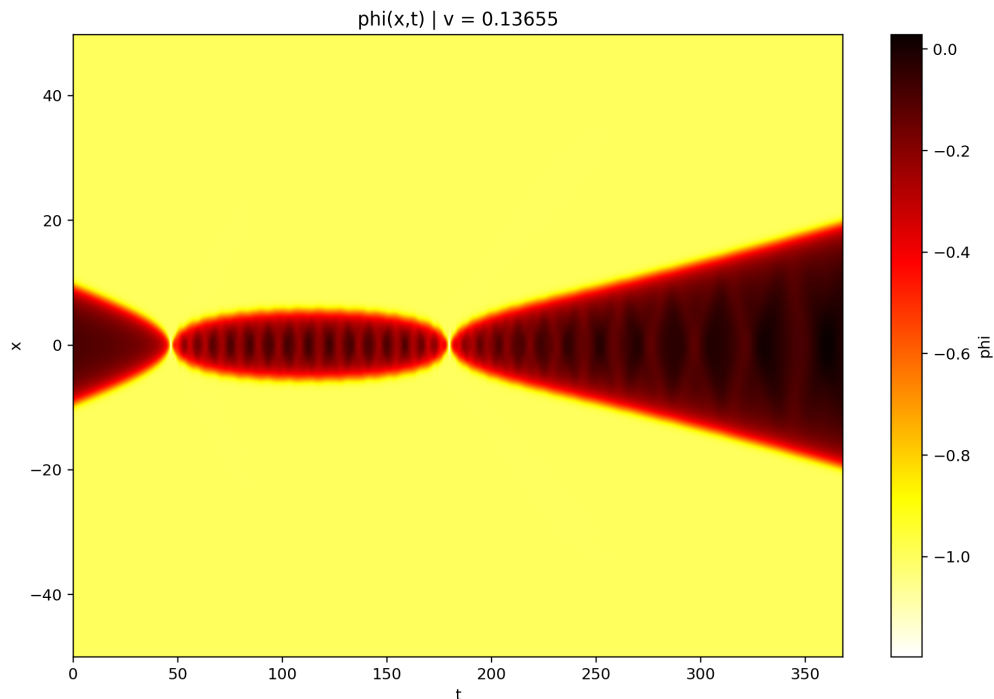


Рисунок 4.3 — Пространственно-временная эволюция поля  $\varphi(x, t)$  в модели  $\varphi^8$  при  $v_{\text{in}} = 0,13655$

По сравнению со случаем  $v_{\text{in}} = 0,12295$ , при  $v_{\text{in}} = 0,13655$  промежуточное состояние существует дольше и содержит большее число колебаний поля в центральной области. Это означает, что рассматриваемые скорости принадлежат разным двукратным окнам: второе окно соответствует большему числу осцилляций между первым и вторым соударениями.

#### 4.1.2 Спектральный анализ двукратных окон

Дополнительное подтверждение резонансной природы двукратных окон даёт спектральный анализ. Для каждого из рассмотренных случаев анализировалось изменение значения поля в центре во времени  $\varphi(0, t)$  в промежутке между первым и вторым соударениями. По этому ряду вычислялся Фурье-спектр  $\Phi(\omega)$ , после чего положения выраженных максимумов сопоставлялись с дискретными уровнями задачи малых возмущений вокруг составной конфигурации  $K-\bar{K}$ . Такой подход аналогичен предложенному

для модели  $\varphi^6$ , где окна разлёта возникают несмотря на отсутствие внутренних мод у изолированных кинков. В этом случае энергия временно накапливается не во внутренней моде отдельного кинка, а в коллективных модах составной конфигурации [18]. Для моделей со степенными асимптотиками похожая интерпретация также используется при обсуждении спектра системы  $K-\bar{K}$  [17].

На рисунке 4.4 приведён спектральный анализ для случая

$$v_{\text{in}} = 0,12295.$$

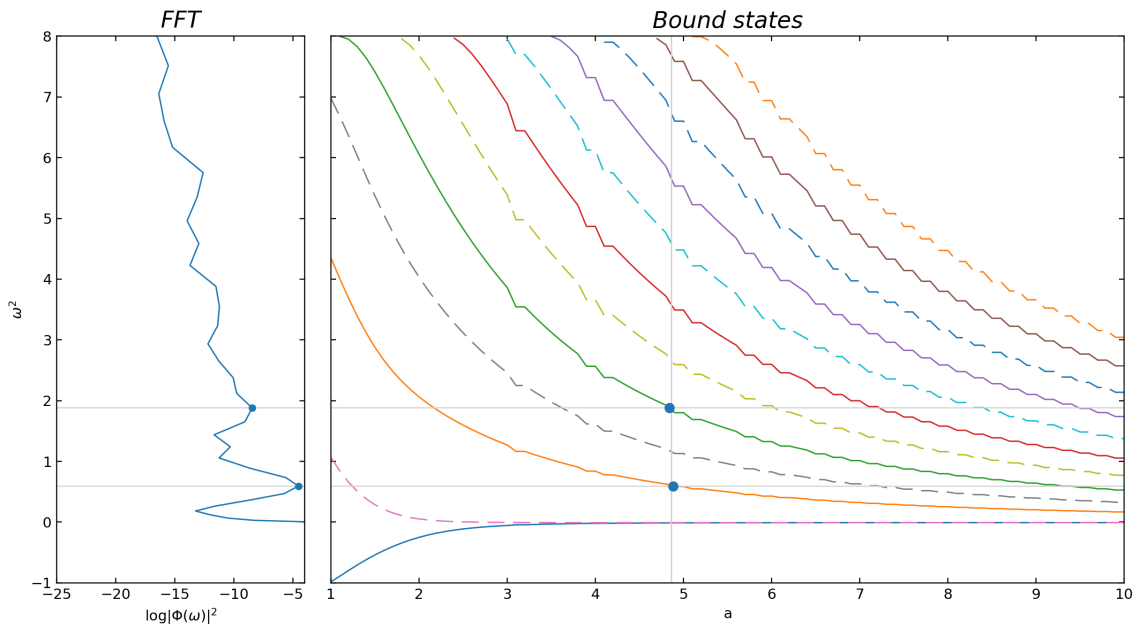


Рисунок 4.4 — Сопоставление Фурье-спектра колебаний поля и спектра связанных состояний составной конфигурации  $K-\bar{K}$  в модели  $\varphi^8$  при  $v_{\text{in}} = 0,12295$

На левой панели рисунка 4.4 показана зависимость  $\log |\Phi(\omega)|^2$  от  $\omega^2$ , синими точками отмечены пики спектра. На правой панели приведена зависимость дискретных уровней  $\omega^2$  от полурасстояния  $a$ : сплошные линии соответствуют чётным модам, пунктирные — нечётным, а серые горизонтальные линии показывают сопоставление пиков Фурье-спектра с уровнями связанного состояния.

Для скорости  $v_{\text{in}} = 0,12295$  в спектре выделяются несколько основных пиков. Их положения оказываются близки к нижним ветвям дискретного

спектра составной пары при некотором эффективном значении полурасстояния  $a$ . Это указывает на то, что в интервале между соударениями преимущественно возбуждаются низшие коллективные моды конфигурации  $K-\bar{K}$ . Именно эти моды могут служить временным резервуаром энергии, которая затем частично возвращается в поступательное движение при повторном столкновении.

На рисунке 4.5 приведён аналогичный анализ для случая

$$v_{\text{in}} = 0,13655.$$

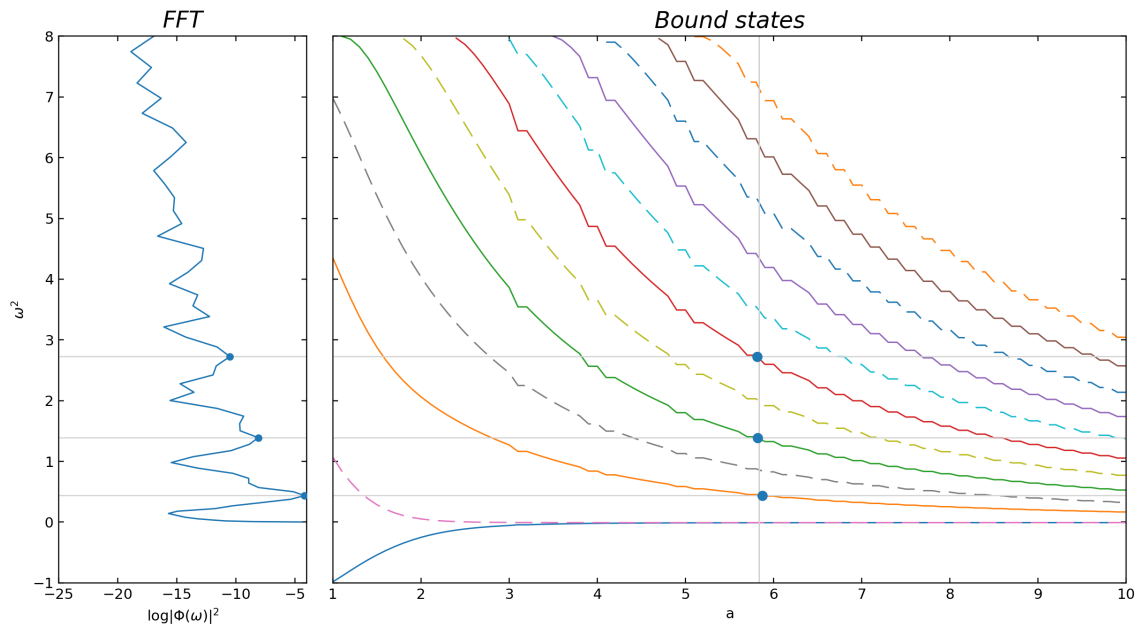


Рисунок 4.5 — Сопоставление Фурье-спектра колебаний поля и спектра связанных состояний составной конфигурации  $K-\bar{K}$  в модели  $\varphi^8$  при  $v_{\text{in}} = 0,13655$

Обозначения на рисунке 4.5 аналогичны обозначениям на рисунке 4.4: левая панель показывает Фурье-спектр, правая — уровни связанных состояний, а серые горизонтальные линии фиксируют сопоставление частот. В случае  $v_{\text{in}} = 0,13655$  промежуток между двумя основными соударениями больше, поэтому  $\varphi(0, t)$  содержит большее число осцилляций. Это приводит к более отчётливому выделению спектральных максимумов. Пики Фурье-спектра также располагаются вблизи ветвей дискретного спектра составной конфигурации, но соответствие наблюдается при другом эффективном значе-

нии полурасстояния  $a$ . Отсюда можно сделать вывод, что в разных двукратных окнах максимальное разделение кинка и антикинка между соударениями различается.

Сравнение рисунков 4.4 и 4.5 показывает, что оба случая имеют одну и ту же физическую природу. В обоих двукратных окнах после первого столкновения часть энергии поступательного движения переходит в коллективные моды составной пары. При этом более высокое значение  $v_{in} = 0,13655$  соответствует окну с большим временем жизни промежуточного состояния и большим числом колебаний между соударениями. Следовательно, различие между двумя случаями заключается не в механизме разлёта, а в том, какие моды и при каком эффективном расстоянии между солитонами оказываются наиболее выраженными в спектре.

Таким образом, спектральный анализ подтверждает, что двукратные окна в модели  $\varphi^8$  связаны с возбуждением коллективных мод конфигурации  $K-\bar{K}$ . Несмотря на отсутствие внутренней колебательной моды у изолированного кинка, составная система обладает дискретными уровнями, способными временно удерживать энергию между двумя последовательными соударениями.

## 4.2 Численные результаты для модели $\varphi^{10}$

Для модели  $\varphi^{10}$  также была построена зависимость скорости разлёта от начальной скорости. На рисунке 4.6 видно, что ниже критической скорости сохраняется характерная резонансная структура: наряду с областью захвата присутствуют узкие окна разлёта после конечного числа соударений.

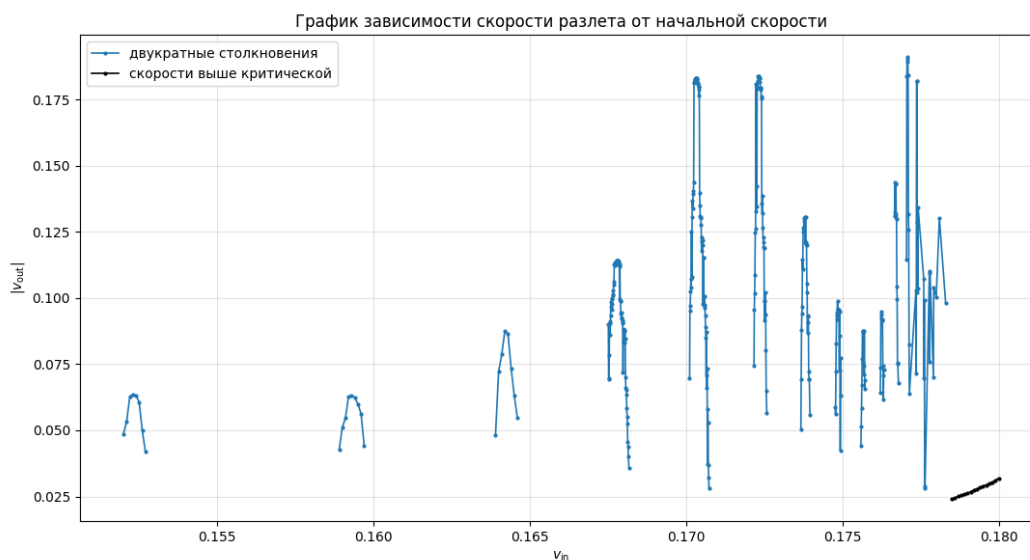


Рисунок 4.6 — Зависимость скорости разлёта  $|v_{\text{out}}|$  от начальной скорости  $v_{\text{in}}$  для модели  $\varphi^{10}$

Для одного из двукратных окон модели  $\varphi^{10}$  был выполнен спектральный анализ. На рисунке 4.7 показано сопоставление пиков Фурье-спектра колебаний поля с уровнями связанных состояний составной конфигурации. Наличие пересечений между характерными частотами динамики и дискретными уровнями подтверждает интерпретацию резонансного окна как результата обмена энергией между поступательным движением солитонов и коллективными модами пары.

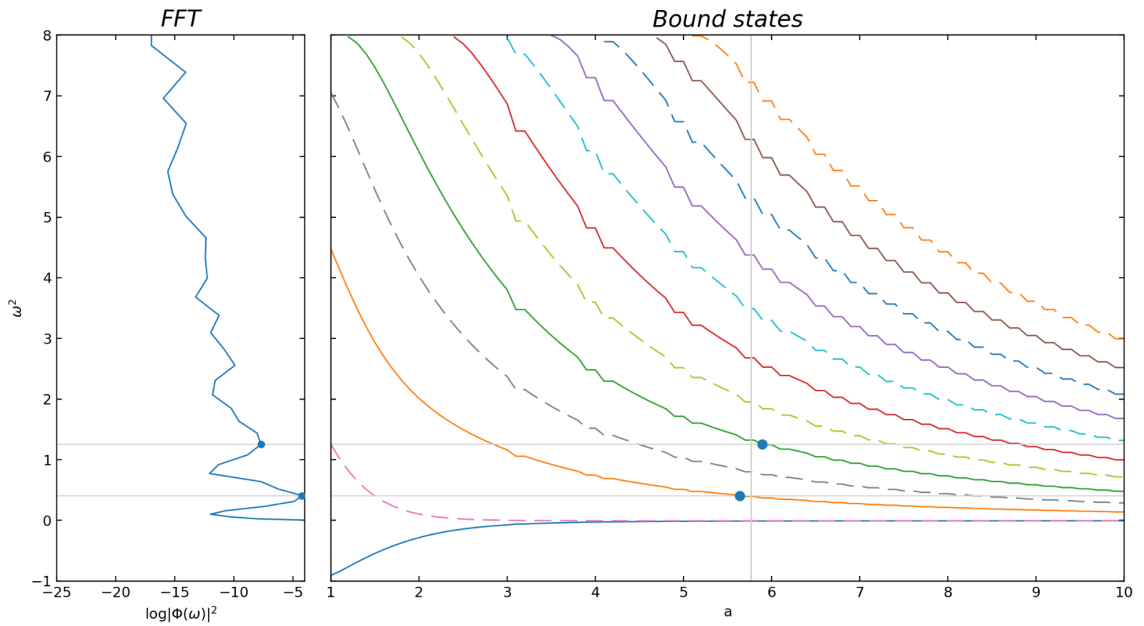


Рисунок 4.7 — Спектральный анализ двукратного окна модели  $\varphi^{10}$  при  $v_{\text{in}} = 0,15930$ : слева показан спектр Фурье колебаний поля, справа — уровни связанных состояний составной конфигурации

На левой части рисунка 4.7 показан спектр Фурье колебаний поля, на правой — уровни связанных состояний составной конфигурации.

Таким образом, результаты численного моделирования показывают, что наличие окон разлёта может объясняться не только спектром изолированного солитона, но и спектром всей промежуточной конфигурации.

### 4.3 Замечание о модели $\varphi^{12}$

Модель  $\varphi^{12}$  была рассмотрена в аналитической части работы вместе с моделями  $\varphi^8$  и  $\varphi^{10}$ : для неё получены неявное уравнение кинкового профиля, асимптотики и выражение для массы кинка. Подробное численное сканирование окон разлёта в настоящей версии работы выполнено для моделей  $\varphi^8$  и  $\varphi^{10}$ . Результаты для модели  $\varphi^{12}$  в главе численного моделирования не выделяются в отдельный набор графиков: эта модель остаётся естественным продолжением применённой методики, а её поведение качественно повторяет картину, наблюдаемую для моделей  $\varphi^8$  и  $\varphi^{10}$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены результаты численного исследования резонансных явлений в полевых моделях высокого порядка. Рассматривалось семейство моделей с потенциалом  $V(\varphi) = \varphi^{2n}(1 - \varphi^2)^2$ , для которого кинковые решения обладают степенной асимптотикой с одной из сторон. Аналитически были рассмотрены модели  $\varphi^8$ ,  $\varphi^{10}$  и  $\varphi^{12}$ , а численное моделирование было выполнено для моделей  $\varphi^8$  и  $\varphi^{10}$ . Основное внимание было уделено проверке механизма, согласно которому часть кинетической энергии кинка и антикинка при столкновении может переходить в колебательную энергию связанного состояния конфигурации  $K-\bar{K}$ .

Для решения этой задачи был разработан программный комплекс, позволяющий проводить численное моделирование столкновений в моделях рассматриваемого класса, строить зависимость скорости разлёта ( $v_{\text{out}}$ ) от начальной скорости ( $v_{\text{in}}$ ), выявлять окна многократных столкновений при скоростях ниже критической, а также выполнять спектральный анализ конфигураций, соответствующих центрам резонансных окон. При этом использовались минимизированные начальные условия, что позволило уменьшить вклад паразитных возмущений, возникающих при простой суперпозиции решений со степенными асимптотиками.

В результате численного сканирования были получены области начальных скоростей, соответствующие образованию связанного состояния, однократному разлёту после столкновения и окнам многократных столкновений. Для резонансных окон были построены пространственно-временные картины эволюции поля, зависимости  $(\varphi(0, t))$ , а также графики движения центра кинка  $(x_c(t))$  и его скорости  $(v_c(t))$ . Эти данные позволили сопоставить число соударений, характер последующего разлёта и значение скорости разлёта.

Отдельно был рассмотрен случай, соответствующий центру резонансного окна. Для этой конфигурации был проведён спектральный анализ связанного состояния  $K-\bar{K}$  и выполнено сопоставление найденных частот

с частотами, проявляющимися в динамике поля между последовательными столкновениями. Наличие дискретных уровней в спектре составной конфигурации указывает на возможность временного накопления энергии в коллективных колебательных модах.

Полученные численные результаты подтверждают состоятельность рассматриваемого механизма возникновения резонансных окон. Наблюдаемая резонансная структура может быть интерпретирована как следствие обмена энергией между поступательным движением солитонов и коллективными модами связанного состояния  $K-\bar{K}$ .

# ПРИЛОЖЕНИЕ А

## Комментарии по численному моделированию

### А.1 Численная схема решения уравнения движения

Динамика поля  $\varphi(x, t)$  описывается уравнением движения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - V'(\varphi) \quad (\text{A.1})$$

В численных расчётах использовался поглощающий слой вблизи границ расчётной области, поэтому решалось уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - V'(\varphi) - \gamma(x) \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (\text{A.2})$$

Здесь  $\gamma(x)$  задаётся гладкой переходной функцией типа bump-function [12]:

$$\gamma(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq x_d, \\ \gamma_0 \frac{\exp\left(-\frac{1}{\rho(x)}\right)}{\exp\left(-\frac{1}{\rho(x)}\right) + \exp\left(-\frac{1}{1-\rho(x)}\right)}, & x_d < |x| \leq L. \end{cases}$$

$$\rho(x) = \frac{|x| - x_d}{L - x_d}.$$

В базовых расчётах, использованных для построения графиков, принимались

$$L = 50, \quad x_d = 30, \quad \gamma_0 = 5. \quad (\text{A.3})$$

Таким образом, поглощающие слои располагались на интервалах  $30 < |x| < 50$  и имели толщину 20 пространственных единиц с каждой стороны. Такая форма поглощающей функции  $\gamma(x)$  уменьшает отражение малых волн от границ расчётной области и практически не влияет на движение солитонов в центральной части области. Профиль функции поглощения показан на рисунке А.1.

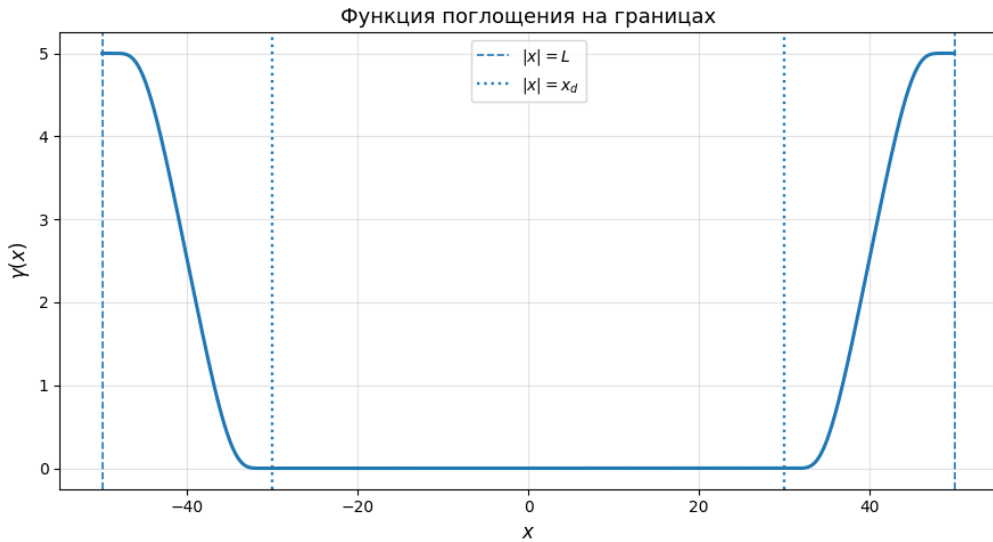


Рисунок А.1 — Профиль функции поглощения  $\gamma(x)$  при  $L = 50$ ,  $x_d = 30$  и  $\gamma_0 = 5$

Для численного решения уравнение второго порядка по времени было сведено к системе первого порядка.

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = w, \\ \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - V'(\varphi) - \gamma(x)w. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Расчётная область выбиралась в виде отрезка

$$x \in [-L, L], \quad (\text{A.5})$$

который разбивался на  $N$  узлов:

$$x_j = -L + j\Delta x, \quad j = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (\text{A.6})$$

В каждый момент времени численное решение задаётся как:

$$\varphi_j(t) = \varphi(x_j, t), \quad w_j(t) = w(x_j, t). \quad (\text{A.7})$$

Рассматривался вектор

$$y(t) = \begin{pmatrix} \varphi_0(t) \\ \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_{N-1}(t) \\ w_0(t) \\ w_1(t) \\ \vdots \\ w_{N-1}(t) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Для пространственной сетки использовались параметры

$$N = 500, \quad \Delta x = \frac{2L}{N} = 0,2. \quad (\text{A.9})$$

В расчётах столкновений начальное полурасстояние между центрами кинка и антикинка задавалось как

$$x_0 = 10. \quad (\text{A.10})$$

При построении минимизированных начальных условий использовался весовой коэффициент

$$C = 500. \quad (\text{A.11})$$

Для второй минимизации второго начального условия применялся короткий вспомогательный расчёт на интервале

$$T_{\min} = 0,04, \quad \Delta t_{\min} = 0,02, \quad M = 2. \quad (\text{A.12})$$

Ограничения на второе начальное условие задавались в окрестностях центров солитонов с ширинами

$$\Delta_L = 2, \quad \Delta_R = 1.6. \quad (\text{A.13})$$

Интегрирование полу-дискретной системы выполнялось методом RK45 с аб-

солютной и относительной точностями  $10^{-12}$ .

## A.2 Вычисление пространственной производной спектральным методом

Для вычисления второй производной по пространственной координате использовался спектральный метод Фурье.

$$\mathcal{F} : f(x) \mapsto \widehat{f}(k), \quad (\text{A.14})$$

где

$$\widehat{f}(k) = \mathcal{F}[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (\text{A.15})$$

$$\mathcal{F}[f'(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x} e^{-ikx} dx. \quad (\text{A.16})$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x} e^{-ikx} dx = f(x) e^{-ikx} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\partial}{\partial x} (e^{-ikx}) dx. \quad (\text{A.17})$$

$$\mathcal{F} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right] = ik \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx = ik \widehat{f}(k). \quad (\text{A.18})$$

Аналогично для второй производной:

$$\mathcal{F} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] = ik \mathcal{F} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right] = ik \cdot ik \widehat{f}(k). \quad (\text{A.19})$$

Следовательно,

$$\mathcal{F} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] = -k^2 \widehat{f}(k). \quad (\text{A.20})$$

Поэтому вторая производная:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \mathcal{F}^{-1} \left[ -k^2 \widehat{\varphi}(k, t) \right] = \mathcal{F}^{-1} \left[ -k^2 \mathcal{F}[\varphi] \right]. \quad (\text{A.21})$$

В численной реализации используется дискретный аналог формулы (A.21). Если значения поля заданы в узлах сетки  $x_j$ , то сначала выполняется дискрет-

ное преобразование Фурье:

$$\widehat{\varphi}_m = \text{FFT}[\varphi_j]. \quad (\text{A.22})$$

Затем каждый Фурье-коэффициент умножается на  $-k_m^2$ :

$$(\widehat{\varphi_{xx}})_m = -k_m^2 \widehat{\varphi}_m. \quad (\text{A.23})$$

После этого выполняется обратное дискретное преобразование Фурье:

$$(\varphi_{xx})_j = \text{IFFT}[-k_m^2 \widehat{\varphi}_m]. \quad (\text{A.24})$$

Именно значения  $(\varphi_{xx})_j$  затем используются в правой части полу-дискретной системы уравнений движения.

После дискретизации по координате система (A.4) переходит в систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\varphi_j}{dt} = w_j, \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{dw_j}{dt} = (D_2\varphi)_j - V'(\varphi_j) - \gamma_j w_j, \quad (\text{A.26})$$

где  $(D_2\varphi)_j$  обозначает вторую производную, вычисленную спектральным методом Фурье [19]. В векторном виде система записывается как

$$\frac{dy}{dt} = F(t, y). \quad (\text{A.27})$$

Интегрирование системы (A.27) по времени выполнялось методом Рунге–Кутты RK45. На каждом шаге метод вычисляет несколько промежуточных стадий правой части  $F(t, y)$ :

$$k_i = F\left(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j\right), \quad i = 1, \dots, s, \quad (\text{A.28})$$

где  $h$  — текущий шаг по времени, а коэффициенты  $a_{ij}$  и  $c_i$  задаются выбранной схемой Рунге–Кутты.

### А.3 Численная реализация первой и второй минимизации

Пусть расчётная область  $[-L, L]$  разбита на  $N$  узлов

$$x_j = -L + j\Delta x, \quad j = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (\text{A.29})$$

Операторы первой и второй пространственных производных обозначим через  $D_1$  и  $D_2$ . В численной реализации они вычислялись спектральным методом Фурье:

$$D_1\varphi = \mathcal{F}^{-1} [ik \mathcal{F}[\varphi]], \quad D_2\varphi = \mathcal{F}^{-1} [-k^2 \mathcal{F}[\varphi]]. \quad (\text{A.30})$$

#### А.3.1 Первая минимизация

На первом этапе минимизировался дискретный вектор значений поля  $\varphi$ . В качестве начального приближения использовалась конфигурация

$$\varphi(x_j) = (1 - H(x_j)) \varphi_K(x_j + x_0) + H(x_j) \varphi_{\bar{K}}(x_j - x_0), \quad (\text{A.31})$$

где  $H(x)$  — функция Хевисайда,  $x_0$  — начальное полурасстояние.

Функционал первой минимизации имеет вид

$$\mathcal{I}(\varphi) = \sum_{j=0}^{N-1} [(1 - v^2)(D_2\varphi)_j - V'(\varphi_j)]^2 + C(\varphi_{j_L} - \tilde{\varphi})^2 + C(\varphi_{j_R} - \tilde{\varphi})^2. \quad (\text{A.32})$$

Здесь  $j_L$  и  $j_R$  — индексы узлов, ближайших к точкам  $-x_0$  и  $x_0$  соответственно:

$$x_{j_L} \approx -x_0, \quad x_{j_R} \approx x_0, \quad (\text{A.33})$$

Для численной реализации функционал (А.32) заменяется функцией конечного числа переменных. Неизвестным является вектор значений поля в узлах сетки

$$\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1})^T \quad (\text{A.34})$$

Тогда дискретный профиль поля полностью задаётся вектором  $\varphi$ , а функци-

онал первой минимизации становится функцией многих переменных:

$$\mathcal{I}[\varphi] \longrightarrow I_N(\varphi). \quad (\text{A.35})$$

Таким образом, задача первой минимизации сводится к задаче поиска минимума функции многих переменных. На рисунке А.2 показан пример результата такой процедуры для модели  $\varphi^8$ : простая сумма кинка и антикинка заметно отличается от лоскутного анзаца, а минимизированный профиль устраняет излом в точке сшивки и задаёт более согласованную начальную конфигурацию.

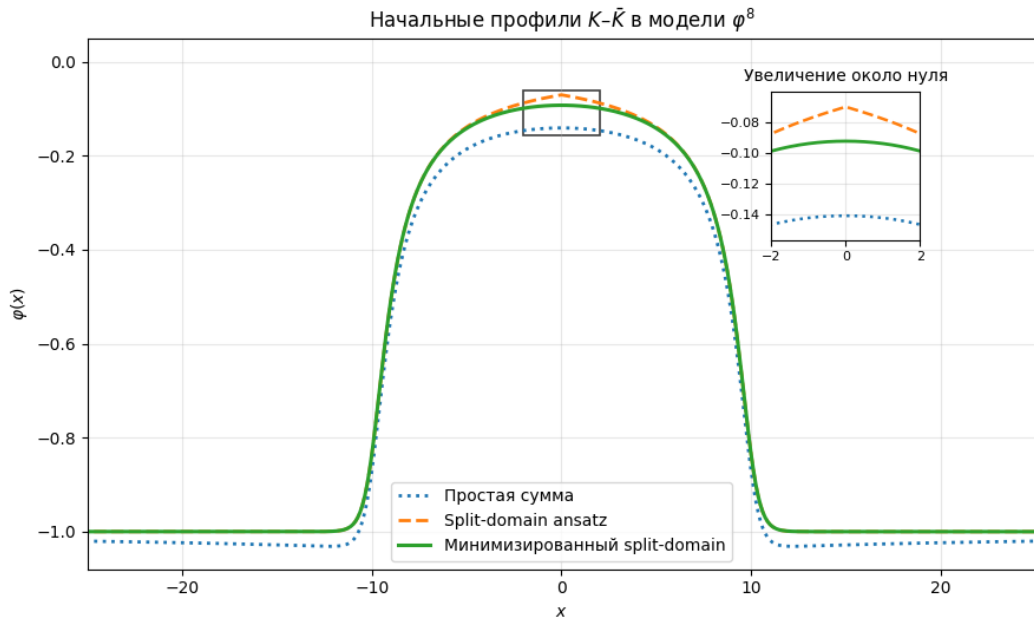


Рисунок А.2 — Сравнение простой суммы, лоскутного анзаца и профиля после первой минимизации для начальной конфигурации  $K-\bar{K}$  в модели  $\varphi^8$

### А.3.2 Вторая минимизация

После первой минимизации профиль поля считается фиксированным:

$$\varphi^{(1)} = \left( \varphi_0^{(1)}, \varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_{N-1}^{(1)} \right)^T. \quad (\text{A.36})$$

На втором этапе минимизировался дискретный вектор значений временной производной поля в начальный момент

$$\mathbf{w} = (w_0, w_1, \dots, w_{N-1})^T, \quad w_j \approx \varphi_t(x_j, 0). \quad (\text{A.37})$$

В качестве начального приближения для второй минимизации использовалась функция временной производной поля, построенная по найденному после первой минимизации профилю:

$$w_j = v \operatorname{sgn}(x_j)(D_1\varphi^{(1)})_j, \quad (\text{A.38})$$

где  $D_1$  — дискретный оператор первой пространственной производной.

Для каждого пробного вектора  $\mathbf{w}$  выполнялось короткое интегрирование уравнения движения на интервале

$$0 \leq t \leq T_{\min}. \quad (\text{A.39})$$

Начальные условия для этого вспомогательного расчёта задавались как

$$\varphi(0) = \varphi^{(1)}, \quad \varphi_t(0) = \mathbf{w}. \quad (\text{A.40})$$

На временных слоях

$$t_q = q\Delta t_{\min}, \quad q = 0, 1, \dots, M, \quad (\text{A.41})$$

получались дискретные значения поля и его временной производной

$$\varphi^q \approx \varphi(t_q), \quad \mathbf{w}^q \approx \varphi_t(t_q). \quad (\text{A.42})$$

При этом

$$\varphi^0 = \varphi^{(1)}, \quad \mathbf{w}^0 = \mathbf{w}. \quad (\text{A.43})$$

Невязка уравнения движения на временном слое  $t_q$  записывалась в виде

$$R_j^{(2)}(\mathbf{w}; t_q) = \frac{w_j^{q+1} - w_j^q}{\Delta t_{\min}} - (D_2\varphi^q)_j + V'(\varphi_j^q) + \gamma_j w_j^q. \quad (\text{A.44})$$

Дополнительно вводились условия, фиксирующие временную производную поля в окрестностях центров кинка и антикинка. Для этого задавались два набора индексов

$$\mathcal{J}_L = \{j : -x_0 - \Delta_L \leq x_j \leq -x_0 + \Delta_R\}, \quad (\text{A.45})$$

$$\mathcal{J}_R = \{j : x_0 - \Delta_R \leq x_j \leq x_0 + \Delta_L\}. \quad (\text{A.46})$$

На кинке задавалось условие

$$w_j \approx -v(D_1\varphi^{(1)})_j, \quad j \in \mathcal{J}_L, \quad (\text{A.47})$$

а на антикинке

$$w_j \approx v(D_1\varphi^{(1)})_j, \quad j \in \mathcal{J}_R. \quad (\text{A.48})$$

Функционал второй минимизации имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{w}) &= \sum_{q=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \left[ R_j^{(2)}(\mathbf{w}; t_q) \right]^2 \\ &+ C \sum_{j \in \mathcal{J}_L} \left[ w_j + v(D_1\varphi^{(1)})_j \right]^2 \\ &+ C \sum_{j \in \mathcal{J}_R} \left[ w_j - v(D_1\varphi^{(1)})_j \right]^2. \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Для численной реализации функционал (A.49) заменяется функцией конечного числа переменных. Неизвестным является вектор значений временной производной поля в начальный момент в узлах сетки

$$\mathbf{w} = (w_0, w_1, \dots, w_{N-1})^T. \quad (\text{A.50})$$

Тогда второе начальное условие полностью задаётся вектором  $\mathbf{w}$ , а функционал второй минимизации становится функцией многих переменных:

$$\mathcal{J}[\varphi_t] \longrightarrow J_N(\mathbf{w}). \quad (\text{A.51})$$

Таким образом, задача второй минимизации сводится к задаче поиска минимума функции многих переменных:

$$\mathbf{w}^{(2)} = \arg \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N} J_N(\mathbf{w}). \quad (\text{A.52})$$

Полученный вектор

$$\mathbf{w}^{(2)} = \left( w_0^{(2)}, w_1^{(2)}, \dots, w_{N-1}^{(2)} \right)^T \quad (\text{A.53})$$

использовался как второе начальное условие для поля. На рисунке А.3 показано сравнение начальных профилей временной производной поля: простая сшивка и выражение (А.38) сохраняют особенность в окрестности точки  $x = 0$ , тогда как профиль после второй минимизации сглаживает центральную область. Увеличенный фрагмент на рисунке демонстрирует отличие именно в окрестности точки сшивки.

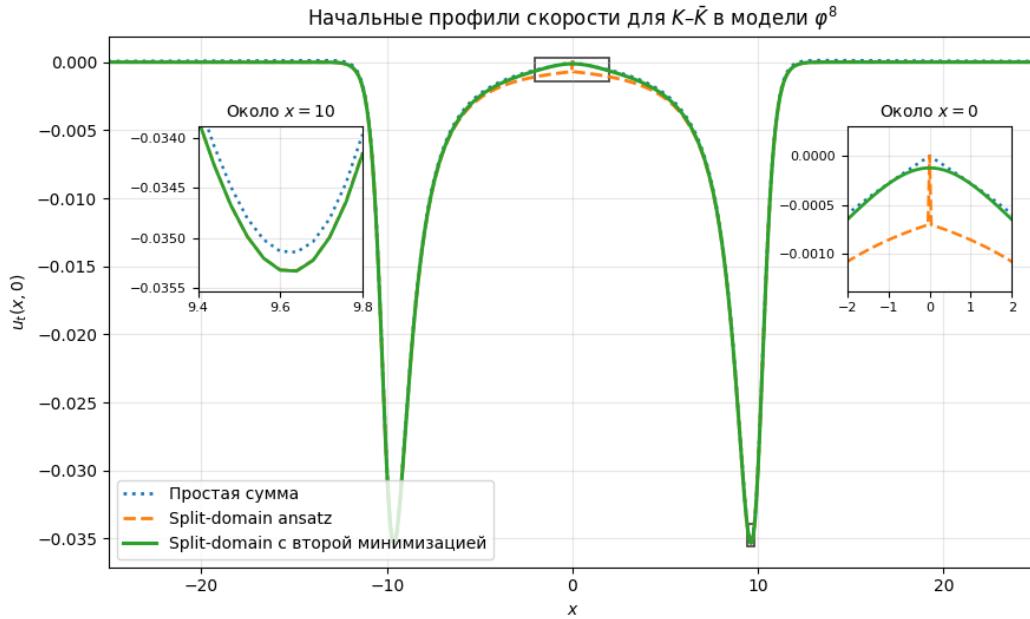


Рисунок А.3 — Сравнение начальных профилей временной производной поля до и после второй минимизации для конфигурации  $K-\bar{K}$  в модели  $\varphi^8$

Вектор  $w^{(2)}$  использовался как второе начальное условие для поля:

$$\varphi_t(x_j, 0) = w_j^{(2)}, \quad j = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (\text{A.54})$$

После второй минимизации начальные условия для прямого численного расчёта задавались в виде

$$\varphi(x_j, 0) = \varphi_j^{(1)}, \quad \varphi_t(x_j, 0) = w_j^{(2)}. \quad (\text{A.55})$$

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Manton N., Sutcliffe P.* Topological Solitons. — Cambridge : Cambridge University Press, 2004.
2. *Vachaspati T.* Kinks and Domain Walls: An Introduction to Classical and Quantum Solitons. — Cambridge : Cambridge University Press, 2006.
3. *Shnir Y. M.* Topological and Non-Topological Solitons in Scalar Field Theories. — Cambridge : Cambridge University Press, 2018.
4. *Vilenkin A., Shellard E. P. S.* Cosmic Strings and Other Topological Defects. — Cambridge : Cambridge University Press, 2000.
5. *Кудрявцев А. Е.* Солитоноподобные решения для скалярного поля Хиггса // Письма в ЖЭТФ. — 1975. — Т. 22, № 3. — С. 178. — Англ. пер.: JETP Lett. 22, 82–83 (1975).
6. *Гетманов Б. С.* Связанные состояния солитонов в модели поля  $\varphi_2^4$  // Письма в ЖЭТФ. — 1976. — Т. 24. — С. 323. — Англ. пер.: JETP Lett. 24 (1976).
7. *Campbell D. K., Schonfeld J. F., Wingate C. A.* Resonance Structure in Kink-Antikink Interactions in  $\phi^4$  Theory // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1983. — Vol. 9, no. 1/2. — P. 1–32.
8. *Anninos P., Oliveira S., Matzner R. A.* Fractal Structure in the Scalar  $\lambda(\phi^2 - 1)^2$  Theory // Physical Review D. — 1991. — Vol. 44, no. 4. — P. 1147–1160.
9. *Белова Т. И., Кудрявцев А. Е.* Солитоны и их взаимодействия в классической теории поля // Успехи физических наук. — 1997. — Т. 167, № 4. — С. 377–406. — Англ. пер.: Phys. Usp. 40, 359–386 (1997).

10. A Dynamical Perspective on the  $\phi^4$  Model: Past, Present and Future. Vol. 26 / ed. by P. G. Kevrekidis, J. Cuevas-Maraver. — Cham : Springer, 2019. — (Nonlinear Systems and Complexity).
11. *Khare A., Christov I. C., Saxena A.* Successive Phase Transitions and Kink Solutions in  $\phi^8$ ,  $\phi^{10}$ , and  $\phi^{12}$  Field Theories // *Physical Review E*. — 2014. — Vol. 90, no. 2. — P. 023208. — arXiv: 1402.6766 [nlin.PS].
12. Kink-Antikink Collisions and Multi-Bounce Resonance Windows in Higher-Order Field Theories / I. C. Christov [et al.] // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2021. — Vol. 97. — P. 105748. — arXiv: 2005.00154 [hep-th].
13. *Khare A., Saxena A.* Family of Potentials with Power-Law Kink Tails // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2019. — Vol. 52, no. 36. — P. 365401. — arXiv: 1810.12907 [nlin.PS].
14. *Manton N. S.* Forces between Kinks and Antikinks with Long-Range Tails // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2019. — Vol. 52, no. 6. — P. 065401. — arXiv: 1810.03557 [hep-th].
15. Long-Range Interactions of Kinks / I. C. Christov [et al.] // *Physical Review D*. — 2019. — Vol. 99, no. 1. — P. 016010. — arXiv: 1810.03590 [hep-th].
16. *Goodman R. H., Haberman R.* Kink-Antikink Collisions in the  $\phi^4$  Equation: The  $n$ -Bounce Resonance and the Separatrix Map // *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. — 2005. — Vol. 4, no. 4. — P. 1195–1228.
17. *Belendryasova E., Gani V. A.* Scattering of the  $\phi^8$  Kinks with Power-Law Asymptotics // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2019. — Vol. 67. — P. 414–426. — arXiv: 1708.00403 [hep-th].
18. Kink-Antikink Collisions in the  $\phi^6$  Model / P. Dorey [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2011. — Vol. 107, no. 9. — P. 091602. — arXiv: 1101.5951 [hep-th].
19. *Trefethen L. N.* Spectral Methods in MATLAB. — Philadelphia : Society for Industrial, Applied Mathematics, 2000. — ISBN 9780898714654.