Исследование механизма резонансного обмена энергией в столкновениях солитонов

Студент группы Б22-102: Никифоров А. С.

Научный руководитель, д.ф.-м.н.: Гани В. А.

Москва, 2026

Цели и задачи

Цель работы:

Анализ и объяснение резонансных явлений при столкновении кинков и антикинков в моделях с потенциалами высоких порядков

Задачи:

- изучена структура и свойства уединённого кинка в рассматриваемых моделях;
- сформулирована задача о столкновении кинка и антикинка;
- построены минимизированные начальные условия для численного моделирования;
- выполнено численное решение уравнений движения и определены окна разлёта;
- проведён спектральный анализ колебаний между соударениями для скоростей соответствующих центрам окон многократных столкновений

Актуальность и физические приложения

MEPhI

- Кинк является одним из простейших типов солитонных решений: он представляет собой топологически нетривиальную конфигурацию поля, соединяющую различные вакуумные состояния модели. На ранних этапах эволюции Вселенной скалярные поля могли находиться в состоянии, при котором их среднее значение ещё не релаксировало в один из возможных вакуумов. В результате спонтанного нарушения симметрии различные области пространства могли переходить в разные вакуумные состояния, что приводило к образованию разделяющих их доменных стенок

- В современных науках о материалах также повсеместно встречаются доменные структуры и, соответственно, доменные стенки, для описания которых применяются кинковые решения. В качестве примера можно привести мультиферроики. Интересно, что существуют и продуктивные попытки моделировать перемещения доменных границ, привлекая кинковые структуры. В этом случае кинк – это уже деформация линии границы домена в двумерном материале. Перемещение такого кинка вдоль доменной границы приводит к перемещению этой доменной границы в перпендикулярном к ней направлении. Заметим, что, несмотря на дискретность (молекулярная, атомарная структура) систем в физике конденсированного состояния, непрерывные теоретико-полевые модели успешно применяются в этих контекстах.

- Упругая деформация графеновой наноленты — двумерной системы, состоящей из большого числа атомов и имеющей большое число степеней свободы. Численное моделирование показало, что при определённых условиях в такой ленте наблюдаются упругие деформации, удивительным образом близкие по своим свойствам к кинкам и антикинкам теоретико-полевой модели φ^4. В этой статье мы изучаем некоторые свойства кинковых моделей с потенциалами в виде полиномов высоких степеней. Такие модели используются, среди прочего, при описании последовательностей фазовых переходов.

Введение

Лагранжиан, описывающий динамику скалярного поля $\varphi(x)$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - V(\varphi), \quad \mu = 0, 1.$$

Уравнение движения:

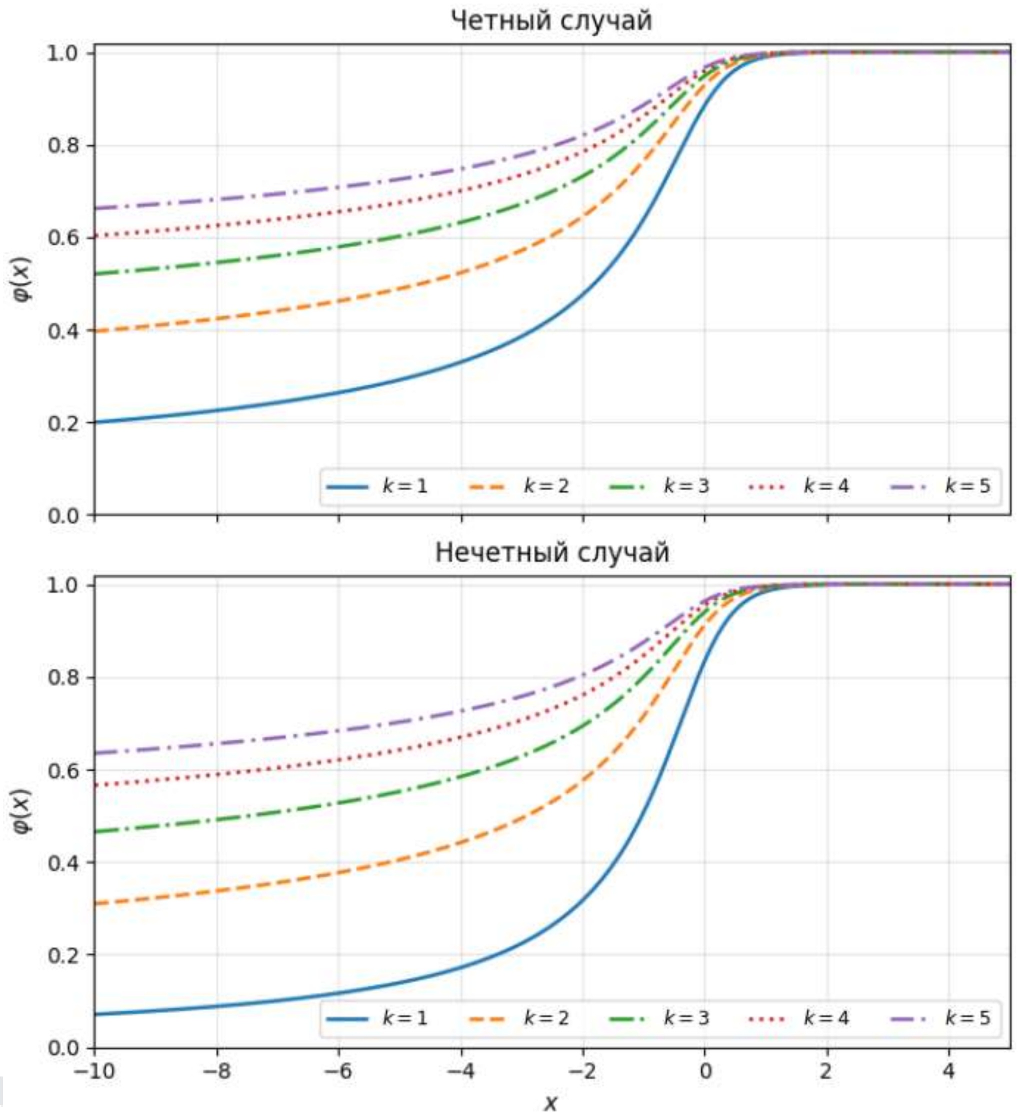
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\varphi} = 0$$

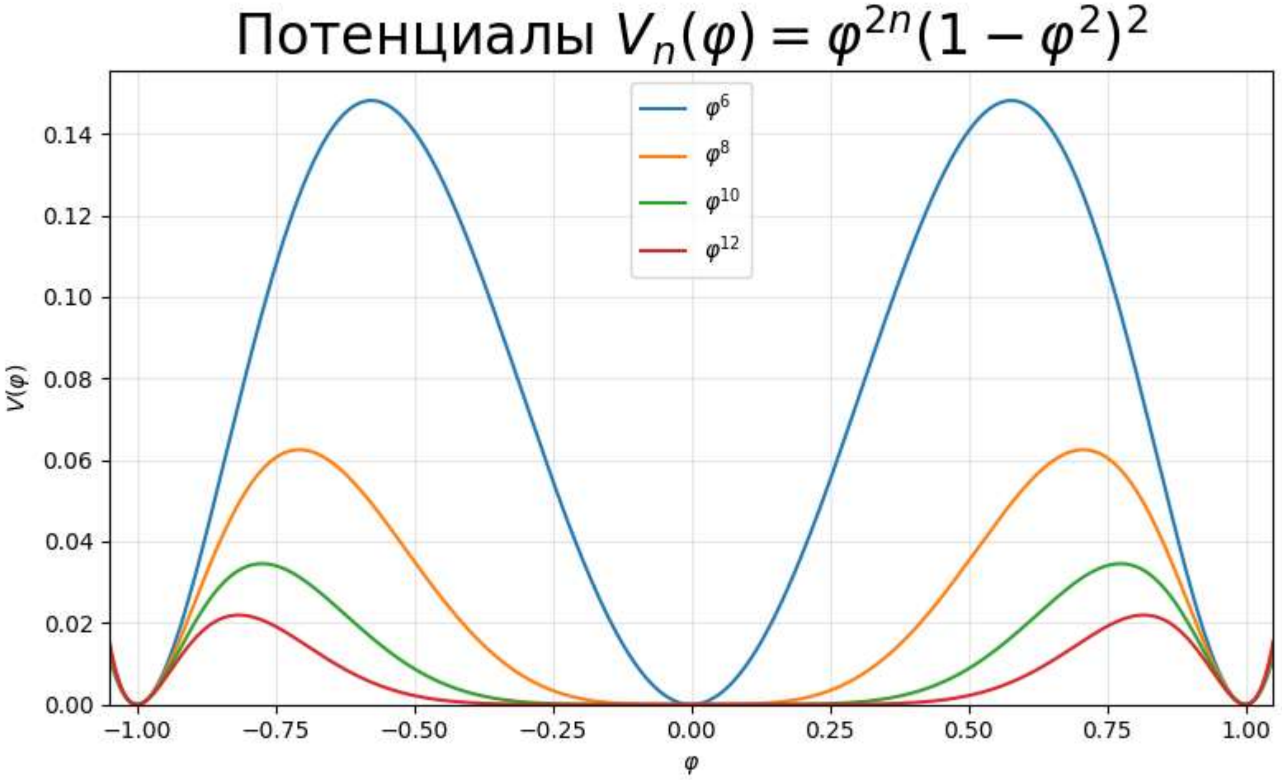
где $V(\varphi) \geq 0$ и имеет два или более минимумов, в которых обращается в ноль.

Кинковое решение соединяет минимумы потенциала $V(\varphi)$ и зависит только от x.

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{dV}{d\varphi} \qquad \varphi_K(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} \varphi_K(x) = \bar{\varphi}_i, \qquad \varphi_K(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} \varphi_K(x) = \bar{\varphi}_j$$

Рассматриваемые модели φ^{2n+4} , n = 2,…,4





Постановка задачи о столкновениях и минимизация начальных данных

Для решения уравнения движения необходимы начальные и граничные условия. В качестве первого приближения используется анзац следующего вида

$$\varphi(x,t) = \left[1 - H(x)\right]\varphi_K(x + x_0 - vt) + H(x)\varphi_{\bar{K}}(x - x_0 + vt)$$

Начальные условия

$$\varphi(x,0) = \left[1 - H(x)\right]\varphi_K(x + x_0) + H(x)\varphi_{\bar{K}}(x - x_0) \qquad \varphi_t(x,0) = -v\left[1 - H(x)\right]\varphi'_K(x + x_0) + vH(x)\varphi'_{\bar{K}}(x - x_0)$$

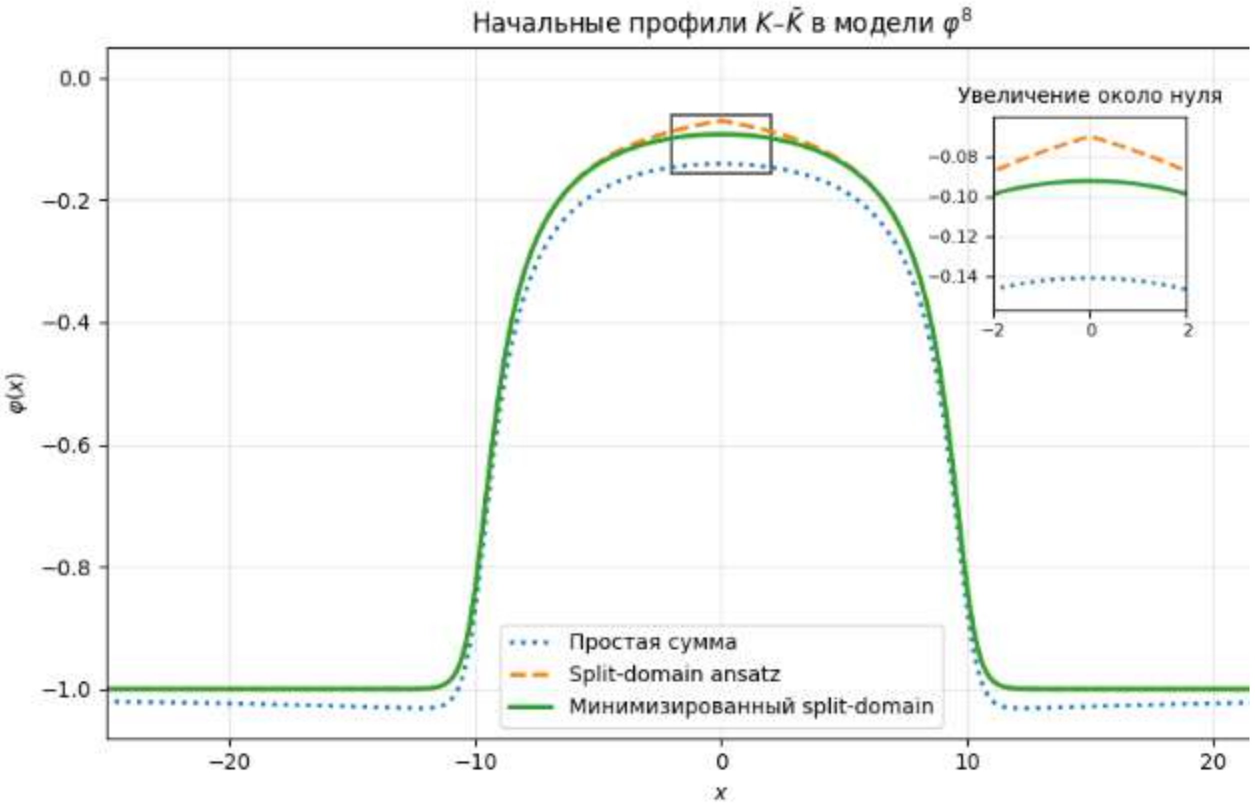
Первая минимизация

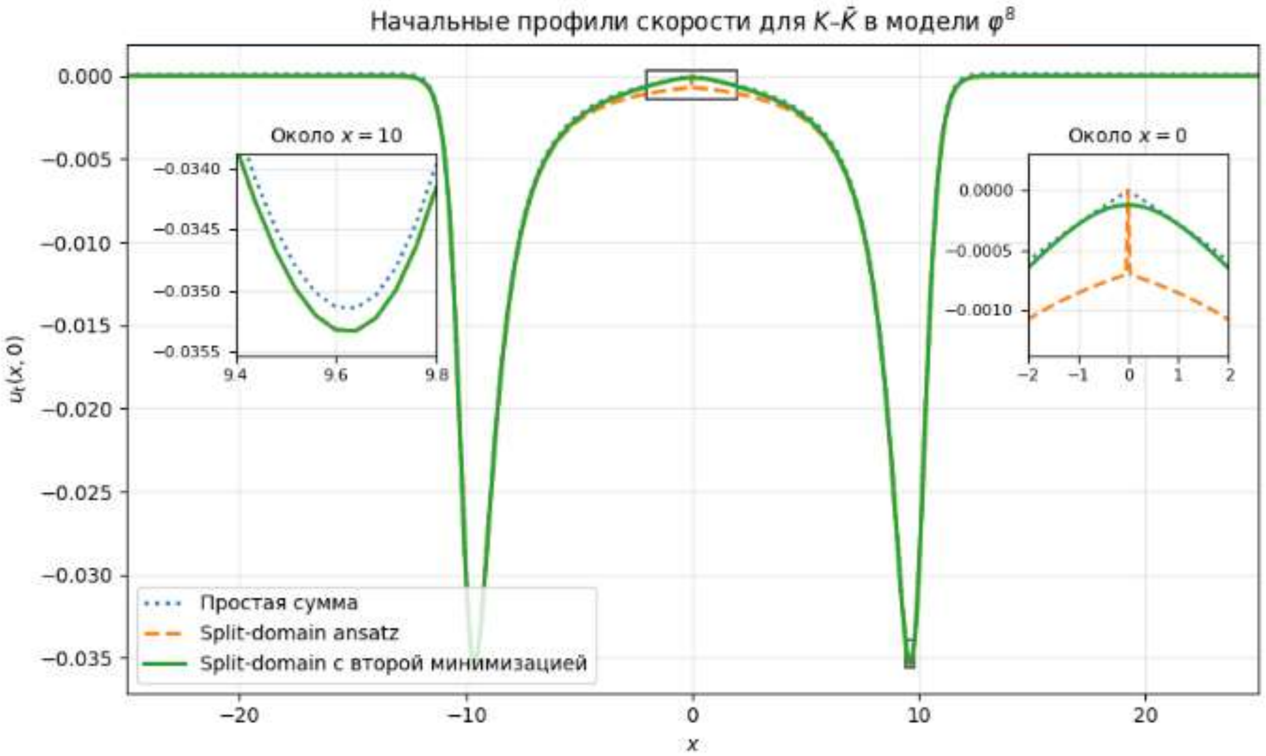
$$I[\varphi] = \left\|(1 - v^2)D_2\varphi - V'(\varphi)\right\|_2^2 + C\left|\varphi(-x_0) - \tilde{\varphi}\right|^2 + C\left|\varphi(x_0) - \tilde{\varphi}\right|^2$$

Вторая минимизация

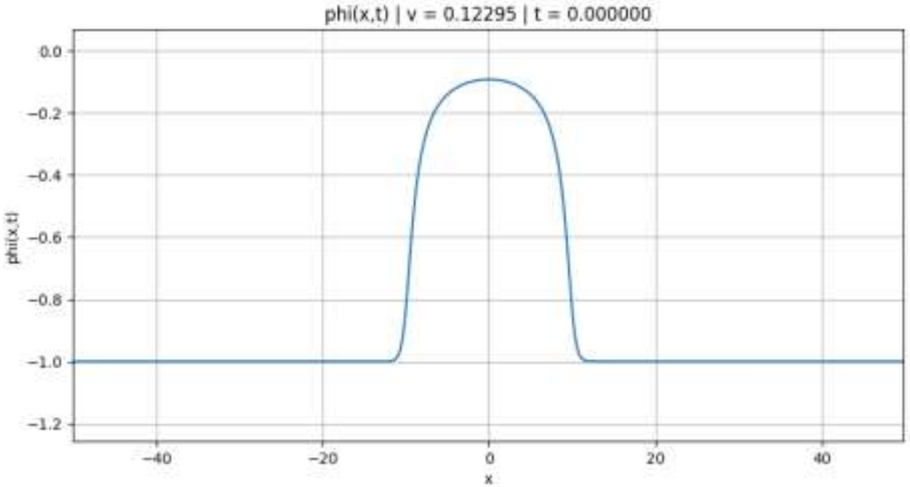
$$J[u] = \|D_t u_t - D_2 u + V'(u)\|_2^2 + C\,\|u_t + v\,u_x\|_2^2 + C\,\|u_t - v\,u_x\|_2^2$$

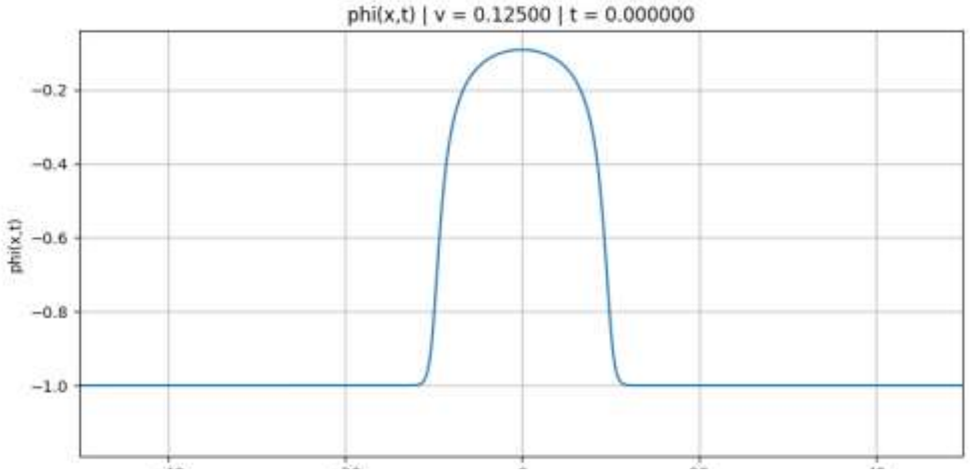
После минимизации

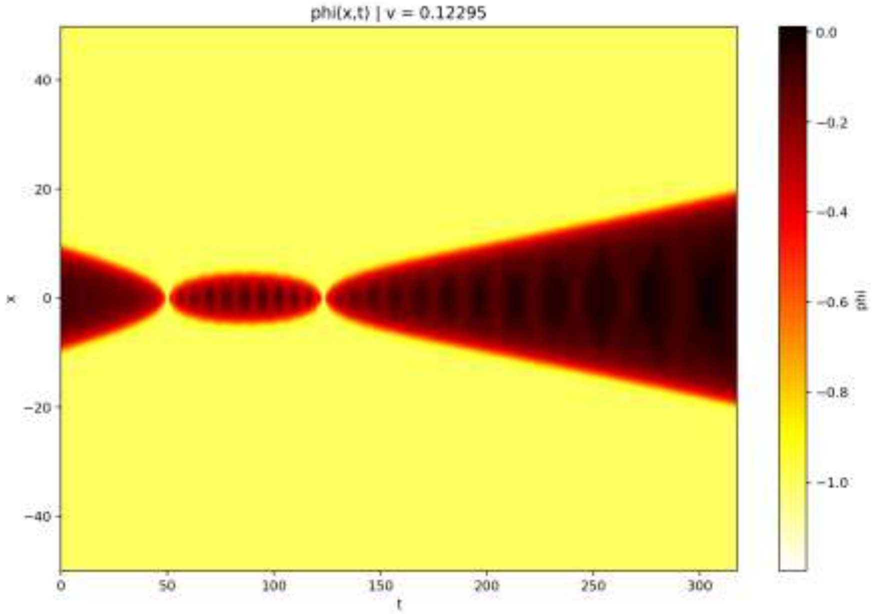


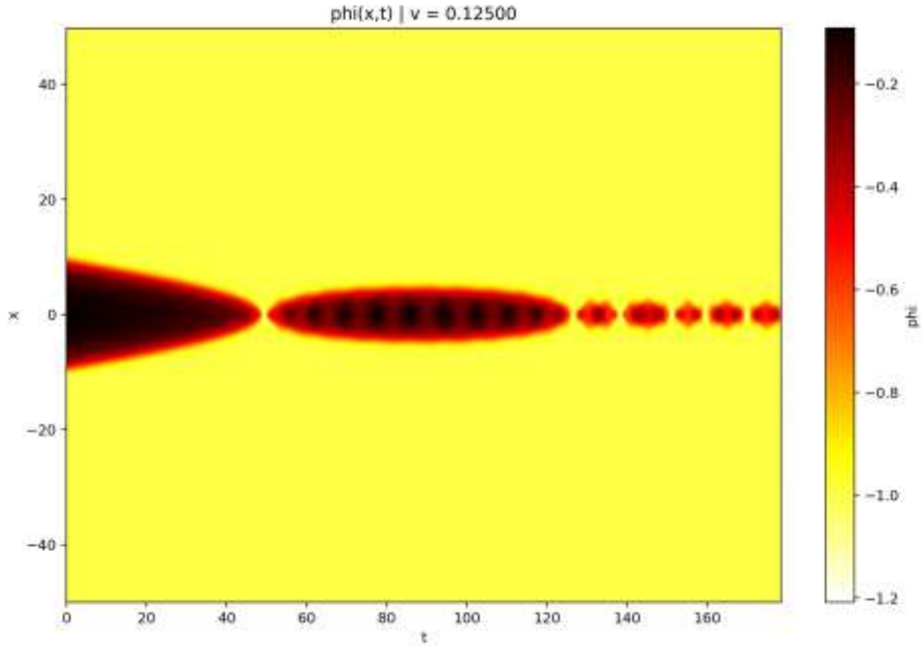


Столкновение кинка и антикинка

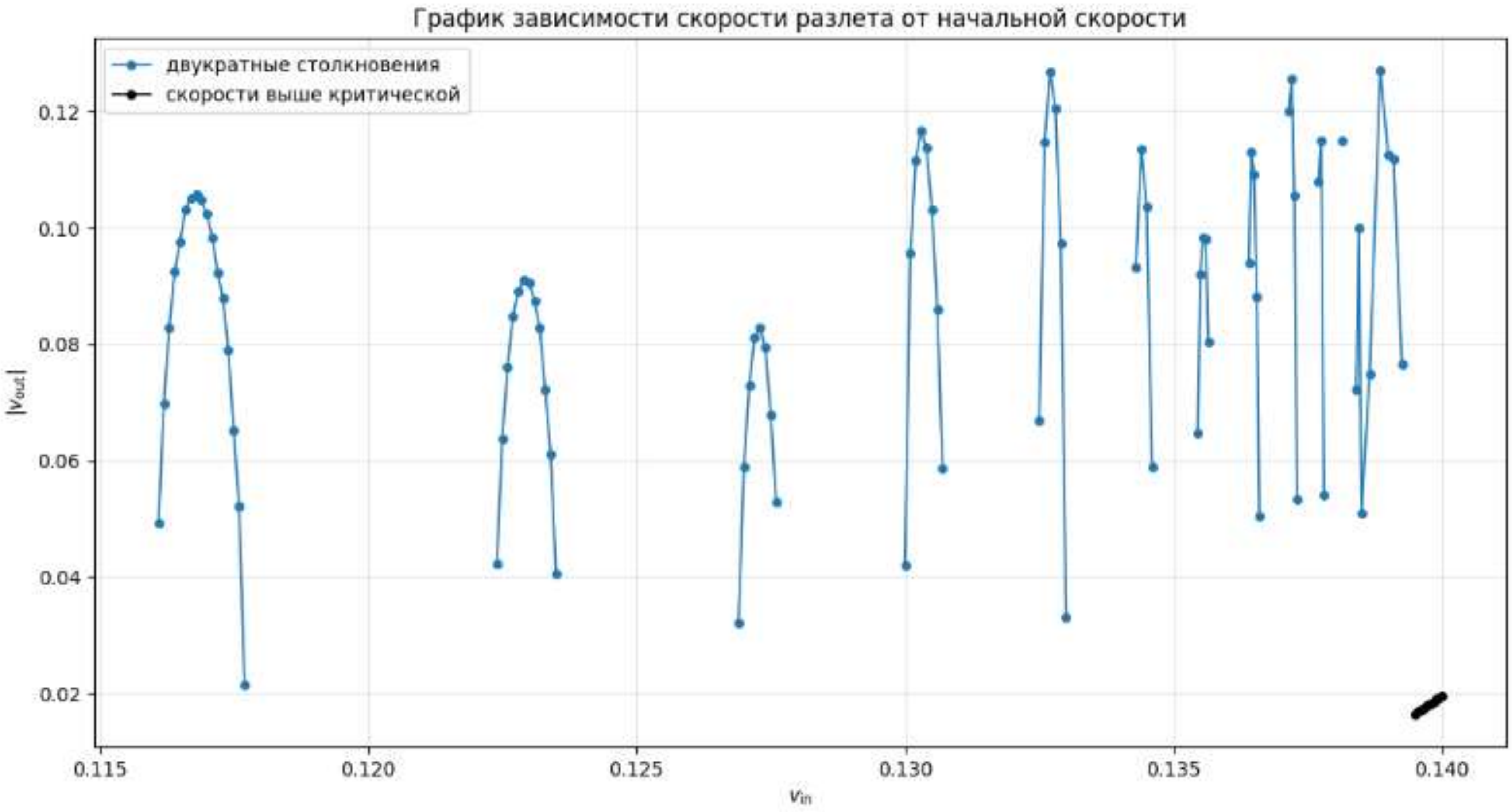








Окна столкновений



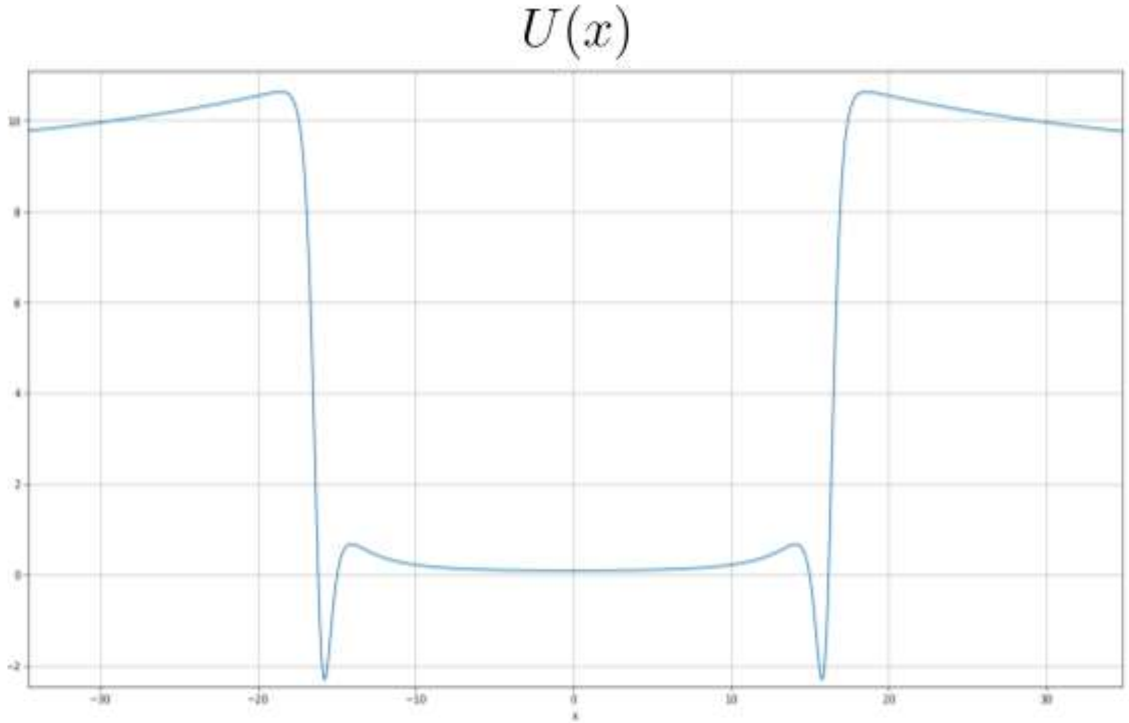
Постановка задачи о малых возбуждениях

Запишем скалярное поле сталкивающихся кинка и антикинка как сумму стационарного решения с малым возмущением:

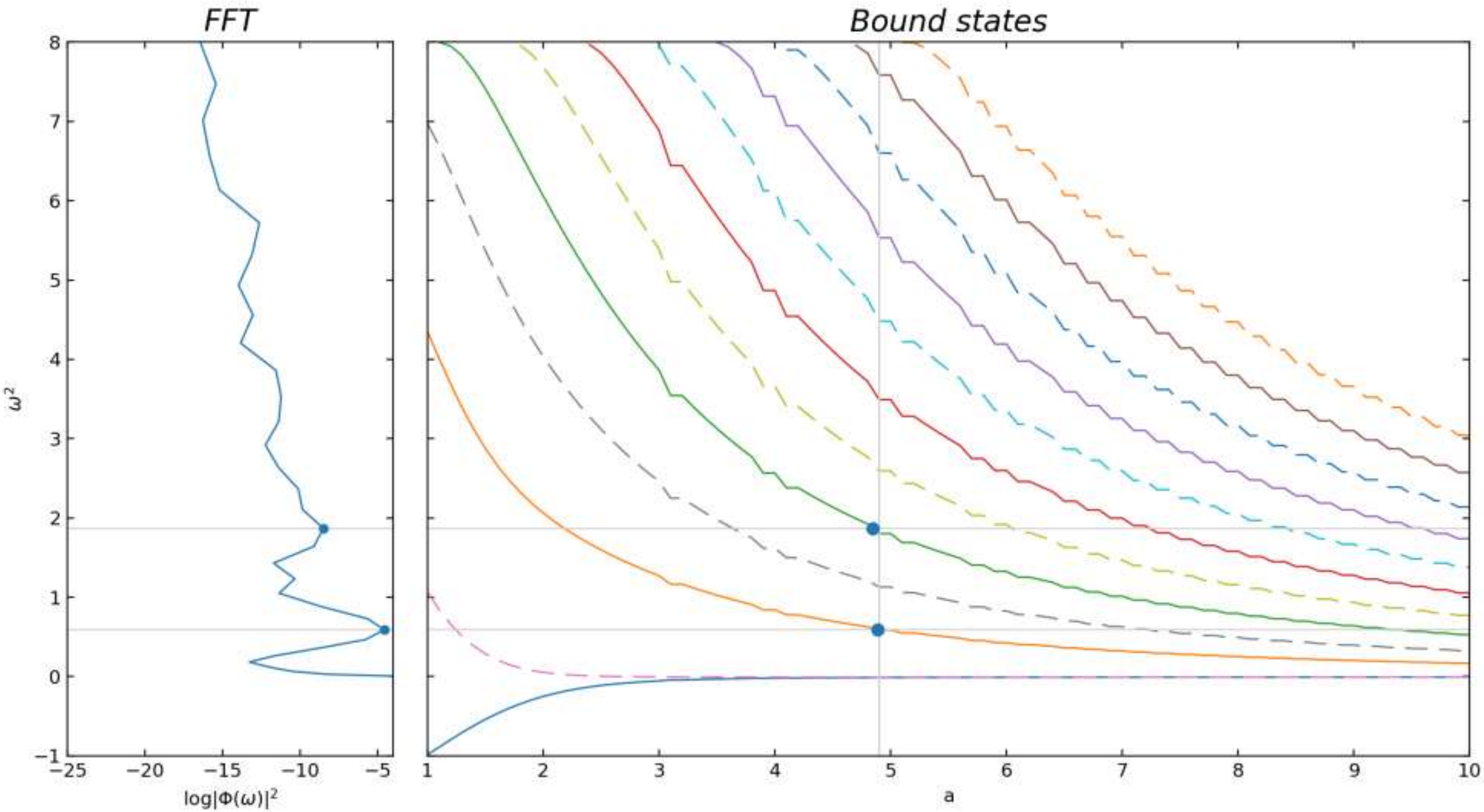
$$\varphi(x,t) = \varphi_{K\bar{K}}(x;a) + \psi(x)\cos(\omega t).$$

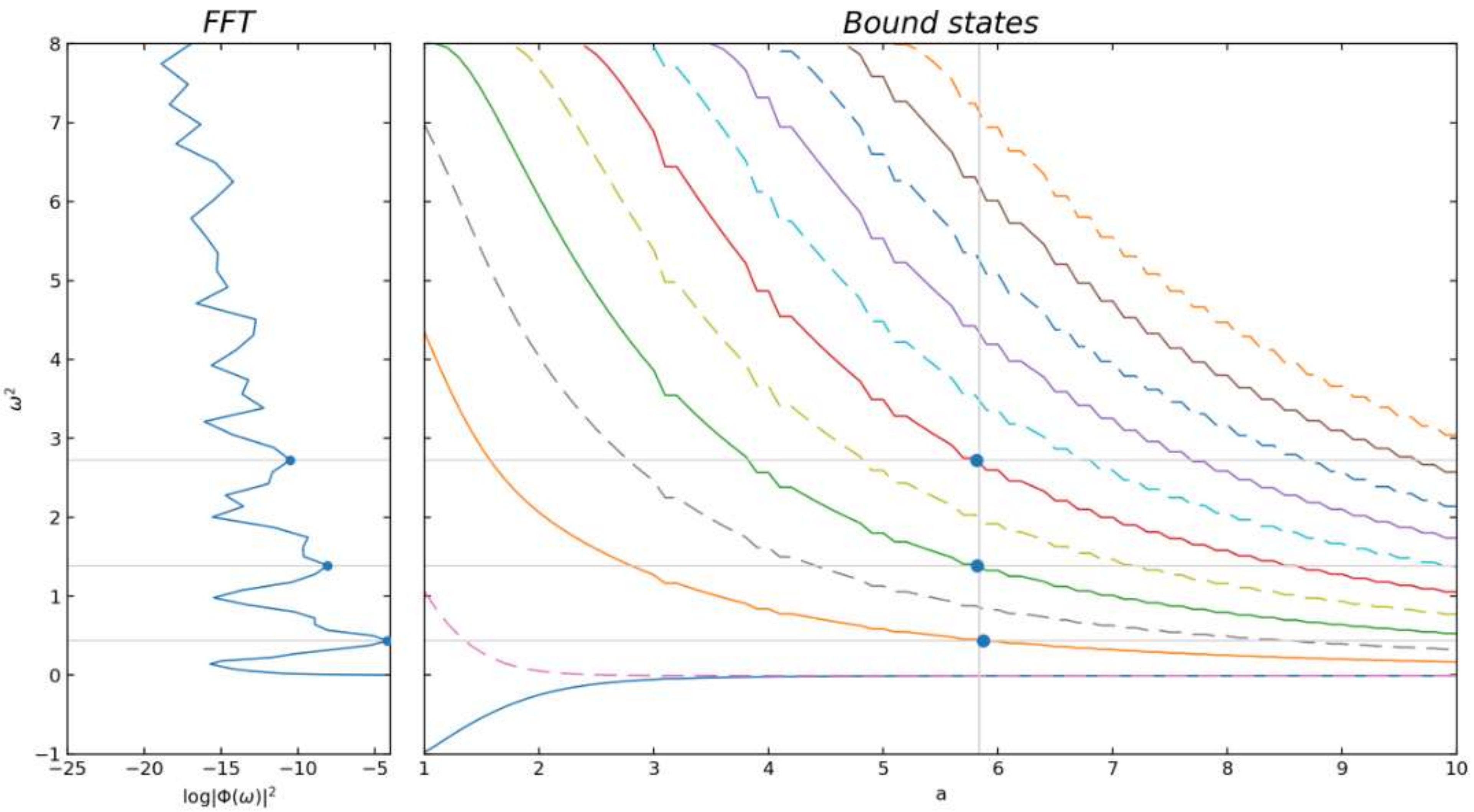
Подставляя это в уравнение движения и после линеаризации получается спектральная задача, аналогичная одномерному уравнению Шрёдингера:

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + U(x;a)\right]\psi(x) = \omega^2\psi(x), \qquad U(x;a) = V''(\varphi_{K\bar{K}}(x;a))$$



Спектральный анализ




FFT
Bound states
ω^2
$\log|\Phi(\omega)|^2$
a
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−25
−20
−15
−10
−5
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Заключение

Рассмотрена задача о столкновениях кинка и антикинка в теоретико-полевой модели φ^8, φ^{10}

- Рассмотрена задача о спектре малых возбуждений
- Получен набор дискретных собственных значений соответствующих локализованным модам ниже порога непрерывного спектра с учетом процедуры минимизации.
- Получена структура окон, найдена критическая скорость
- Проведен спектральный анализ, продемонстрирован переход энергии в колебательные моды после первого столкновения

Полученные результаты позволяют объяснить резонансные явления в модели φ^8, φ^{10}. Помимо этого разработанные методы исследования могут быть в дальнейшем обобщены на другие модели со степенными асимптотиками более высоких порядков.

MEPhI
National Research
Nuclear University

Спасибо за внимание!