

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

УДК 531.3, 539.1.05

На правах рукописи

МУЧКИНОВА БАИНА ЮРЬЕВНА

**ИЗУЧЕНИЕ ЭФФЕКТА ГРАВИТАЦИОННОГО ЛИНЗИРОВАНИЯ НА
КЛАСТЕРЕ ПЕРВИЧНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР**

Направление подготовки 14.04.02 «Ядерная физика и технологии»
Диссертация на соискание степени магистра

Научный руководитель,
д.ф.-м.н., проф.

_____ К. М. Белоцкий

Москва 2026

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА

ИЗУЧЕНИЕ ЭФФЕКТА ГРАВИТАЦИОННОГО ЛИНЗИРОВАНИЯ НА КЛАСТЕРЕ ПЕРВИЧНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР

Студент _____ Б. Ю. Мучкинова

Научный руководитель,
д.ф.-м.н., проф. _____ К. М. Белоцкий

Рецензент,
к.ф.-м.н., доц. _____ И. О. Фамилия

Секретарь ГЭК,
к.ф.-м.н. _____ А. А. Кириллов

Зав. каф. №40,
д.ф.-м.н., проф. _____ М. Д. Скорохватов

Рук. учеб. прог.,
к.ф.-м.н. _____ А. А. Кириллов

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	6
1 Физика формирования ПЧД	8
1.1 Инфляционные усиления флуктуаций	8
1.2 Фазовые переходы и топологические дефекты	8
1.3 Вероятность коллапса и функция масс	9
2 Испарение, аккреция и ограничения на массы ПЧД	12
2.1 Испарение Хокинга и лёгкие ПЧД	12
2.2 Аккреция и СМВ	12
2.3 Микролинзирование и ПЧД субсолнечных масс	13
2.4 Индуцированный фон гравитационных волн (SIGW)	13
2.5 Аккреция вещества на ПЧД	14
3 Эволюция кластеров ПЧД	15
3.1 Распределение Пуассона для флуктуаций	15
3.2 Распределение ПЧД в кластерах	16
3.3 Корреляции в начальной кластеризации ПЧД	17
4 Кинетика кластеров ПЧД	18
4.1 Релаксационное время и масштабные оценки	18
4.2 Гравотермический коллапс и время до сжатия кора	19
4.3 Формирование двойных систем ПЧД	19
4.4 Эволюция двойных систем ПЧД	20
4.5 Эволюция систем ПЧД	20
4.6 Скорость слияния двойных систем ПЧД в кластере	21
5 Слияния ПЧД при эволюции кластера	23
5.1 Ранние космологические пары	23

5.2	Влияние среды на ранние процессы слияния	24
5.3	Поздние двойные системы в кластерах	24
5.4	Характерные времена процессов	25
5.5	Наблюдательные явления каналов	25
6	эволюционная картина слияния ПЧД	27
6.1	Слияние на ранних этапах эволюции	27
6.2	Поздний канал эволюции	28
6.3	Качественная картина эволюции ПЧД	28
7	Предварительные оценки характеристик кластеров ПЧД для их поиска по эффекту микролинзирования	30
7.1	Параметры кластера	30
7.2	Оптическая толщина	31
7.3	Оценка эффективного радиуса $R_{1/2}$	33
7.4	Оценка τ для одного кластера и всего неба с учетом всех кластеров	35
7.5	Прозрачность неба для одиночных ПЧД	36
7.6	Количество звезд, испытавших эффект микролинзирования на одном кластере	37
7.7	Приближенная оценка количества событий линзирования на всех кластерах	39
7.8	Оптическая толщина кластеров ПЧД и фактор перекрытия	39
7.9	Оптическая толщина кластера	39
7.10	Оптическая толщина кластеров	40
7.11	Вероятность двойного события для одного кластера	43
7.12	Возможные особенности линзирования на кластере	45
7.13	Вероятность повторного события на кластере ПЧД	47
7.14	Количество кластеров на фоне БМО	48
7.15	Период между событиями линзирования одной звезды на кластере ПЧД	49
7.16	Период между событиями для одиночных ПЧД	50
8	Байесовский анализ гипотез о распределении первичных черных дыр по данным микролинзирования	51
8.1	Рассматриваемые гипотезы	51

8.2	Профили плотности гало	52
8.3	Дифференциальная скорость событий	53
8.4	Форма распределения по длительности	54
8.5	Учет эффективности детектирования	55
8.6	Байесовская схема сравнения гипотез	55
8.7	Подбор параметра f_{cl} в гипотезе H_3	56
8.8	Апостериорные вероятности	56
8.9	Лучшие параметры гипотезы H_3	57
Заключение		58
Список литературы		60

ВВЕДЕНИЕ

Гипотеза первичных чёрных дыр (ПЧД) была сформулирована в классических работах Зельдовича и Новикова, а также Хокинга [1; 2]. В отличие от чёрных дыр звёздного происхождения, для появления которых требуется предварительная звёздная эволюция и коллапс массивных звёзд, ПЧД могли возникнуть на сверх ранних стадиях космологической истории — сразу после Большого взрыва — в результате коллапса сверхпороговых флуктуаций плотности на горизонте причинной связи. В таком сценарии гравитация локально побеждает космологическое расширение, и область, масса которой сравнима с массой в пределах горизонта Хаббла $M_H \simeq c^3 t / G$, сжимается до образования горизонта событий, то есть чёрной дыры.

Интерес к ПЧД резко возрос после первого детектирования гравитационных волн коллаборацией LIGO/Virgo [3]. По форме сигнала восстанавливаются параметры источников, и оказалось, что часть зарегистрированных событий соответствует слияниям чёрных дыр со звёздными массами порядка $10\text{--}50 M_\odot$. Такая масса и частота событий естественно вписываются не только в астрофизические сценарии, но и в ряд моделей первичного происхождения, согласно которым заметная доля наблюдаемых слившихся пар может состоять из ПЧД [4; 5].

С точки зрения космологии ПЧД занимают особое положение: они одновременно являются (i) потенциальным компонентом скрытой массы (СМ), (ii) носителями информации об условиях и процессах ранней Вселенной на масштабах, недоступных прямым наблюдениям, (iii) источником гравитационно-волновых сигналов. Современные обзоры [6—8] суммируют многочисленные наблюдательные проверки этой гипотезы: микролинзирование звёзд и квазаров, динамические ограничения (устойчивость звёздных систем и галактических структур), ограничения по космическому микроволновому фону (аккреционный нагрев и ионизация в «тёмные века»), а также пределы, связанные с испарением Хокинга для очень малых масс. Совместное действие этих тестов исключает большие области пространства параметров, но оставляет узкие диапазоны по массам и долям

ПЧД, в которых их существование в заметном количестве пока не противоречит данным. В этих окнах ПЧД потенциально могут вносить существенный вклад в плотность СМ и/или воспроизводить часть наблюдаемого темпа слияний.

С теоретической точки зрения первичные чёрные дыры могли формироваться несколькими путями. Наиболее часто рассматриваются три класса сценариев:

(i) Инфляционное усиление маломасштабных неоднородностей. Во время раннего этапа ускоренного расширения (инфляции) на отдельных сверхмалых масштабах могли возникать локальные избыточные плотности, которые впоследствии подвергались гравитационному коллапсу и образовывали чёрные дыры.

(ii) Фазовые переходы ранней Вселенной. По мере остывания и изменения состояния вещества (например, на стадии КХД-перехода, когда свободные кварки и глюоны связывались в протоны и нейтроны) условия для сжатия становились более благоприятными, и часть более плотных областей коллапсировала в чёрные дыры.

(iii) Коллапс топологических дефектов. При возникновении в ранней Вселенной доменных стенок, космических струн или межфазных границ их сжатие, разрыв либо столкновения могли приводить к образованию чёрных дыр.

Общим для всех сценариев остаётся ключевая оценка масштаба массы: $M_{\text{РВН}} \sim M_H(t) \simeq c^3 t / G$, что обеспечивает широкий возможный диапазон масс — от сублунных до звёздных и выше. Важную роль играют также эффекты *критического коллапса*, при которых массы образующихся чёрных дыр распределяются в некотором диапазоне, а не имеют одно фиксированное значение, что усложняет прямое сравнение теории с наблюдениями.

Особый интерес представляет влияние дискретного распределения ПЧД и раннего формирования структур: даже при небольшой их доле случайные (пуассоновские) флуктуации создают дополнительный «шум» в распределении материи, ускоряя образование мини-гало и запуск *кластеризации* ПЧД. Это, в свою очередь, изменяет ход их эволюции и пути образования двойных систем: возрастает роль трёхтельных взаимодействий и гравитационного захвата, тогда как часть «ранних» пар получает возмущения орбиты и реже сливается на поздних этапах. В результате формируется характерная зависимость темпа слияний $R(z)$ от красного смещения, сопоставимая с данными LVK и перспективными измерениями ET/CE/LISA.

1 ФИЗИКА ФОРМИРОВАНИЯ ПЧД

1.1 ИНФЛЯЦИОННЫЕ УСИЛЕНИЯ ФЛУКТУАЦИЙ

Особенности формы инфляционного потенциала (например, наличие плато, изломов или нескольких стадий инфляции) могут усиливать колебания плотности вещества на очень малых масштабах. Это повышает вероятность того, что относительное возмущение плотности $\delta = \delta\rho/\rho$ превысит критическое значение δ_c в момент, когда соответствующая область входит в горизонт на стадии радиационного доминирования [9; 10].

Масса образующейся первичной чёрной дыры определяется временем, когда происходит коллапс:

$$M_{\text{РВН}} \simeq \gamma M_H(t) \simeq \gamma \frac{c^3 t}{G}, \quad \gamma = \mathcal{O}(0.2-1). \quad (1.1)$$

Это означает, что чем раньше после Большого взрыва происходит коллапс, тем меньше масса образующейся чёрной дыры. Для радиационно-доминированной Вселенной критическое значение плотности, при котором возможен коллапс, составляет примерно $\delta_c \sim 0.4-0.5$ в зависимости от формы возмущения [11].

1.2 ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ДЕФЕКТЫ

Во время охлаждения ранней Вселенной происходили последовательные фазовые переходы, аналогичные переходам вещества из одного состояния в другое. Один из наиболее значимых из них — КХД-переход, в ходе которого свободные кварки и глюоны связались в адроны — протоны и нейтроны.

В такие периоды термодинамические свойства плазмы существенно изменялись: эффективное уравнение состояния $p = w\rho$ временно «смягчалось», то

есть параметр w (отношение давления к плотности энергии) уменьшался. Это означало, что давление противодействовало гравитационному сжатию слабее, чем обычно. В результате порог коллапса δ_c , определяющий, при каком контрасте плотности область может схлопнуться в чёрную дыру, снижался. Таким образом, вероятность гравитационного коллапса плотных флуктуаций в эпоху фазовых переходов возрастала, что вело к увеличению доли образующихся первичных чёрных дыр.

Кроме того, фазовые переходы нередко сопровождалось образованием топологических дефектов — доменных стенок, космических струн, пузырей нового фазового состояния или границ между различными вакуумными областями. Их динамика — сжатие, самопересечения и столкновения — может концентрировать энергию в ограниченных областях пространства, создавая условия для возникновения горизонтов событий и, следовательно, образования чёрных дыр [12].

Поскольку такие дефекты возникают и эволюционируют неравномерно, процесс их коллапса может иметь кластерный характер: первичные чёрные дыры формируются не изолированно, а в виде пространственных групп или мини-галло, что закладывает начальную кластеризацию ПЧД уже на самых ранних этапах эволюции Вселенной.

1.3 ВЕРОЯТНОСТЬ КОЛЛАПСА И ФУНКЦИЯ МАСС

Редкие сверхпороговые возмущения плотности при входе в горизонт на стадии радиационного доминирования (РД) коллапсируют в чёрные дыры. Их численность задаётся высокоамплитудным «хвостом» распределения флуктуаций, а характерные массы — моментом, когда горизонт охватывает данное возмущение.

Вероятность коллапса. В гауссовом приближении вероятность того, что сглаженное возмущение на массе M превысит порог δ_c , равна

$$\beta(M) \equiv P(\delta > \delta_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma(M)} \int_{\delta_c}^{\infty} \exp\left[-\frac{\delta^2}{2\sigma^2(M)}\right] d\delta = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left[\frac{\nu(M)}{\sqrt{2}}\right], \quad \nu \equiv \frac{\delta_c}{\sigma(M)}$$

Источник: см. выводы и сводки в [7; 8].

В «хвосте» ($\nu \gg 1$) удобно пользоваться асимптотикой

$$\beta(M) \simeq \frac{\sigma(M)}{\delta_c \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{\delta_c^2}{2\sigma^2(M)} \right]. \quad (1.3)$$

которая наглядно показывает экспоненциальную чувствительность β к отношению δ_c/σ [7; 8].

Дисперсия сглаженных флуктуаций на массе M выражается через спектр плотности $P_\delta(k)$ и функцию $W(kR)$:

$$\sigma^2(M) = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi^2} k^2 P_\delta(k) W^2(kR). \quad (1.4)$$

где выбор W , а также изменение числа состояний релятивистских частиц в ходе расширения заметно влияют на численное значение $\sigma(M)$.

Поскольку ПЧД с момента рождения ведут себя как материя, а фон на РД — как излучение, их относительная доля с ростом a увеличивается. Для узкой по массе популяции

$$\Omega_{\text{РВН}}(M) \simeq \beta(M) \left(\frac{g_{*s,f}}{g_{*s,\text{eq}}} \right)^{-1/3} \left(\frac{\gamma M_{\text{eq}}}{M} \right)^{1/2} \Omega_m, \quad (1.5)$$

$$f_{\text{РВН}}(M) = \frac{\Omega_{\text{РВН}}(M)}{\Omega_{\text{DM}}} \simeq 1.6 \times 10^8 \left(\frac{\gamma}{0.2} \right)^{-1/2} \left(\frac{g_{*s,f}}{106.75} \right)^{-1/3} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-1/2} \beta(M). \quad (1.6)$$

где $M \equiv M_{\text{РВН}}$ — масса первичной чёрной дыры (или характерная масса популяции), γ — доля от массы горизонта при образовании ($\gamma \sim 0.2$), M_{eq} — масса горизонта на равенстве. Таким образом, даже очень малая β на соответствующей массе даёт заметную $f_{\text{РВН}}$ [7; 8].

Даже узкий «пик» по масштабам формирует *расширенную* функцию масс из-за скейлинга критического коллапса [13—16]

$$M = k M_H (\delta - \delta_c)^\gamma, \quad \gamma \simeq 0.36 \text{ (RD)}, \quad (1.7)$$

и неизбежных эволюционных эффектов. Практичной аппроксимацией служит ло-

гнормальная форма [7; 17; 18]

$$\psi_{\text{LN}}(M) \propto \frac{1}{M^2} \exp \left[- \frac{(\log M - \log M_c)^2}{2 \sigma^2} \right]. \quad (1.8)$$

Коллапс идёт после входа моды k в горизонт, и характерная масса следует из $M_H(k) \propto k^{-2}$, так что $M \sim M_H(k) \propto k^{-2}$.

2 ИСПАРЕНИЕ, АККРЕЦИЯ И ОГРАНИЧЕНИЯ НА МАССЫ ПЧД

В этом разделе собраны основные наблюдательные проверки гипотезы ПЧД. Они дополняют друг друга и охватывают широкий диапазон масс: испарение Хокинга ограничивает сверхлёгкие ПЧД; аккреция и СМВ — звёздные массы; микролинзирование и динамика — субсолнечные и околосолнечные массы; индуцированные гравитационные волны (SIGW) связывают усиление первичных флуктуаций с фоном ГВ на частотах PTA/LISA/наземных детекторов.

2.1 ИСПАРЕНИЕ ХОКИНГА И ЛЁГКИЕ ПЧД

Чёрные дыры излучают по механизму Хокинга, и их время жизни резко растёт с массой [8; 19]: $t_{\text{evap}} \propto M^3$. Приравнявая $t_{\text{evap}}(M_*)$ возрасту Вселенной, получают порог $M_* \simeq (3\text{--}7) \times 10^{14} \text{ g}$: более лёгкие ПЧД не «доживают» до сегодняшнего дня. Разброс связан с эффективным числом излучаемых степеней свободы g_{eff} (чем больше доступных частиц, тем быстрее испарение и тем выше M_*). Для $M < M_*$ финальные стадии испарения сопровождаются интенсивным выходом γ -квантов и лёгких частиц, что (i) искажает первичный нуклеосинтез и (ii) даёт избыточный вклад в наблюдаемый гамма-фон. Сравнение с данными по BBN и γ -фону приводит к жёстким верхним пределам на $f_{\text{РВН}}(M)$ и, в совокупности, исключает весь диапазон $M \lesssim 10^{15} \text{ g}$ [7; 8].

2.2 АККРЕЦИЯ И СМВ

В эпоху «тёмных веков» ($z \sim 10^3 \rightarrow 30$), когда звёзды ещё не сформировались, газ может аккрецировать на ПЧД и тем самым вносить энергию в межгалактическую среду. Сравнение предсказанных возмущений с наблюдаемыми картами СМВ даёт верхние пределы на долю ПЧД $f_{\text{РВН}}$ в звездном диапазоне масс

[8]. Жёсткость этих пределов существенно зависит от принятой модели аккреции (см. §2.5): при дисковой (а не сферической) геометрии, более высокой радиационной эффективности и слабой обратной связи (сами излучение и нагрев мешают дальнейшему падению газа (раздувают/ионизуют газ)) предсказанный энерговклад больше; при сферическом притоке, низкой эффективности и сильном feedback — меньше, что в сумме способно сдвигать ограничения на $f_{\text{РВН}}$ вплоть до порядка величины.

2.3 МИКРОЛИНЗИРОВАНИЕ И ПЧД СУБСОЛНЕЧНЫХ МАСС

Поиск кратковременных увеличений блеска из-за гравитационного микролинзирования звёзд/квазаров ограничивает долю компактных объектов в гало. Сильные пределы в диапазоне субсолнечных масс дают наблюдения OGLE/EROS, Kepler и особенно кампания Subaru/HSC по M31 (высокая частота кадрирования) [20; 21]. Важные тонкости: (i) конечный размер источника и его поверхность яркости ослабляют линзирование на малых массах; (ii) расширенная функция масс смягчает точечные ограничения; (iii) распределение скоростей/геометрии меняет ожидаемую длительность событий. В совокупности микролинзирование закрывает значительную часть диапазона $10^{-10} - 10^{-6} M_{\odot}$, но оставляет узкие «окна» при согласованном учёте систематик.

2.4 ИНДУЦИРОВАННЫЙ ФОН ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН (SIGW)

Усиление первичных флуктуаций на малых масштабах, необходимое для рождения ПЧД, неизбежно генерирует фон гравитационных волн второго порядка при входе мод в горизонт на РД. Спектр $\Omega_{\text{GW}}(f)$ имеет пик, частота которого однозначно связана с массой ПЧД, соответствующей масштабам усиления. Для оценок удобно пользоваться порядковой связью

$$f_{\text{peak}} \simeq 3.0 \times 10^{-9} \text{ Hz} \left(\frac{\gamma}{0.2} \right)^{1/2} \left(\frac{g_{*,f}}{106.75} \right)^{-1/12} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-1/2}. \quad (2.1)$$

так что РТА (наногерцы) зондируют $M \sim 10\text{--}10^4 M_\odot$, LISA (мГц) — субсолнечные массы, а наземные детекторы — ещё меньшие [8; 22; 23]. Совместный анализ «ПЧД $\leftrightarrow$ SIGW » связывает амплитуду «бугра» в $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$ с допустимым $f_{\text{РВН}}(M)$ и даёт независимую проверку инфляционных сценариев, предсказывающих ПЧД.

2.5 АККРЕЦИЯ ВЕЩЕСТВА НА ПЧД

Жёсткость пределов СМВ на $f_{\text{РВН}}$ существенно зависит от принятой модели аккреции. Во-первых, важна геометрия притока: при сферической (Bondi–Hoyle) аккреции излучение, как правило, менее эффективно (радиационно неэффективные потоки), тогда как при образовании диска радиационная эффективность и спектральная «жёсткость» выше. Во-вторых, обратная связь (feedback) — локальный нагрев и ионизация газа вокруг ПЧД — способна саморегулировать приток вещества и тем самым снижать реальный энерговклад в межгалактическую среду [24]. В-третьих, на усреднённую скорость притока $\dot{M}$ влияют режим «прерывистой работы» (duty cycle), турбулентность и относительные скорости ПЧД и газа. В совокупности эти факторы приводят к разбросу предсказаний вплоть до порядка величины и, соответственно, к различающимся верхним пределам на $f_{\text{РВН}}$ в звёздном диапазоне масс [8; 25], что подчёркивает важность независимых тестов (микролинзирование, SIGW, GW-популяции) и их совместного анализа.

3 ЭВОЛЮЦИЯ КЛАСТЕРОВ ПЧД

Даже при умеренной доле f_{PBH} дискретная природа ПЧД добавляет к стандартным адиабатическим возмущениям материи k -независимый *пуассоновский* вклад. Физически это проявляется как «зернистость»: число ПЧД в конечном объёме случайно колеблется, из-за чего относительные флуктуации возрастают по мере уменьшения масштаба. На малых масштабах такая пуассоновская составляющая может превосходить адиабатические неровности уже в линейном режиме, быстрее достигая нелинейности и инициируя раннее формирование мини-гало. Тем самым дискретность ПЧД естественно связывает их «рождение» с последующей кластеризацией и повышает эффективность динамического образования двойных систем, влияя на эволюцию темпа слияний $R(z)$ [7; 8; 26].

3.1 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА ДЛЯ ФЛУКТУАЦИЙ

Пусть средняя численность ПЧД равна

$$\bar{n}_{\text{PBH}} = \frac{f_{\text{PBH}} \Omega_{\text{DM}} \rho_{\text{crit}}}{m_{\text{PBH}}} . \quad (3.1)$$

Тогда дискретность ПЧД добавляет к спектру материи k -независимый (пуассоновский) вклад:

$$P_{\text{PBH}}(k) \simeq \bar{n}_{\text{PBH}}^{-1} . \quad (3.2)$$

который при сглаживании топ-хэтом радиуса R даёт дисперсию

$$\sigma_{\text{PBH}}^2(R) \simeq \int \frac{dk}{2\pi^2} k^2 P_{\text{PBH}}(k) W_{\text{TH}}^2(kR) \propto \frac{1}{\bar{n}_{\text{PBH}} R^3} \simeq \frac{1}{N(R)} , \quad (3.3)$$

где $N(R) = \bar{n}_{\text{PBH}} (4\pi/3) R^3$ — среднее число ПЧД в объёме сглаживания. Последнее равенство подчёркивает простой смысл: «зернистость» масштаба определяется обратной численностью $1/N$.

В эпоху доминирования материи линейные возмущения растут как $D(z) \propto a \propto (1+z)^{-1}$. Момент, когда флуктуация на массе M становится нелинейной, удобно оценивать критерием Пресс–Шехтера $D(z) \sigma(M) \simeq \delta_c$ с порогом сферического коллапса $\delta_c \simeq 1.686$. Если на малых массах дисперсия задаётся дискретностью ПЧД (пуассоновский вклад), то $\sigma(M) \simeq N(M)^{-1/2}$, где $N(M)$ — среднее число ПЧД в объёме, соответствующем массе M . Подставляя это в критерий роста и пользуясь нормировкой $D(z) = (1+z_{\text{eq}})/(1+z)$, получаем

$$D(z) \frac{1}{\sqrt{N(M)}} \simeq \delta_c \quad \Rightarrow \quad 1 + z_{\text{coll}}(N) \simeq \frac{1 + z_{\text{eq}}}{\delta_c \sqrt{N}}, \quad (3.4)$$

где z_{eq} — красное смещение равенства материи и излучения, а z_{coll} — оценка красного смещения коллапса. Соответствующая масса гало выражается через число ПЧД как

$$M = N m_{\text{PВН}}, \quad (3.5)$$

где $m_{\text{PВН}}$ — масса одной ПЧД. Из (3.4) следует, что чем меньше N (то есть чем меньше масса гало M), тем раньше оно достигает нелинейности: например, при $N = 10$ получается $z_{\text{coll}} \sim 600$, тогда как при $N = 100$ — $z_{\text{coll}} \sim 200$. Такая тенденция согласуется с численным анализом формирования ранних мини-гало в космологиях с ПЧД [26].

3.2 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЧД В КЛАСТЕРАХ

Первые гало ПЧД формируются с большими контрастами плотности и, как показывают симуляции/оценки, быстро достигают квазистационарных профилей (NFW-подобных) с повышенными концентрациями при тех же массах по сравнению с «стандартными» адиабатическими гало, поскольку формируются в более ранних и плотных условиях. Типичная внутренняя скорость

$$\sigma_v \sim \sqrt{\frac{G M}{r_{\text{vir}}}} \propto (1 + z_{\text{coll}})^{1/2}, \quad (3.6)$$

что при $z_{\text{coll}} \gtrsim 10^2$ даёт σ_v порядка нескольких десятков км с^{-1} уже на ранних этапах, благоприятствуя динамическому образованию двойных систем (см. разд. 5).

3.3 КОРРЕЛЯЦИИ В НАЧАЛЬНОЙ КЛАСТЕРИЗАЦИИ ПЧД

Поскольку на малых масштабах доминирует пуассоновский вклад, обусловленный дискретностью ПЧД, первые мини-гало несут крупные относительные флуктуации по числу объектов: $\sigma_N/N \sim N^{-1/2}$ (где N — среднее число ПЧД в данном объёме). Это приводит к *первичной кластеризации*: одни области оказываются обогащёнными ПЧД, другие — обеднёнными. Такая начальная неоднородность усиливает

- раннее слияние мини-гало и ускоренный рост наиболее плотных узлов;
- образование динамических двойных систем за счёт трёхтельных встреч и гравитационного захвата на ГВ (через рост локальной численной плотности n и снижение дисперсии скоростей σ_v в подструктурах);
- разброс времени коллапса ядер (кóров) в разных гало (см. разд. 4).

В результате распределение ПЧД уже при $z \sim 10^2 - 10^3$ приобретает выраженную кластеризацию, что влечёт важные последствия для каналов слияний и их эволюции с красным смещением [26].

Эти оценки напрямую ведут к разд. 4. Мини-гало с малым числом ПЧД N коллапсируют при более высоких z и быстро переходят в режим двухчастичной релаксации: характерное время $t_r \propto \sigma^3 / (G^2 m \rho \ln \Lambda)$ становится коротким при высокой центральной плотности ρ и умеренной дисперсии скоростей σ (здесь m — масса ПЧД, $\ln \Lambda$ — кулоновский логарифм). Поэтому именно такие системы первыми достигают стадии гравитермического сжатия ядра и формируют *жёсткие двойные системы* (их связующая энергия превышает среднюю кинетическую энергию частиц окружения). Далее эти двойные системы:

- 1) «нагревают» кластер при рассеянии на других объектах и тем самым саморегулируют систему, останавливая дальнейший коллапс;
- 2) обеспечивают *поздний* канал гравитационно-волновых слияний, вклад которого возрастает к малым z ;
- 3) нередко сохраняют заметные эксцентриситеты, потенциально наблюдаемые в части событий (см. разд. 5, 6).

4 КИНЕТИКА КЛАСТЕРОВ ПЧД

Кластеры ПЧД возникают уже на больших z (см. разд. 3) и далее эволюционируют под действием двухчастичной гравитационной релаксации — медленной диффузии энергии и импульса из-за множества слабых гравитационных столкновений. Эта релаксация приводит к гравотермическому сжатию центральной области: ядро уплотняется и в нём *самопроизвольно* формируются жёсткие двойные системы ПЧД — тесные гравитационно связанные пары, чья связующая энергия превышает типичную кинетическую энергию окружающих объектов. Сталкиваясь с одиночными ПЧД, такие пары передают им энергию, «нагревая» кластер и тем самым останавливая дальнейший коллапс (саморегуляция). Одновременно эти двойные системы служат основным источником *позднего* канала гравитационно-волновых слияний, вклад которого возрастает к малым z [27—29].

4.1 РЕЛАКСАЦИОННОЕ ВРЕМЯ И МАСШТАБНЫЕ ОЦЕНКИ

Предположим, что кластер близок к квазиизотермическому состоянию с однородной дисперсией скоростей σ , характерной массовой плотностью ρ и массой частиц m (масса ПЧД). Стандартная оценка времени двухчастичной релаксации имеет вид

$$t_r \simeq \frac{0.34 \sigma^3}{G^2 m \rho \ln \Lambda}, \quad \ln \Lambda \sim \ln \left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}} \right) = \mathcal{O}(10), \quad (4.1)$$

где $b_{\max} \sim r_h$ — полумассовый радиус кластера, а $b_{\min} \sim Gm/\sigma^2$ задаёт характерное минимальное сближение. Из (4.1) следует, что t_r убывает с ростом ρ и m и возрастает с ростом σ . Для ранних мини-гало ПЧД, формирующихся при больших z_{coll} , обычно характерны высокие плотности и умеренные скорости; поэтому t_r оказывается существенно меньше возраста Вселенной t_0 уже при числах частиц

$$N \gtrsim 10^2 - 10^3 \text{ [26; 28]}.$$

4.2 ГРАВОТЕРМИЧЕСКИЙ КОЛЛАПС И ВРЕМЯ ДО СЖАТИЯ КОРА

Двухчастичная релаксация переносит энергию из центральных областей к периферии и в самогравитирующей системе приводит к *гравотермическому сжатию* ядра: центральная плотность возрастает, а коровый радиус уменьшается. Численные расчёты показывают, что характерное время коллапса ядра масштабируется с временем релаксации как

$$t_{\text{cc}} \simeq \xi t_r, \quad \xi \sim 10 \pm 3, \quad (4.2)$$

слабо зависимо от деталей распределения по энергиям и от числа частиц N [27; 28]. Достигнув t_{cc} , ядро неизбежно формирует *жёсткие двойные системы* ПЧД; при рассеянии на одиночных объектах они выделяют энергию (усиливая свою «жёсткость»), что нагревает систему и увеличивает радиус кора, тем самым останавливая дальнейший коллапс.

4.3 ФОРМИРОВАНИЕ ДВОЙНЫХ СИСТЕМ ПЧД

Существует два основных динамических механизма рождения двойных систем ПЧД в кластерах:

(i) Формирование во взаимодействии трех ПЧД. В плотном и «холодном» (с малой дисперсией скоростей) ядре близкая встреча трёх ПЧД может привести к тому, что третье тело уносит избыточную энергию, а оставшиеся двое образуют связанную пару [27; 30]. Для примерно однородного ядра с числовой плотностью $n = \rho/m$, массой частиц m (масса ПЧД) и одномерной дисперсией скоростей σ скорость рождения двойных систем оценивается как

$$\dot{n}_b \simeq C_3 \frac{G^5 m^5}{\sigma^9} n^3, \quad C_3 = \mathcal{O}(1), \quad (4.3)$$

что подчёркивает экстремальную чувствительность к σ : даже небольшое уменьшение σ в фазе сжатия ядра резко увеличивает $\dot{n}_b$.

(ii) Гравитационно-волновой (GW) захват. При тесном пролёте двух ПЧД потери энергии на излучение гравитационных волн могут сразу связать их в сильно эксцентричную двойнуб системк (без участия третьего тела). Этот канал наиболее эффективен в компактных ядрах с высокой центральной плотностью (большой частотой сближений) и умеренно большими относительными скоростями; его вклад возрастает по мере сжатия коровой области [29]. Эволюция таких пар описывается уравнениями Петерса (см. разд. 5).

4.4 ЭВОЛЮЦИЯ ДВОЙНЫХ СИСТЕМ ПЧД

«Мягкая» двойная (связь слабее, чем средняя кинетическая энергия частиц окружения) при многократных гравитационных встречах с одиночными ПЧД теряет энергию и переходит в режим *жёсткой* двойной системы (закон Хегги). Для жёстких пар средняя скорость «укрепления» (сжатия орбиты) описывается квазилинейной зависимостью [27]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{a} \right) = H \frac{G \rho}{\sigma}, \quad H = \mathcal{O}(10-20), \quad (4.4)$$

где a — большая полуось двойной системы, ρ — (локальная) массовая плотность ядра кластера, σ — дисперсия скоростей частиц. При рассеянии часть связующей энергии пары передаётся одиночным объектам, что «нагревает» ядро (увеличивает σ) и тем самым приводит к саморегуляции — остановке дальнейшего сжатия. Когда потери энергии на гравитационные волны начинают доминировать, эволюция орбиты определяется формулами Петерса [31]; для высоких эксцентриситетов время до слияния заметно сокращается.

4.5 ЭВОЛЮЦИЯ СИСТЕМ ПЧД

Частые взаимодействия типа «двойная система—одиночка» и «двойная система—двойная система» приводят к динамическим *выбросам* объектов за пределы кластера (ejection). Такие выбросы уменьшают число тел N и, как правило, снижа-

ют центральную плотность, что удлиняет последующую релаксацию и замедляет внутрикластерное образование новых двойных систем. Если выбрасывается уже сформированная пара, её дальнейшая эволюция (и возможное слияние) происходит вне кластера — в поле хост-гало — формируя «экстракластерный» вклад в событийность. Ретенция продуктов слияния определяется сравнением скорости гравитационного отката с скоростью убегания: при $v_{\text{recoil}} < v_{\text{esc}}$ остаток удерживается и продолжает участвовать в динамике, при $v_{\text{recoil}} \geq v_{\text{esc}}$ — покидает систему [27; 28].

4.6 СКОРОСТЬ СЛИЯНИЯ ДВОЙНЫХ СИСТЕМ ПЧД В КЛАСТЕРЕ

Связь с наблюдаемым темпом слияний строится следующим образом.

(1) Начальные параметры мини-гало ПЧД (масса, число объектов N , профиль плотности) фиксируют динамику ядра: из них следуют ρ , σ и характерное время двухчастичной релаксации t_r (см. разд. 3).

(2) Спустя $t_{\text{cc}} \simeq \xi t_r$ (формула (4.2)) ядро достигает гравотермического сжатия и начинает эффективно формировать жёсткие двойные системы: трёхтелным механизмом (темп $\dot{n}_b$, см. (5.5)) и/или за счёт GW-захвата; далее орбиты упрочняются по закону (4.4). Каждой двойной системе сопоставляется время задержки до слияния t_{merge} , определяемое комбинацией сжатия орбиты и потерь на гравитационные волны (формулы Петерса).

(3) Часть пар сливается *внутри* кластера, часть — *после выброса* (ejection) в поле хост-гало; последний механизм формирует «поздний» вклад, возрастающий к малым z .

Далее выполняется свёртка по популяции кластеров: интегрирование по их массовой функции, разбросу начальных состояний (N, ρ, σ) , временам коллапса ядра t_{cc} , распределениям задержек t_{merge} , а также по выживаемости ранних космологических пар. Такая процедура даёт суммарный темп $R(z)$, в котором рост «позднего» канала компенсирует подавление раннего и приводит к согласованию с наблюдаемым диапазоном LVK $R \sim 20\text{--}50 \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ [29; 32] (см. также разд. 6).

Таким образом, дискретность ПЧД запускает раннее формирование мини-гало с малыми N , в которых из-за высоких ρ и умеренных σ быстро реализуется

двухчастичная релаксация и последующее гравотермическое сжатие ядра. В сжатом ядре *самопроизвольно* формируются жёсткие двойные системы; их рассеяния на одиночных объектах «нагревают» систему и останавливают дальнейший коллапс (саморегуляция), тогда как укрепление орбит описывается квазилинейным законом (4.4). Рождение двойных систем идёт двумя основными путями — трёхчастичными встречами с темпом (5.5), резко чувствительным к σ , и гравитационно-волновым захватом при тесных пролётах; вклад обоих каналов возрастает по мере сжатия ядра. Частые взаимодействия «двойная система—одиночка/двойная система—двойная система» приводят к выбросам и определяют баланс ретенции продуктов слияний (сравнение v_{recoil} с v_{esc}), перераспределяя события между внутрии экстракластерным режимами. В совокупности такая саморегулируемая кинетика естественным образом формирует *поздний* канал слияний ПЧД, вклад которого нарастает к низким z и позволяет согласовать кластерные сценарии с наблюдаемой статистикой GW-событий.

5 СЛИЯНИЯ ПЧД ПРИ ЭВОЛЮЦИИ КЛАСТЕРА

В сценариях с ПЧД двойные системы формируются двумя физически различными путями. *Ранний канал* рождает пары ещё на радиационно-доминированной стадии (РД) за счёт отцепления близких соседей от Хаббловского потока и небольших приливных моментов от третьих тел. *Поздний канал* — динамический: пары возникают уже в кластерах, где двухчастичная релаксация, ядровое сжатие и частые встречи обеспечивают трёхтельное формирование и/или захват на гравитационных волнах. Далее мы кратко суммируем кинематику обоих каналов и отмечаем ключевые наблюдательные явления.

5.1 РАННИЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ ПАРЫ

Ближайшие ПЧД на РД-стадии могут оторваться от расширения, когда их взаимное притяжение превысит Хаббловское растяжение. Небольшой приливной момент от третьего тела задаёт начальную эксцентриситетность $e_0 \lesssim 1$. Эволюция полуоси a и эксцентриситета e дальше определяется излучением ГВ по формулам Петерса [31]:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{c^5 a^3 (1 - e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right), \quad (5.1)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{304}{15} \frac{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{c^5 a^4 (1 - e^2)^{5/2}} e \left(1 + \frac{121}{304} e^2 \right). \quad (5.2)$$

Интегрируя эти уравнения, получают стандартное время до слияния для заданных начальных (a_0, e_0) :

$$t_{\text{merge}}(a_0, e_0) = \frac{5 c^5 a_0^4}{256 G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)} \frac{(1 - e_0^2)^{7/2}}{1 + \frac{73}{24} e_0^2 + \frac{37}{96} e_0^4}. \quad (5.3)$$

При прочих равных, даже небольшая эксцентриситетность резко сокращает t_{merge} . В простейшей модели без возмущений среды (т.е. без последующей кластеризации) итоговый темп слияний масштабируется как [4; 5]

$$R_{\text{early}}(t) \propto f_{\text{PBH}}^{53/37} m^{-32/37} t^{-34/37}, \quad (5.4)$$

где m — характерная масса ПЧД (для узкой функции масс) и t — космическое время.

5.2 ВЛИЯНИЕ СРЕДЫ НА РАННИЕ ПРОЦЕССЫ СЛИЯНИЯ

Реалистично ранние пары эволюционируют не в вакууме: в формирующейся структуре пролёты одиночных ПЧД и третьи тела повышают угловой момент j (уменьшая e при фиксированной энергии), что *увеличивает* время слияния и снижает вклад раннего канала к $z \sim 0$. Это можно учесть через долю «выживших» пар $f_{\text{surv}}(z)$, зависящую от локальной плотности, дисперсии скоростей и истории возмущений (см. напр. оценки в [33]). В практических свёртках по популяции разумно рассматривать $R_{\text{early}}(z) \rightarrow f_{\text{surv}}(z) R_{\text{early}}(z)$, где $f_{\text{surv}}(z)$ монотонно убывает к малым z .

5.3 ПОЗДНИЕ ДВОЙНЫЕ СИСТЕМЫ В КЛАСТЕРАХ

В кластерах, обсуждённых в разд. 4, пары рождаются *динамически* двумя путями.

(i) Формирование во взаимодействии трех ПЧД. При высокой центральной плотности $n = \rho/m$ и умеренной дисперсии скоростей σ близкие встречи трёх объектов приводят к захвату: третье тело уносит энергию, а двое образуют связанную пару. Характерный темп образования двойных систем оценивается как [27; 30]

$$\dot{n}_b \simeq C_3 \frac{G^5 m^5}{\sigma^9} n^3, \quad C_3 = \mathcal{O}(1), \quad (5.5)$$

что подчёркивает крайнюю чувствительность к σ : слабое «остывание» ядра резко увеличивает $\dot{n}_b$.

(ii) Захват за счет испускания гравитационных волн. При тесном пролёте двух ПЧД потери энергии на излучение ГВ сразу переводят их в сильно эксцентричную двойную систему (третье тело не требуется). Эффективность канала растёт с уплотнением ядра: выше частота тесных сближений; характерная эксцентриситетность на старте — велика. Дальнейшее упрочнение орбиты идёт либо за счёт многократных рассеяний (см. закон (4.4) в разд. 4), либо сразу за счёт ГВ-потерь, если перицентр достаточно мал.

5.4 ХАРАКТЕРНЫЕ ВРЕМЕНА ПРОЦЕССОВ

После образования динамической пары её эволюцию удобно описывать в терминах (i) изменения орбиты в среде (hardening), (ii) перехода в режим доминирования ГВ-потерь и (iii) возможных выбросов из кластера («двойная система—одиночка» и «двойная система—двойная система» встречи). Для жёстких пар средняя скорость упрочнения квазилинейна [27] (см. (4.4)); как только выполняется критерий доминирования ГВ, время до слияния вычисляется по (5.3). Выбросы перераспределяют событийность между внутрикластерным и экстракластерным режимами и удлиняют характерные задержки (см. также обсуждение ретенции в разд. 4).

5.5 НАБЛЮДАТЕЛЬНЫЕ ЯВЛЕНИЯ КАНАЛОВ

Ранний и поздний каналы предсказывают различимые популяционные признаки:

- Ранние пары формируются с высоким e_0 , но успевают почти циркуляризоваться к частотам LVK; поздние динамические пары нередко сохраняют остаточный эксцентриситет в детекторной полосе (особенно при GW-захвате).
- Динамические пары ожидаемо имеют изотропные ориентации спинов и орбит (частые встречи «перемешивают» направления), тогда как для «ранних» предпочтительных ориентаций не ожидается, но их эволюционная история короче.
- Динамика в кластерах может давать более широкий разброс $q = m_2/m_1$; ранний канал в узкой функции масс — ближе к $q \simeq 1$.
- В отсутствие среды ранний канал доминировал бы на больших z , однако воз-

мушения подавляют его вклад к $z \sim 0$; поздний канал, напротив, естественно нарастает к малым z (см. сведение в разд. 6).

Совместный учёт обоих каналов позволяет воспроизводить наблюдаемый диапазон темпов $R \sim 20\text{--}50 \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ [32] при умеренных $f_{\text{РВН}}$, согласованных с ограничениями из разд. 2.

6 ЭВОЛЮЦИОННАЯ КАРТИНА СЛИЯНИЯ ПЧД

Определение. Под $R(z)$ будем понимать темп слияний на единицу комовского объёма в системе отсчёта источника (source frame). Наблюдаемый детектором темп получается умножением на элемент объёма dV_c/dz и делением на $(1+z)$; в данном разделе нас интересует именно внутренняя космологическая эволюция источников.

Суммарный темп как сумма каналов. Поскольку двойные системы ПЧД формируются в двух физических каналах (раннем и позднем), естественно представить

$$R(z) = R_{\text{early}}(z) + R_{\text{late}}(z). \quad (6.1)$$

6.1 СЛИЯНИЕ НА РАННИХ ЭТАПАХ ЭВОЛЮЦИИ

В отсутствии внешних возмущений для узкой функции масс справедлива масштабная зависимость (5.4) в космическом времени t [4; 5]. Реалистично ранние пары эволюционируют в формирующейся среде, где пролёты и третьи тела увеличивают их угловой момент и удлиняют время слияния. Это учитывается *фактором выживаемости* $f_{\text{surv}}(M, z)$, зависящим от локальной плотности и дисперсии скоростей (см. оценки в [33]). Для (возможной) расширенной функции масс $\psi(M)$ удобно записать

$$R_{\text{early}}(z) = \int dM \psi(M) f_{\text{surv}}(M, z) \mathcal{R}_{\text{early}}(M, t(z)), \quad (6.2)$$

где $\mathcal{R}_{\text{early}}$ — нормализованная версия (5.4) (с учётом перехода $t \leftrightarrow z$), а f_{surv} монотонно убывает к малым z из-за нарастающих кластерных возмущений.

6.2 ПОЗДНИЙ КАНАЛ ЭВОЛЮЦИИ

В кластерах (разд. 4) двойные системы рождаются трёхтельными встречами и/или GW-захватом, затем упрочняются в среде и переходят в режим доминирования ГВ-потерь. Удобно описывать вклад позднего канала через *ядро задержек* $p_{\text{del}}(\tau | \vartheta)$ — распределение времён от рождения пары до слияния при наборе кластерных параметров $\vartheta = \{\rho, \sigma, N, \dots\}$. Тогда

$$R_{\text{late}}(z) = \int_z^\infty dz_f \frac{dn_{\text{cl}}}{dz_f} \int d\vartheta p(\vartheta | z_f) \int_0^{t(z_f) - t(z)} d\tau \eta_{\text{bin}}(\vartheta, z_f) p_{\text{del}}(\tau | \vartheta) \mathcal{S}_{\text{ej}}(\tau | \vartheta), \quad (6.3)$$

где dn_{cl}/dz_f — скорость «включения» кластеров (или их ядерной стадии) по красному смещению, η_{bin} — эффективность рождения двойных систем (зависит от n, σ , см. (5.5)), а $\mathcal{S}_{\text{ej}}$ учитывает перераспределение событий между внутри экстракластерными режимами из-за выбросов (разд. 4). В простых моделях p_{del} близко к «широкой» функции задержек (например, $\propto \tau^{-1}$ на отрезке от минимального времени *hardening* до времени ГВ-дожигания), что плавно растягивает вклад R_{late} к малым z .

6.3 КАЧЕСТВЕННАЯ КАРТИНА ЭВОЛЮЦИИ ПЧД

Объединяя (6.2) и (6.3), получаем типичную картину:

- при больших z (ранняя космология) доминируют *ранние* пары, однако их вклад убывает к $z \sim 0$ из-за возмущений среды (уменьшается f_{surv});
- по мере накопления и эволюции кластеров растёт *поздний* канал: упрочнение орбит и широкий спектр задержек «подтягивают» события к малым z ;
- суммарная кривая $R(z)$ имеет плавный максимум на $z = \mathcal{O}(1-3)$ и выходит в диапазон LVK $R \sim 20-50 \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ при умеренных f_{PBH} , согласованных с разд. 2 (см. также [32; 34]).

На форму $R(z)$ существенно влияют: (i) доля f_{PBH} и ширина функции масс $\psi(M)$; (ii) кинетические масштабы кластеров (плотность ρ , дисперсия скоростей σ , время коллапса ядра $t_{\text{cc}} \simeq \xi t_r$); (iii) интенсивность выбросов/ретенции, задающая долю экстракластерных слияний и распределение задержек.

Сведение раннего и позднего каналов естественным образом даёт $R(z)$ с

убывающим ранним и нарастающим поздним вкладом. Такая комбинированная эволюция позволяет согласовать сценарии с ПЧД с наблюдаемым диапазоном темпов LVK без нарушения независимых ограничений, а также предсказывает сопутствующие популяционные явления (остаточный эксцентриситет, изотропные ориентации спинов, разброс по q), обсуждённые в разд. 5.

7 ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ХАРАКТЕРИСТИК КЛАСТЕРОВ ПЧД ДЛЯ ИХ ПОИСКА ПО ЭФФЕКТУ МИКРОЛИНЗИРОВАНИЯ

Особенностью настоящей задачи является то, что вероятность эффекта линзирования может рассматриваться как «моментальная», то есть на момент наблюдения, так и на временном интервале. О вероятности в первом случае говорит такая величина, как оптическая толщина. В данной работе выстраивается методика для подсчета второй вероятности, то есть количество событий линзирования за заданный промежуток времени, которое получают наблюдения. Методика оценки нужного результата включает обе вероятности.

При исследовании гравитационных линз часто оказывается достаточным рассмотрение эффекта в приближении тонкой линзы. Это сильно упрощает вычисления, и оправдано тем, что характерные масштабы (расстояние от наблюдателя до источника и линзы) много больше, чем характерный размер линзы (т. е. области, где преимущественно происходит отклонение лучей света).

Кратко обозначим основные характеристики кластеров ПЧД.

7.1 ПАРАМЕТРЫ КЛАСТЕРА

Параметры кластера брались, следуя работе [35]

- $R = 1$ пк – радиус кластера;
- $M = 10^4 M_{\odot}$ – масса кластера;
- $r_0 = 0.1R$ – радиус ядра кластера («кора»);
- профиль плотности кластера ПЧД, который задается следующим соотноше-

нием:

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{8r_0^3}, & 0 < r < r_0 \\ \frac{\rho_0}{(r + r_0)^3}, & r_0 < r < R \end{cases}. \quad (7.1)$$

7.2 ОПТИЧЕСКАЯ ТОЛЩИНА

Событие микролинзирования происходит, когда компактный объект проходит через «трубку» микролинзирования, радиус которой R_E – радиус Хвольсона-Эйнштейна:

$$R_E^2 = \frac{4Gm_{\text{ПВН}}}{c^2} \frac{D_d D_{\text{ds}}}{D_s} = 2r_\odot \frac{D_d D_{\text{ds}}}{D_s} \frac{M_\odot}{m_{\text{ПВН}}}, \quad (7.2)$$

где G – гравитационная постоянная, c – скорость света, $D_s = 50$ кпк – расстояние между фоновым источником (Большое Магелланово Облако) и наблюдателем, D_d – расстояние между линзой (ПЧД) и наблюдателем, которая для простых численных оценок бралась 10 кпк, D_{ds} – расстояние между ПЧД и источником, $r_\odot = 2.95$ км – гравитационный радиус Солнца, $M_\odot$ – масса Солнца.

Оптическую толщину τ можно определить как число ПЧД, которые помещаются в «трубку» микролинзирования радиуса R_E :

$$\tau = \int \pi R_E^2 \frac{\rho(r)}{m_{\text{ПВН}}} dx. \quad (7.3)$$

Интегрирование производится по хорде – лучу зрения, вдоль которой напомним ось x (рисунок 7.1).

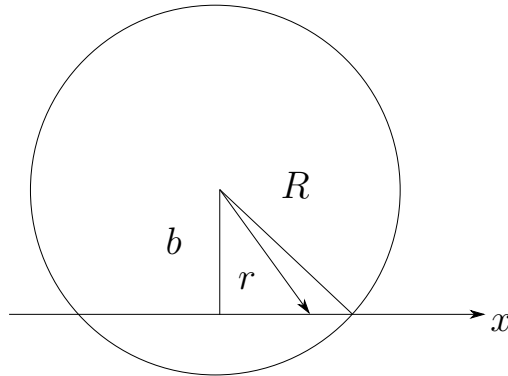


Рисунок 7.1 — Схематичное изображение кластера, b – прицельный параметр, r – расстояние от центра кластера

Результаты расчета оптической толщины приведены на рисунке 7.2.

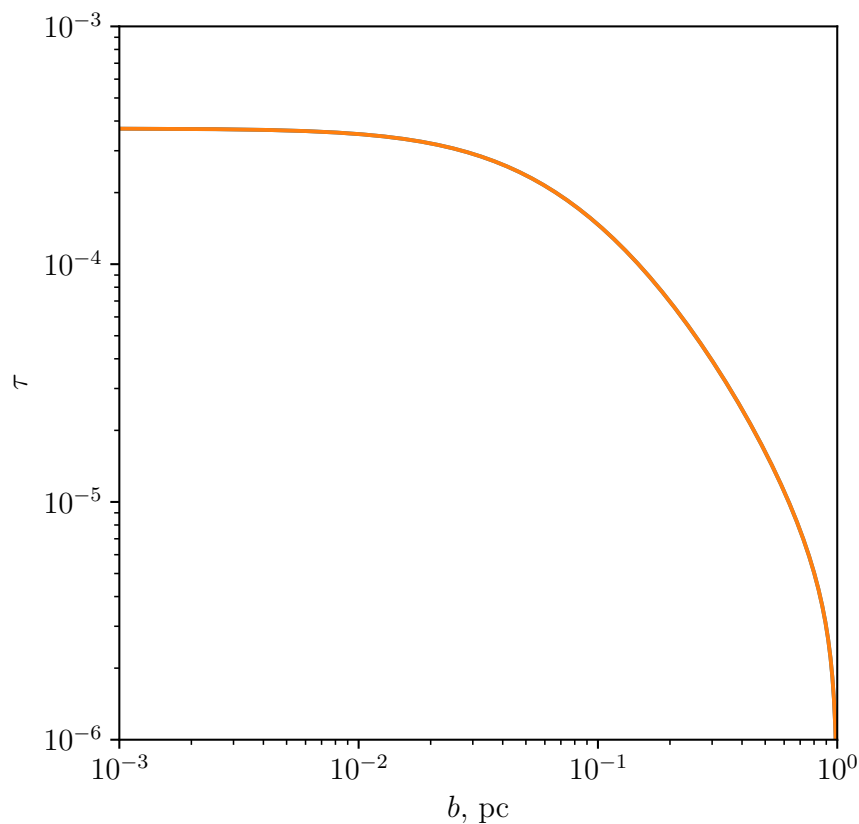


Рисунок 7.2 — Зависимость оптической толщины τ от прицельного параметра b

Также вычислить оптическую толщину можно другим способом, когда линзы распределены по всему объему пространства между наблюдателем и светилом [bookZaharov]. Луч зрения представляет собой конус Хвольсона-Эйнштейна. Тогда оптической толщиной называется часть телесного угла, покрываемого кругами Хвольсона-Эйнштейна. Предположим, что все линзы имеют одинаковую массу $m_{\text{РВН}}$. В тонком слое, находящемся на расстоянии D_d от наблюдателя, толщина которого ΔD_d , можно выбрать такое расстояние R_m , что внутри поверхности площадью πR_m^2 находится в среднем одна линза. Здесь ρ – средняя плотность линз, то есть

$$\rho = m_{\text{РВН}} / (\pi R_m^2 \Delta D_d).$$

Каждой ПЧД соответствует сечение πR_E^2 , где R_E – радиус Хвольсона-Эйнштейна, соответствующий гравитационной ПЧД с массой $m_{\text{РВН}}$. Вклад этого слоя в оптическую толщину задается соотношением:

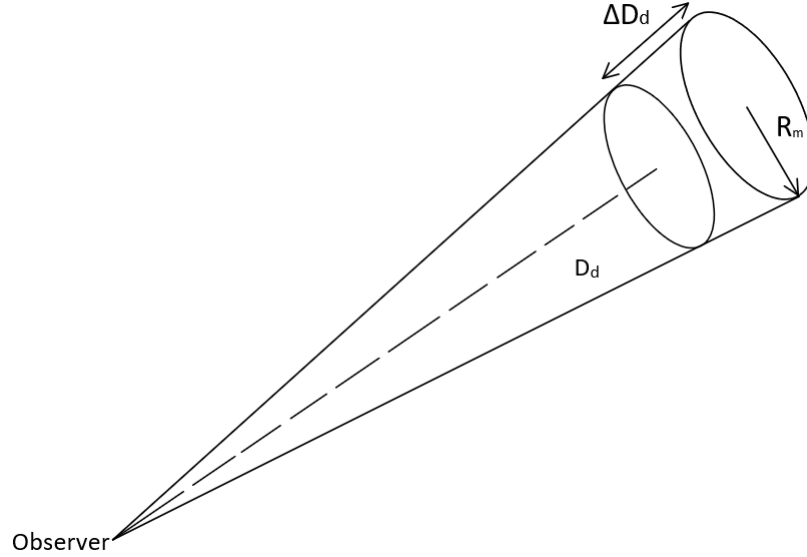


Рисунок 7.3 — Рассматриваемый слой толщиной ΔD_d на расстоянии D_d от наблюдателя, R_m – радиус поверхности, внутри площади которой имеется в среднем одна линза

$$\Delta\tau = \Delta N_{\text{PBH}} \frac{\pi R_E^2}{\pi R_m^2} = \left[\frac{4\pi G \rho D_d (D_s - D_d)}{c^2 D_s} \right] \Delta D_d. \quad (7.4)$$

Тогда общая оптическая толщина, обусловленная влиянием всех ПЧД, находящихся между источником и наблюдателем, может вычисляться как

$$\begin{aligned} \tau &= \sum_{D_d=0}^{D_s} \Delta\tau = \int_0^{D_s} \frac{4\pi G \rho}{c^2} \frac{D_d (D_s - D_d)}{D_s} dD_d = \\ &= \frac{4\pi G}{c^2} D_s^2 \int_0^1 \rho(x) x (1 - x) dx, \end{aligned} \quad (7.5)$$

где $x = D_d/D_s$ – безразмерное расстояние от наблюдателя до ПЧД.

7.3 ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОГО РАДИУСА $R_{1/2}$

Для оценки степени приближения зависимости численных результатов от учета профиля плотности оценим радиус $R_{1/2}$, равный прицельному параметру,

охватывающему вокруг центра кластера половину его массы (рисунок 7.4).

$$\int_V \rho'(r) dV = \frac{N_{\text{PBH}}}{2}, \quad (7.6)$$

где профиль плотности кластера ПЧД, который задается следующим соотношением:

$$\rho'(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{8r_0^3}, & 0 < r < r_0 \\ \frac{\rho_0}{(r + r_0)^3}, & r_0 < r < R, \end{cases} \quad (7.7)$$

$R = 1$ пк – радиус кластера, $r_0 = 0.1R$ – радиус кора, $N_{\text{PBH}} = 10^4$ – количество ПЧД в кластере. Константа ρ_0 вычисляется из соотношения:

$$N_{\text{PBH}} = \int \rho' dV, \quad dV = 4\pi r^2 dr. \quad (7.8)$$

$$\rho_0 = \frac{N_{\text{PBH}}}{\frac{\pi}{6} + 4\pi \left(\ln \frac{R + r_0}{2r_0} + \frac{3r_0^2 + 4Rr_0}{2(R + r_0)^2} - \frac{7}{8} \right)}. \quad (7.9)$$

Проинтегрируем (7.6) в цилиндрической системе координат: $s = \sqrt{y^2 + z^2}$, тогда $dV = 2\pi s ds dx$:

$$\int_0^{r_0} ds \int_{-\sqrt{r_0^2 - s^2}}^{\sqrt{r_0^2 - s^2}} 2\pi s \frac{\rho_0 dx}{8r_0^3} + 2\pi \rho_0 \int_{r_0}^{R_{1/2}} s ds \int_{-\sqrt{R_{1/2}^2 - s^2}}^{\sqrt{R_{1/2}^2 - s^2}} \frac{dx}{(r_0 + \sqrt{s^2 + x^2})^3} = \frac{N_{\text{PBH}}}{2}. \quad (7.10)$$

Решая (7.10), получим, что $R_{1/2} = 0.502R$. То есть половина массы сосредоточена в половине радиуса кластера, эффект профиля плотности дает поправку фактор 2^2 .

$R_{1/2}$ соответствует углу θ_{max} , который вычисляется по формуле:

$$\theta_{\text{max}} = \frac{R_{1/2}}{D_d} = \frac{0.502 \text{ пк}}{10 \text{ кпк}} = 2.88 \cdot 10^{-3} \text{ гр.} \quad (7.11)$$

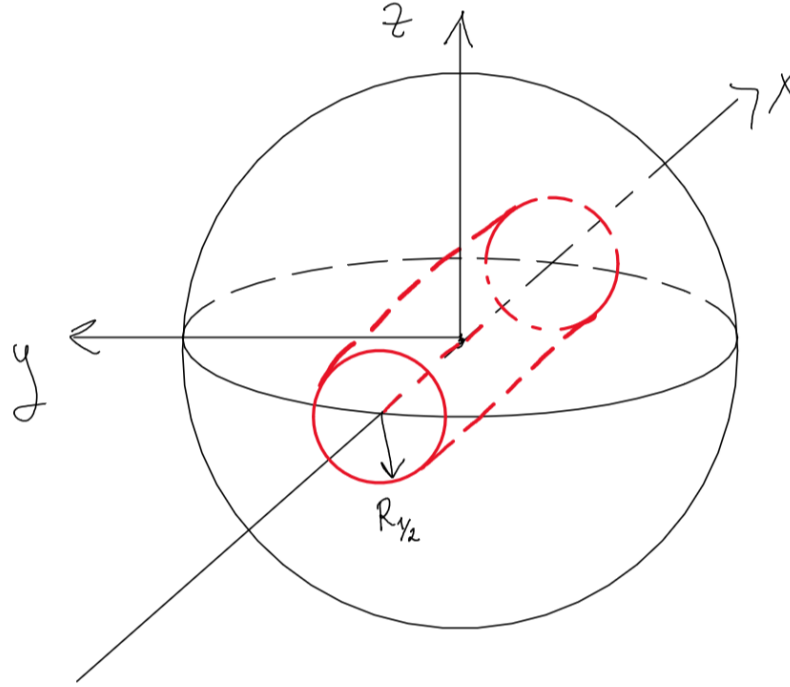


Рисунок 7.4 — Схематичное изображение кластера, вдоль оси x направлен луч зрения

7.4 ОЦЕНКА τ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСТЕРА И ВСЕГО НЕБА С УЧЕТОМ ВСЕХ КЛАСТЕРОВ

Вычислим усредненную оптическую толщину τ_{cl} для кластера ПЧД:

$$\tau_{cl} = \frac{\int_0^{R/D_d} \tau(\tilde{b}) 2\pi \tilde{b} d\tilde{b}}{\pi(R/D_d)^2}, \quad (7.12)$$

где $\tilde{b}$ – прицельный параметр в угловых единицах, $\tilde{b} = \frac{b}{D_d}$.

$$\tau_{cl} = \frac{\int_{-x_1}^{x_1} dx \int_0^{R/D_d} \pi R_E^2 \frac{\rho(\tilde{b})}{m_{PBH}} 2\pi \tilde{b} d\tilde{b}}{\pi(R/D_d)^2} = 1.59 \cdot 10^{-5}, \quad (7.13)$$

где $x_1 = \sqrt{R^2 - b^2}$.

Домножив τ_{cl} на долю неба, покрываемую кластерами ПЧД, получим прозрачность неба $\langle \tau_{cl} \rangle$ для ПЧД, собранных в кластеры на расстоянии D_d :

$$\langle \tau_{\text{cl}} \rangle = \tau_{\text{cl}} N_{\text{cl}} \frac{\pi R^2}{4\pi D_{\text{d}}^2} = \tau_{\text{cl}} \frac{M_{\text{Gal}}}{M} \frac{\pi R^2}{4\pi D_{\text{d}}^2} = 3.98 \cdot 10^{-6}, \quad (7.14)$$

где $N_{\text{cl}} = \frac{M_{\text{Gal}}}{M}$ – количество кластеров ПЧД на небе, считая, что вся скрытая масса сосредоточена в кластерах ПЧД, M_{Gal} – масса Галактики.

7.5 ПРОЗРАЧНОСТЬ НЕБА ДЛЯ ОДИНОЧНЫХ ПЧД

Вычислим прозрачность неба для одиночных ПЧД, собранных на одном расстоянии D_{d} , сравнивая различные приближения оценки этого.

Первый способ: Вычислим прозрачность неба по формуле (7.5)

$$\langle \tau \rangle = \int_0^{D_{\text{s}}} \frac{4\pi G \rho}{c^2} \frac{D_{\text{d}}(D_{\text{s}} - D_{\text{d}})}{D_{\text{s}}} dD_{\text{d}} = \frac{4\pi G}{c^2} D_{\text{s}}^2 \int_0^1 \rho(x) x(1-x) dx, \quad (7.15)$$

где $x = D_{\text{d}}/D_{\text{s}}$ – безразмерное расстояние от наблюдателя до ПЧД.

Поскольку одиночные ПЧД равномерно распределены на поверхности сферы радиуса $D_{\text{d}} = 10$ кпк, то средняя плотность ПЧД задается соотношением:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{M_{\text{Gal}}}{4\pi D_{\text{d}}^2} \delta(D_{\text{d}} - \bar{D}_{\text{d}}) = \frac{M_{\text{Gal}}}{4\pi x^2 D_{\text{s}}^2} \delta\left(D_{\text{s}} \left(x - \frac{\bar{D}_{\text{d}}}{D_{\text{s}}}\right)\right) = \\ &= \frac{M_{\text{Gal}}}{4\pi x^2 D_{\text{s}}^3} \delta(x - \bar{x}), \end{aligned} \quad (7.16)$$

где $\bar{x} = \bar{D}_{\text{d}}/D_{\text{s}}$.

Тогда прозрачность неба для одиночных ПЧД будет задаваться соотношением:

$$\begin{aligned} \langle \tau \rangle &= \frac{4\pi G}{c^2} D_{\text{s}}^2 \frac{M_{\text{Gal}}}{4\pi D_{\text{s}}^3} \int_0^1 \frac{\delta(x - \bar{x}) x(1-x)}{x^2} dx = \frac{GM_{\text{Gal}}}{c^2 D_{\text{s}}} \int_0^1 \delta(x - \bar{x}) \frac{(1-x)}{x} dx = \\ &= \frac{GM_{\text{Gal}}}{c^2 D_{\text{s}}} \cdot 4 = 3.95 \cdot 10^{-6}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Второй способ: Вычислим прозрачность неба по более простой формуле, умножив количество ПЧД на долю неба, покрываемую всеми ПЧД, исходя из сле-

дующей формулы:

$$\langle \tau \rangle = \frac{M_{\text{Gal}}}{m} \frac{\pi R_E^2}{4\pi D_d^2} = \frac{M_{\text{Гал}}}{M_{\odot}} \frac{r_{\odot} D_{\text{ds}}}{2D_s D_d} = 4 \cdot 10^{-6}. \quad (7.18)$$

Видим, что формулы (7.14), (7.17) и (7.18) дают одинаковые результаты. При этом в (7.14) считалось для кластеров, в которых содержатся все ПЧД. Видно, что в среднем прозрачность неба, как и ожидалось, не зависит от того, как сгруппированы ПЧД (не имеет значения, до тех пор пока нет эффекта наложения). Таким образом, проверку подходов в вычислениях можно считать успешной.

7.6 КОЛИЧЕСТВО ЗВЕЗД, ИСПЫТАВШИХ ЭФФЕКТ МИКРОЛИНЗИРОВАНИЯ НА ОДНОМ КЛАСТЕРЕ

Вычислим количество фоновых звезд $\mathcal{N}$, испытавших эффект микролинзирования на одном кластере:

$$\mathcal{N} = \int_0^R \tau(b) n 2\pi b db, \quad (7.19)$$

где n – средняя концентрация фоновых звезд на участке площади, заметаемой кластером ПЧД.

Средняя концентрация фоновых звезд была взята из карты Большого Магелланова Облака (БМО, Large Magellanic Cloud (LMC)), построенной на данных эксперимента МАСНО [36] (рисунок 7.5). По рисунку видно, что $n \approx 80 \frac{\text{звезд}}{\text{ед. пл.}}$. За единицу площади на рисунке 7.5 взята площадь квадрата со стороной, равной диаметру кластера.

Тогда вероятность одной фоновой звезды испытать эффект микролинзирования будет задаваться соотношением:

$$\mathcal{N} = \iint \pi R_E^2 \frac{\rho(r)}{m} n 2\pi b db dx = 1.0 \cdot 10^{-3}. \quad (7.20)$$

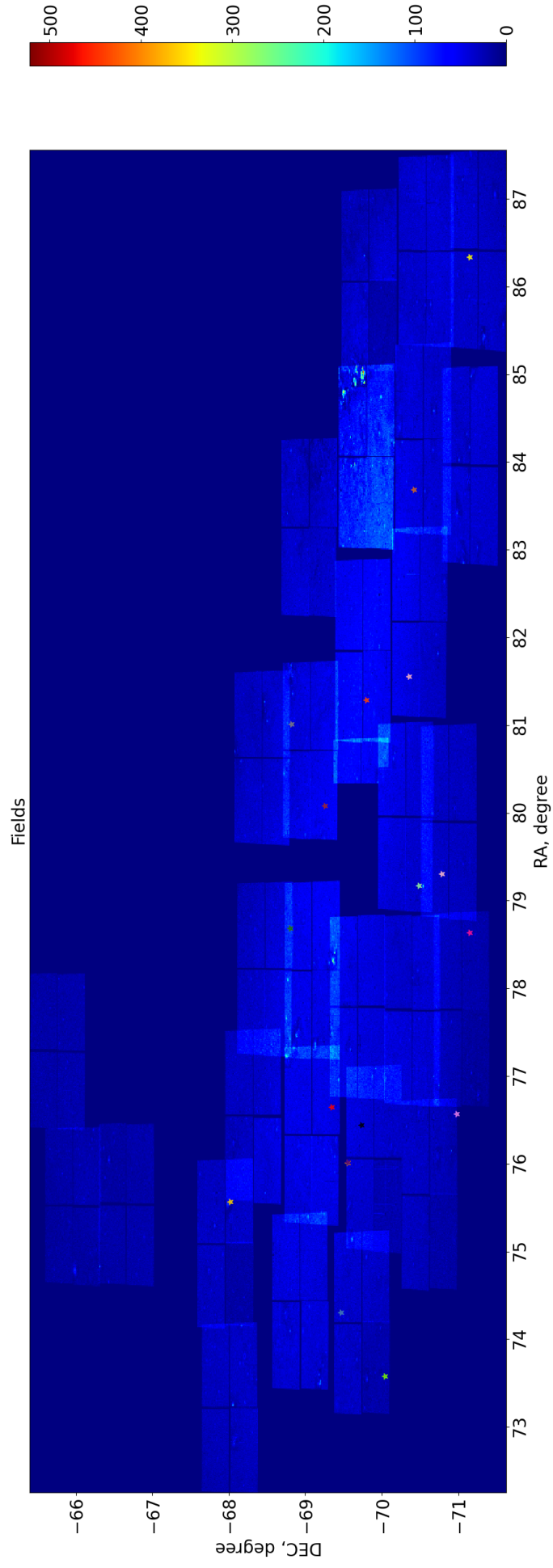


Рисунок 7.5 — Карта Большого Магелланова Облака

7.7 ПРИБЛИЖЕННАЯ ОЦЕНКА КОЛИЧЕСТВА СОБЫТИЙ ЛИНЗИРОВАНИЯ НА ВСЕХ КЛАСТЕРАХ

Считая, что вся скрытая масса сосредоточена в кластерах ПЧД, найдем количество кластеров на небе:

$$N_{\text{cl}} = \frac{M_{\text{Gal}}}{M} = \frac{10^{12} M_{\odot}}{10^4 M_{\odot}} = 10^8. \quad (7.21)$$

Угловые размеры БМО следующие: $10.75^\circ \times 9.17^\circ$. Таким образом, БМО занимает $\frac{S_{\text{LMC}}}{S_{\text{sky}}} = \frac{98.3025}{41252.96125} = 2.38 \cdot 10^{-3}$ долю неба. Тогда количество кластеров на фоне БМО составит

$$N_{\text{cl LMC}} = N_{\text{cl}} \frac{S_{\text{LMC}}}{S_{\text{sky}}} = 2.38 \cdot 10^5. \quad (7.22)$$

Таким образом, количество звезд, попавших в область всех кластеров на фоне БМО и испытывающих эффект микролинзирования равно:

$$\mathcal{N}_{\text{DM}} = \mathcal{N} \cdot N_{\text{cl LMC}} = 2.38 \cdot 10^2. \quad (7.23)$$

7.8 ОПТИЧЕСКАЯ ТОЛЩИНА КЛАСТЕРОВ ПЧД И ФАКТОР ПЕРЕКРЫТИЯ

Оценим, как различные профили распределения кластеров ПЧД в пространстве влияют на оптическую толщину, а также фактор наложения кластеров друг на друга.

7.9 ОПТИЧЕСКАЯ ТОЛЩИНА КЛАСТЕРА

Вычислим τ – оптическую толщину кластера ПЧД.

$$\tau = N_{\text{PBH}} \frac{\pi \theta_{\text{E}}^2}{\pi \theta_{\text{cl}}^2} = \frac{M_{\text{cl}}}{m_{\text{PBH}}} \frac{\theta_{\text{E}}^2}{\left(\frac{R}{D_{\text{d}}}\right)^2} = \frac{M_{\text{cl}}}{m_{\text{PBH}}} \theta_{\text{E}}^2 \left(\frac{D_{\text{d}}}{R}\right)^2 = 1.57 \cdot 10^{-5}, \quad (7.24)$$

где $N_{\text{РВН}}$ – количество ПЧД в кластере, $\theta_E = \frac{R_E}{D_d}$ – угловой радиус Хвольсона-Эйнштейна, $\theta_{cl} = \frac{R}{D_d}$ – угловой радиус кластера.

В формуле (7.12) эта же величина была посчитана с учетом распределения плотности ПЧД внутри кластера. Видно, что ответы совпадают. Таким образом, мы убеждаемся, что расчет оптической толщины в отсутствии экранирования, как и ожидалось, не зависит от пространственного распределения линз внутри кластера, если они на одном расстоянии D_d . То есть все определяется полной массой ПЧД в кластере, что будет дополнительно показано ниже.

7.10 ОПТИЧЕСКАЯ ТОЛЩИНА КЛАСТЕРОВ

Оценим для дополнительной проверки разрабатываемой методики расчета оптическую толщину $\mathcal{T}$ кластеров ПЧД в различных приближениях.

Вычислим оптическую толщину по формуле (7.5):

- 1) Кластеры ПЧД равномерно распределены в объеме сферы радиуса $D_s = 50$ кпк:

$$\mathcal{T} = \int_0^{D_s} \frac{4\pi G \rho}{c^2} \frac{D_d(D_s - D_d)}{D_s} dD_d = \frac{4\pi G \rho}{c^2} D_s^2 \int_0^1 x(1-x) dx, \quad (7.25)$$

где $x = \frac{D_d}{D_s}$ – обезразмеренное расстояние от наблюдателя до ПЧД.

ρ – плотность кластеров ПЧД, заданная следующим соотношением: $\rho = \frac{M_{\text{Gal}}}{\frac{4\pi}{3} D_s^3}$.

Таким образом, оптическая толщина кластеров, равномерно распределенных в объеме сферы радиуса $D_s = 50$ кпк составит:

$$\mathcal{T} = \frac{4\pi G}{c^2} D_s^2 \frac{M_{\text{Gal}}}{\frac{4\pi}{3} D_s^3} \frac{1}{6} = \frac{G M_{\text{Gal}}}{2c^2 D_s} = 4.94 \cdot 10^{-7}. \quad (7.26)$$

- 2) Кластеры ПЧД равномерно распределены на поверхности сферы радиуса

$D_d = 10$ кпк:

$$\mathcal{T} = \int_0^{D_s} \frac{4\pi G \rho}{c^2} \frac{D_d(D_s - D_d)}{D_s} dD_d = \frac{4\pi G}{c^2} D_s^2 \int_0^1 \rho(x) x(1-x) dx, \quad (7.27)$$

где плотность ПЧД задается соотношением:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{M_{\text{Gal}}}{4\pi D_d^2} \delta(D_d - \bar{D}_d) = \frac{M_{\text{Gal}}}{4\pi x^2 D_s^2} \delta\left(D_s \left(x - \frac{\bar{D}_d}{D_s}\right)\right) = \\ &= \frac{M_{\text{Gal}}}{4\pi x^2 D_s^3} \delta(x - \bar{x}), \end{aligned} \quad (7.28)$$

где $\bar{x} = \bar{D}_d/D_s$.

Тогда оптическая толщина кластеров, равномерно распределенных на поверхности сферы радиуса $D_s = 10$ кпк составит:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{4\pi G}{c^2} D_s^2 \frac{M_{\text{Gal}}}{4\pi D_s^3} \int_0^1 \frac{\delta(x - \bar{x}) x(1-x)}{x^2} dx = \\ &= \frac{GM_{\text{Gal}}}{c^2 D_s} \int_0^1 \delta(x - \bar{x}) \frac{(1-x)}{x} dx = \frac{GM_{\text{Gal}}}{c^2 D_s} \cdot 4 = 3.95 \cdot 10^{-6}. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Видим, что этот результат совпадает с формулами (7.14), (7.17) и (7.18), что подтверждает то, что если имеются линзы на одинаковом расстоянии от наблюдателя, неважно, как они распределены по пространству и массе.

- 3) Кластеры ПЧД равномерно распределены в объеме сферы радиуса $D_d = 10$ кпк:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{4\pi G \rho}{c^2} D_s^2 \int_0^1 x(1-x) dx = \frac{4\pi G}{c^2} D_s^2 \frac{M_{\text{Gal}}}{\frac{4\pi}{3} D_d^3} \frac{1}{6} = \frac{GM_{\text{Gal}} D_s^2}{2c^2 D_d^3} = \\ &= 6.18 \cdot 10^{-5}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Можно заметить, что оптическая толщина кластеров (одиночных ПЧД) сильно зависит от их распределения по расстоянию до них. Поэтому важно в этом случае (в отличие от профиля плотности внутри кластера) брать более правильный профиль их распределения в Галактике. В связи с

этим, в дальнейшем, для более точных расчетов будем использовать профиль Наварро-Френка-Уайта.

- 4) Сделаем соответствующую оценку для профиля Наварро-Френка-Уайта [37]:

$$\rho_{\text{NFW}} = \frac{\rho_0}{\frac{R(D_d)}{R_c} \left(1 + \frac{R(D_d)}{R_c}\right)^2}, \quad (7.31)$$

где $\rho_0 = 0.0067 M_\odot \cdot \text{пк}^{-3}$, $R_c = 20$ кпк – параметры распределения, $R = (D^2 + R_0^2 - 2R_0D \cos \alpha \cos \beta)^{1/2}$ – расстояние, отсчитываемое от центра галактики в направлении БМО, D_d – расстояние, отсчитываемое от Земли в направлении БМО, $R_0 = 8.5$ кпк – расстояние от центра галактики до Солнца, $\alpha = -33^\circ$, $\beta = 280^\circ$ – углы в направлении БМО.

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \int_0^{D_s} \frac{4\pi G \rho_{\text{NFW}}}{c^2} \frac{D_d(D_s - D_d)}{D_s} dD_d = \\ &= \frac{4\pi G \rho_0}{c^2 D_s} \int_0^{D_s} \frac{D_d(D_s - D_d) dD_d}{\frac{\sqrt{D_d^2 + 8.5^2 - 2.48 D_d}}{20} \left(1 + \frac{\sqrt{D_d^2 + 8.5^2 - 2.48 D_d}}{20}\right)^2} = \\ &= 0.45 \cdot 10^{-6}. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Поделив (7.32) на (7.24) получим фактор наложения η – долю площади БМО, которую покрывают кластеры ПЧД:

$$\eta = \frac{\mathcal{T}}{\tau} = \frac{0.45 \cdot 10^{-6}}{1.573 \cdot 10^{-5}} = 0.029. \quad (7.33)$$

Фактор наложения можно получить другим способом:

$$\eta = \int_0^{D_s} \Delta\Omega \frac{\rho_{\text{NFW}}(D_d)}{M_{\text{cl}}} D_d^2 \frac{\pi \theta_{\text{cl}}^2}{\Delta\Omega} dD_d, \quad (7.34)$$

где $\Delta\Omega = 0.03$ ср – телесный угол, под которым которым видно БМО с Земли.

Тогда

$$\begin{aligned}
 \eta &= \int_0^{D_s} \Delta\Omega \frac{\rho_{\text{NFW}}(D_d)}{M_{\text{cl}}} D_d^2 \frac{\pi\theta_{\text{cl}}^2}{\Delta\Omega} dD_d = \int_0^{D_s} \frac{\rho_{\text{NFW}}(D_d)}{M_{\text{cl}}} D_d^2 \pi \left(\frac{R}{D_d} \right)^2 dD_d = \\
 &= \frac{\rho_0 \pi R^2}{M_{\text{ckl}}} \int_0^{50} \frac{dx}{\frac{\sqrt{x^2 + 8.5^2 - 2.48x}}{20} \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 + 8.5^2 - 2.48x}}{20} \right)^2} = \\
 &= 0.035. \quad (7.35)
 \end{aligned}$$

Видно, что критерии оценки эффекта наложения (7.33) и (7.34) при выбранных параметрах дают практически одинаковый результат.

7.11 ВЕРОЯТНОСТЬ ДВОЙНОГО СОБЫТИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСТЕРА

Оценим N_1 – вероятность двойного события для одного кластера, считая его плоским диском:

$$N_1 = \frac{l}{\lambda} N_{\text{star}}, \quad (7.36)$$

где $l = vt$ – расстояние которое пройдет фоновая звезда за время $t = 10$ лет, $v = 200$ км/с – ее скорость, $\lambda = (n_\theta \theta_E)^{-1}$ – средняя длина свободного пробега фоновой звезды относительно эффекта линзирования, n_θ – угловая двумерная концентрация ПЧД, N_{star} – количество звезд на фоне одного кластера.

$$N_1 = \frac{l}{\lambda} N_{\text{star}} = n_\theta \theta_E \cdot \frac{vt}{D_d} N_{\text{star}} \sim \frac{\theta_E \theta}{\theta_1^2} N_{\text{star}} = \tau \frac{\theta}{\theta_E} N_{\text{star}}, \quad (7.37)$$

где τ – оптическая толщина кластера, $\theta = \frac{vt}{D_d} = 2.09 \cdot 10^{-7}$, θ_1 – среднее угловое расстояние между ПЧД в кластере, θ_E – угловой радиус Хвольсона-Эйнштейна, который задается соотношением:

$$\theta_E = \frac{R_E}{D_d} = \sqrt{2r_\odot \frac{D_{ds}}{D_d D_s} \frac{m_{\text{PBH}}}{M_\odot}} = 3.97 \cdot 10^{-9} \left(\frac{m_{\text{PBH}}}{M_\odot} \right)^{1/2}. \quad (7.38)$$

Оптическая толщина определена следующим соотношением:

$$\tau = N_{\text{PBH}} \frac{\pi \theta_E^2}{\pi \theta_{\text{cl}}^2} = \frac{M_{\text{cl}}}{m_{\text{PBH}}} \frac{\theta_E^2}{\left(\frac{R}{D_d}\right)^2}, \quad (7.39)$$

где N_{PBH} – количество ПЧД в кластере, $\theta_{\text{cl}} = \frac{R}{D_d}$ – угловой радиус кластера. Таким образом,

$$N_1 = \frac{l}{\lambda} N_{\text{star}} = 8.29 \cdot 10^{-4} \left(\frac{M_{\odot}}{m_{\text{PBH}}} \right)^{1/2} \left(\frac{1 \text{ пк}}{R} \right)^2 \left(\frac{T}{10 \text{ лет}} \right) \left(\frac{N_{\text{star}}}{30} \right). \quad (7.40)$$

Значение N_{star} получено из карты БМО (рисунок 7.5). Для каждого значения радиуса было вычислено свое значение N_{star} .

Был получен график зависимости вероятности двойного события на кластере от его радиуса при различных значениях масс m ПЧД (рисунок 7.6).

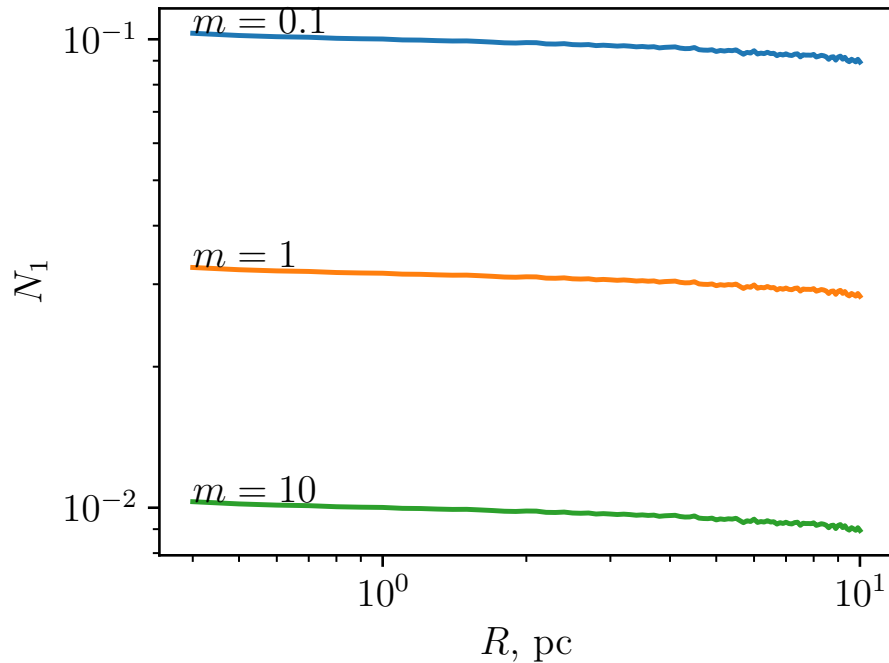


Рисунок 7.6 — График зависимости вероятности двойного события на кластере от его радиуса при различных значениях масс m ПЧД (в солнечных массах)

Исходя из рисунка 7.6, можно сделать вывод, что вероятность двойного события на одном кластере не зависит от его размера, а зависит от массы ПЧД. Также, как видно из (7.39), зависит от количества ПЧД в кластере, что будет еще раз явно показано ниже.

7.12 ВОЗМОЖНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ЛИНЗИРОВАНИЯ НА КЛАСТЕРЕ

Классифицированы возможные проявления кластерной структуры ПЧД в эффекте микролинзирования:

- 1) по форме сигнала, то есть искажению временного профиля сигнала. Однако поскольку предсказать конкретную форму сигнала сложно, поэтому точного ответа нет. Одним из простых факторов, влияющих на форму профиля, является экранировка соседних ПЧД, когда события накладываются друг на друга из-за взаимного влияния соседних ПЧД;
- 2) по временному интервалу между событиями микролинзирования на одной звезде. Так как ПЧД сосредоточены плотно, одна звезда может давать повторные события;
- 3) по угловому и временному интервалам между событиями микролинзирования, события линзирования могут быть одиночными, обычной формы, но они могут быть сгруппированы в пространстве и времени.

Получены численные оценки ослабления ограничения на основе эффекта простого экранирования (на основе работ [38] и [39]) (рисунок 7.7). Под незаэкранированными ПЧД подразумеваем часть ПЧД в кластере, которая лежит в области $\tau < 0.1$, поскольку эффект искажения профиля события проявляется при $\tau \ll 1$ [38]. Учитывая эту долю, можно ослабить ограничения МАСНО, поставленные на плотность ПЧД (рисунок 7.8). Однако стоит отметить, что ослабления ограничений имеют место, когда эффект от кластеризации существенен, что является менее вероятным случаем, поскольку для реализации данного эффекта требуются более экстремальные параметры кластера.

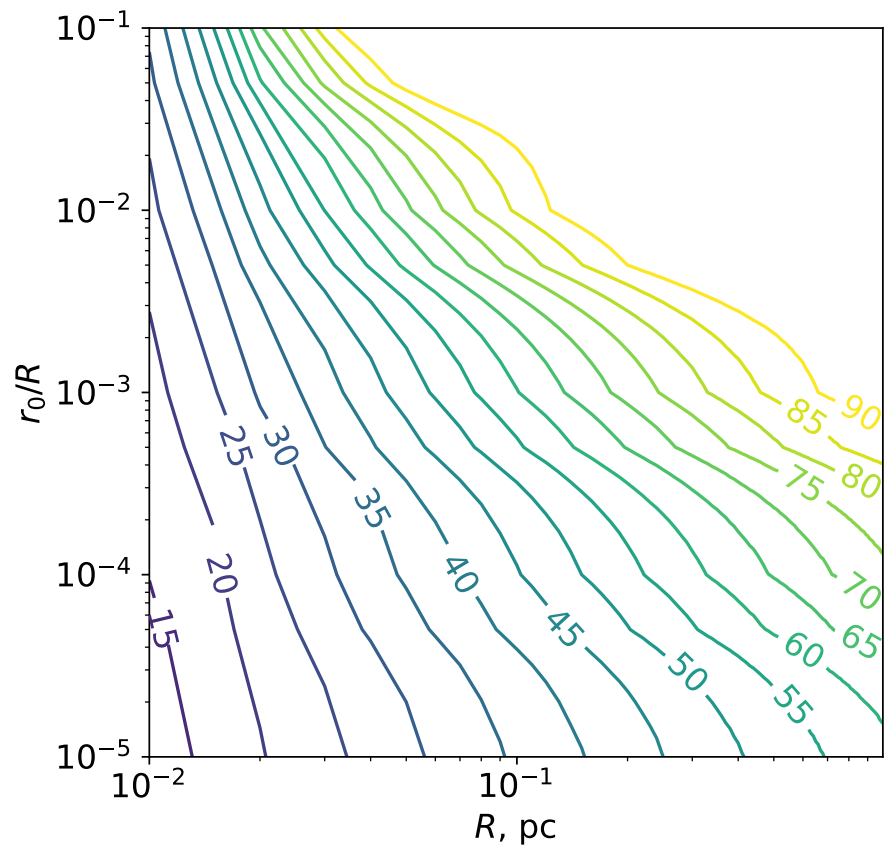


Рисунок 7.7 — Доля незаэкранированных ПЧД, где R — радиус кластера, $\frac{r_0}{R}$ — отношение радиуса кора к радиусу кластера

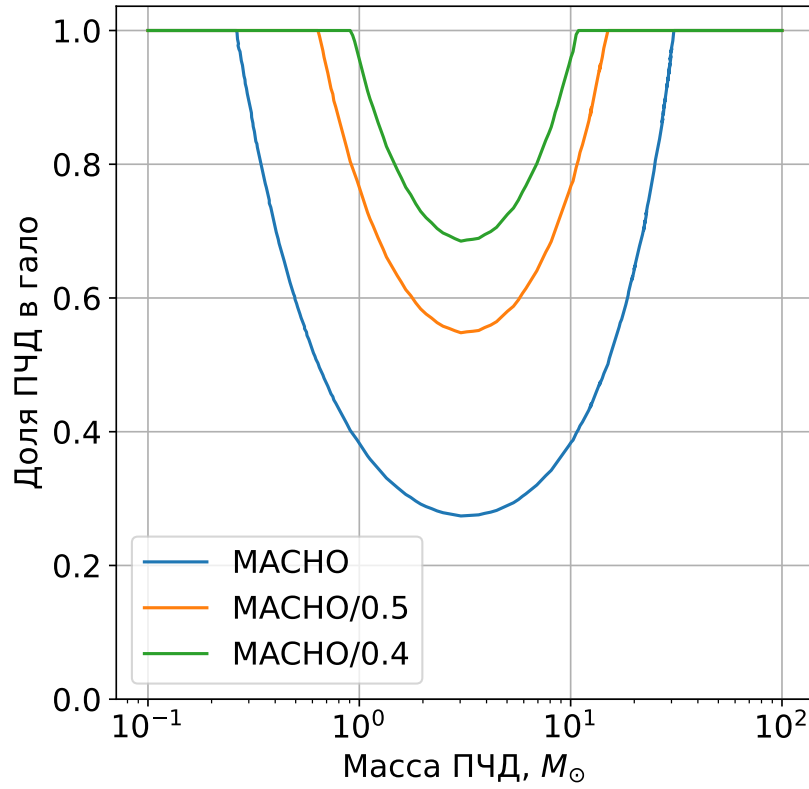


Рисунок 7.8 — Ослабленные ограничения МАСНО

7.13 ВЕРОЯТНОСТЬ ПОВТОРНОГО СОБЫТИЯ НА КЛАСТЕРЕ ПЧД

Предположим, что на кластере ПЧД произошло событие микролинзирования. Посчитаем вероятность повторного события на этом же кластере N'_1

$$\begin{aligned}
 N'_1 &= \int_0^{\theta_{cl}} \frac{l}{\lambda} n_{\text{star}} 2\pi\theta d\theta = l \int_0^{\theta_{cl} \rightarrow \theta_{\max}} n_{\text{PBH}}^\theta \theta_E n_{\text{star}} 2\pi\theta d\theta \cdot \frac{\pi\theta_E^2}{\pi\theta_E^2} = \\
 &= \frac{l}{\pi\theta_E} \int_0^{\theta_{\max}} n_{\text{star}} \tau(\theta) 2\pi\theta d\theta, \quad (7.41)
 \end{aligned}$$

где $\lambda = (n_{\text{PBH}}^\theta \theta_E)^{-1}$ – средняя длина свободного пробега фоновой звезды относительно эффекта линзирования, $\tau = n_{\text{PBH}}^\theta \pi\theta_E^2$ – оптическая толщина кластера, n_{PBH}^θ – угловая концентрация ПЧД.

С другой стороны, вероятность повторного события можно вычислить по следующей формуле:

$$\begin{aligned}
 N'_1 &= \int_0^{\theta_{\max}} \frac{l}{\lambda} n_{\text{star}} 2\pi\theta d\theta = l \int_0^{\theta_{\max}} n_{\text{PBH}}^\theta \theta_E n_{\text{star}} 2\pi\theta d\theta = l\theta_E n_{\text{star}} N_{\text{PBH}} = \\
 &= l\theta_E n_{\text{star}} N_{\text{PBH}} \frac{\pi\theta_E^2}{\pi\theta_E^2} \frac{\pi\theta_{\text{cl}}^2}{\pi\theta_{\text{cl}}^2} = l\theta_E \frac{\tau N_{\text{star}}}{\pi\theta_E^2} = \tau \frac{l}{\pi\theta_E} N_{\text{star}}. \quad (7.42)
 \end{aligned}$$

Видно, что формула (7.42) с точностью до π совпадает с формулой (7.37). Так же можно отметить, что полученная формула (7.42) не чувствительна к профилю распределения ПЧД в кластере, поскольку размеры кластера малы.

7.14 КОЛИЧЕСТВО КЛАСТЕРОВ НА ФОНЕ БМО

Проведем оценку числа кластеров ПЧД, попадающих в объем выделяемый телесным углом, под которым наблюдается БМО с Земли:

$$N = \int_0^{D_s} \Delta\Omega \frac{\rho_{\text{NFW}}(D_d)}{M_{\text{cl}}} D_d^2 dD_d, \quad (7.43)$$

где $\Delta\Omega$ – телесный угол, под которым видно БМО с Земли, $D_s = 50$ кпк – расстояние до БМО от Земли, $M_{\text{cl}} = 10^4 M_\odot$ – масса кластера.

Угловые размеры БМО составляют $10.75^\circ \times 9.17^\circ$. Тогда

$$\Delta\Omega = 10.75^\circ \cdot 9.17^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ} \right)^2 = 0.03 \text{ ср}. \quad (7.44)$$

Таким образом, количество кластера, попадающий в телесный угол БМО, определяется соотношением:

$$\begin{aligned}
 N &= \Delta\Omega \frac{\rho_0}{M_{\text{cl}}} \int_0^{D_s} \frac{D_d^2 dD_d}{\frac{\sqrt{D_d^2 + 8.5^2 - 2.48D_d}}{20} \left(1 + \frac{\sqrt{D_d^2 + 8.5^2 - 2.48D_d}}{20} \right)^2} = \\
 &= 7.8 \cdot 10^4. \quad (7.45)
 \end{aligned}$$

7.15 ПЕРИОД МЕЖДУ СОБЫТИЯМИ ЛИНЗИРОВАНИЯ ОДНОЙ ЗВЕЗДЫ НА КЛАСТЕРЕ ПЧД

Вычислим T – период между событиями линзирования одной звезды на кластере ПЧД несколькими способами для проверки.

Первый способ:

$$T_1 = \frac{\theta_E D_d}{\tau v}, \quad (7.46)$$

где $\tau = n_{\text{РВН}}^\theta \pi \theta_E^2$ – оптическая толщина кластера, v – линейная скорость звезды.

Второй способ:

$$T_2 = \frac{1}{n_{\text{РВН}} \theta_E \omega}, \quad (7.47)$$

где $\omega = \frac{v}{D_d}$ – угловая скорость звезды, $n_{\text{РВН}} = \frac{N_{\text{РВН}}}{\pi \theta_{\text{cl}}^2}$ – угловая концентрация

ПЧД, $\theta_{\text{cl}} = \frac{R}{D_d}$ – угловой размер кластера.

Сравним формулы (7.46) и (7.47)

$$T_1 = \frac{\theta_E D}{\tau v} = \frac{\theta_E}{\tau \omega} = \frac{\theta_E}{n_{\text{РВН}} \pi \theta_E^2 \omega} = \frac{1}{n_{\text{РВН}} \pi \theta_E \omega} = \frac{T_2}{\pi}. \quad (7.48)$$

Видно, что формулы формулы (7.46) и (7.47) совпадают с точностью до π .

Вычислим период первым способом:

$$T_1 = \frac{\theta_E D_d}{\tau v} = \frac{\theta_E D_d}{N_{\text{РВН}} \frac{\pi \theta_E^2}{\pi \theta_{\text{кл}}^2} v} = \frac{R^2}{N_{\text{РВН}} \theta_E D_d v} = 1.19 \cdot 10^4 \text{ лет}. \quad (7.49)$$

Найдем средний период между событиями линзирования с учетом всех кластеров на фоне БМО:

$$\langle T_1 \rangle = \frac{T_1}{N} = \frac{1.19 \cdot 10^4 \text{ лет}}{7.8 \cdot 10^4} = 0.15 \text{ лет}. \quad (7.50)$$

Период, вычисленный вторым способом, будет в π раз больше:

$$T_2 = \pi T_1 = 3.74 \cdot 10^4 \text{ лет}. \quad (7.51)$$

Тогда и средний период между событиями линзирования с учетом всех кластеров на фоне БМО, посчитанный вторым способом будет в π раз больше:

$$\langle T_2 \rangle = \pi \langle T_1 \rangle = 0.48 \text{ лет.} \quad (7.52)$$

Обратимся к наблюдательным данным: наблюдалось одно двойное событие с временным интервалом 85 – 90 дней с угловым разрешением, которое в среднем включает один кластер [39]. Тогда вероятность такого события при условии, что кластеры объясняют всю скрытую массу, составляет

$$P = 1 - \exp \left(-\frac{90 \text{ дней}}{0.15 \text{ лет}} \right) = 0.81. \quad (7.53)$$

Это событие становится очень вероятным, но оно наблюдается одно из 20, что позволяет поставить ограничения на долю кластеров среди всех ПЧД, если нет другого объяснения двойных событий.

7.16 ПЕРИОД МЕЖДУ СОБЫТИЯМИ ДЛЯ ОДИНОЧНЫХ ПЧД

Оценим период между событиями линзирования для одиночных ПЧД. С учетом всех ПЧД ответ будет отличаться от (7.50) в η раз (из формул (7.33) и (7.34))

$$T_{\text{РВН}} = \frac{T_1}{\eta} = \frac{0.15 \text{ лет}}{0.03} = 50 \text{ лет.} \quad (7.54)$$

Выбор между гипотезами требует дальнейшего статистического анализа данных наблюдений.

8 БАЙЕСОВСКИЙ АНАЛИЗ ГИПОТЕЗ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПЕРВИЧНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР ПО ДАННЫМ МИКРОЛИНЗИРОВАНИЯ

Целью настоящей части работы является сравнение нескольких гипотез о распределении первичных черных дыр (ПЧД) в гало Млечного Пути по данным звездного микролинзирования. В анализе используются наблюдательные данные обзоров MACHO, EROS-2 и OGLE, а именно:

- число зарегистрированных событий микролинзирования в каждом обзоре;
- длительности событий, характеризуемые временем Эйнштейна t_E ;
- функции эффективности детектирования $\varepsilon_j(t_E)$.

8.1 РАССМАТРИВАЕМЫЕ ГИПОТЕЗЫ

Сравниваются пять гипотез:

$$H1_{\text{mono}}, \quad H1_{\text{lognorm}}, \quad H2_{\text{mono}}, \quad H2_{\text{lognorm}}, \quad H3. \quad (8.1)$$

Их параметры приведены в таблице [8.1](#).

Таблица 8.1 — Рассматриваемые гипотезы и их параметры

Гипотеза	Параметры
$H1_{\text{mono}}$	Кластерная модель, монохроматические массы: $M_0 = 1 M_{\odot}$, $R_{\text{cl}} = 1 \text{ pc}$, $N_{\text{cl}} = 10^4$.
$H1_{\text{lognorm}}$	Кластерная модель, логнормальное распределение масс: $\psi_{\text{lognorm}}(M) = \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{1}{M \sigma_{\ln} \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\ln(M/M_{\odot}) - \mu_{\ln})^2}{2\sigma_{\ln}^2} \right], \quad M \in [M_{\min}, M_{\max}], \quad (8.2)$ где $\mu_{\ln} = -0.58, \quad \sigma_{\ln} = 1.26, \quad M_{\min} = 0.1 M_{\odot}, \quad M_{\max} = 100 M_{\odot}, \quad (8.3)$ а параметры кластера те же: $R_{\text{cl}} = 1 \text{ pc}$, $N_{\text{cl}} = 10^4$.
$H2_{\text{mono}}$	Гладкое гало, монохроматические массы: $M_0 = 1 M_{\odot}$.
$H2_{\text{lognorm}}$	Гладкое гало, логнормальное распределение масс: $\psi_{\text{lognorm}}(M) = \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{1}{M \sigma_{\ln} \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\ln(M/M_{\odot}) - \mu_{\ln})^2}{2\sigma_{\ln}^2} \right], \quad M \in [M_{\min}, M_{\max}], \quad (8.4)$ с теми же параметрами $\mu_{\ln}$, $\sigma_{\ln}$, $M_{\min}$, $M_{\max}$.
$H3$	Смешанная модель: $\phi_{H3}(t_E; f_{\text{cl}}) = f_{\text{cl}} \phi_{H1}(t_E) + (1 - f_{\text{cl}}) \phi_{H2}(t_E). \quad (8.5)$

8.2 ПРОФИЛИ ПЛОТНОСТИ ГАЛО

Для проверки устойчивости результатов рассматриваются четыре профиля плотности гало:

- профиль NFW [37; 40],

$$\rho_{\text{NFW}}(R) = \frac{\rho_s}{(R/r_s)(1 + R/r_s)^2}; \quad (8.6)$$

- профиль Einasto [41],

$$\rho_{\text{Ein}}(R) = \rho_{-2} \exp \left[-\frac{2}{\alpha} \left(\left(\frac{R}{r_{-2}} \right)^{\alpha} - 1 \right) \right]; \quad (8.7)$$

- профиль Burkert [42],

$$\rho_{\text{Bur}}(R) = \frac{\rho_0 r_c^3}{(R + r_c)(R^2 + r_c^2)}; \quad (8.8)$$

- псевдоизотермический профиль [43—45],

$$\rho_{\text{ISO}}(R) = \frac{\rho_0}{1 + (R/r_c)^2}. \quad (8.9)$$

Во всех случаях профиль гало нормируется на одну и ту же локальную плотность в солнечной окрестности:

$$\rho(R_0) = \rho_{\odot}, \quad R_0 = 8.5 \text{ кpc}. \quad (8.10)$$

8.3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ СКОРОСТЬ СОБЫТИЙ

Дифференциальная скорость событий микролинзирования на одну звезду при гипотезе H записывается в виде

$$\frac{d\Gamma_H}{dt_E}(t_E) = \int_0^{D_S} dD_L \int_{\mathcal{M}_H} dM n_{\text{lens}}^{(H)}(D_L, M) \mathcal{K}(D_L, M, t_E) \psi_H(M). \quad (8.11)$$

Здесь:

- $D_L \in [0, D_S]$ — расстояние до линзы вдоль луча зрения;
- D_S — расстояние до источника;
- $M \in \mathcal{M}_H$ — область интегрирования по массам:

$$\mathcal{M}_H = \begin{cases} \{M_0\}, & \text{для монохроматической модели,} \\ [M_{\min}, M_{\max}], & \text{для логнормальной модели;} \end{cases} \quad (8.12)$$

- $n_{\text{lens}}^{(H)}(D_L, M)$ — число линз на единицу объема;
- $\mathcal{K}(D_L, M, t_E)$ — кинематико-геометрический множитель;
- $\psi_H(M)$ — закон распределения масс.

При фиксированной поперечной скорости $v_T = v_0$ кинематический множи-

тель имеет вид

$$\mathcal{K}(D_L, M, t_E) = [2u_T R_E(D_L, M) v_0] \delta_\sigma \left(t_E - \frac{R_E(D_L, M)}{v_0} \right), \quad (8.13)$$

где

$$R_E(D_L, M) = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_L(D_S - D_L)}{D_S}} \quad (8.14)$$

— радиус Эйнштейна, а вместо точной δ -функции используется узкая гауссиана

$$\delta_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma = \sigma_{\text{frac}} t_E. \quad (8.15)$$

В версии расчета с распределением скоростей используется рейлеевское распределение поперечной скорости

$$p(v_T) = \frac{v_T}{\sigma_v^2} \exp\left(-\frac{v_T^2}{2\sigma_v^2}\right), \quad v_T \in [0, \infty), \quad (8.16)$$

и тогда $\mathcal{K}$ получается после интегрирования по v_T на области $v_T \in [0, \infty)$.

8.4 ФОРМА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ДЛИТЕЛЬНОСТИ

После вычисления дифференциальной частоты вводится нормированная форма распределения длительностей:

$$\phi_H(t_E) = \frac{1}{C_H} \frac{d\Gamma_H}{dt_E}(t_E), \quad C_H = \int_0^\infty \frac{d\Gamma_H}{dt_E}(t_E) dt_E. \quad (8.17)$$

Интеграл в определении C_H берется по области всех допустимых длительностей:

$$t_E \in (0, \infty). \quad (8.18)$$

По построению

$$\int_0^\infty \phi_H(t_E) dt_E = 1. \quad (8.19)$$

8.5 УЧЕТ ЭФФЕКТИВНОСТИ ДЕТЕКТИРОВАНИЯ

Для каждого обзора j вводится функция эффективности детектирования $\varepsilon_j(t_E)$, где $0 \leq \varepsilon_j(t_E) \leq 1$. Средняя доля наблюдаемых событий для гипотезы H в обзоре j равна

$$A_{j,H} = \int_0^\infty \varepsilon_j(t_E) \phi_H(t_E) dt_E. \quad (8.20)$$

Интеграл также берется по области $t_E \in (0, \infty)$.

8.6 БАЙЕСОВСКАЯ СХЕМА СРАВНЕНИЯ ГИПОТЕЗ

Пусть в обзоре j наблюдается N_j событий. Для неизвестной нормировки λ_j принимается пуассоновская модель

$$P(N_j \mid \lambda_j, H) = \frac{(\lambda_j A_{j,H})^{N_j}}{N_j!} e^{-\lambda_j A_{j,H}}. \quad (8.21)$$

Для λ_j задается гамма-априор

$$p(\lambda_j) = \text{Gamma}(\lambda_j \mid a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda_j^{a-1} e^{-b\lambda_j}, \quad \lambda_j \in [0, \infty). \quad (8.22)$$

Тогда вклад по числу событий равен

$$Z_{j,H}^{\text{count}} = \int_0^\infty P(N_j \mid \lambda_j, H) p(\lambda_j) d\lambda_j. \quad (8.23)$$

Вклад по длительности событий записывается как

$$L_{j,H}^{\text{shape}} = \prod_{i \in D_j} \frac{\varepsilon_j(t_{E,i}) \phi_H(t_{E,i})}{A_{j,H}}, \quad (8.24)$$

где D_j — множество событий в обзоре j .

Итоговое предельное правдоподобие:

$$Z_H = P(D \mid H) = \prod_j Z_{j,H}^{\text{count}} L_{j,H}^{\text{shape}}. \quad (8.25)$$

При равных априорах на все пять гипотез:

$$P(H_k) = \frac{1}{5}, \quad (8.26)$$

апостериорные вероятности имеют вид

$$P(H_k | D) = \frac{Z_{H_k}}{\sum_{\ell=1}^5 Z_{H_\ell}}. \quad (8.27)$$

8.7 ПОДБОР ПАРАМЕТРА f_{cl} В ГИПОТЕЗЕ H_3

Для гипотезы H_3 параметр f_{cl} не маргинализуется, а определяется из максимума предельного правдоподобия:

$$\hat{f}_{\text{cl}} = \arg \max_{f_{\text{cl}} \in [0,1]} \ln Z_{H_3}(f_{\text{cl}}). \quad (8.28)$$

Кроме того, для H_3 отдельно рассматриваются две ветви:

- монохроматическая;
- логнормальная.

После вычисления $\ln Z_{H_3}$ для обеих ветвей выбирается ветвь с наибольшим значением правдоподобия.

8.8 АПОСТЕРИОРНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Таблица 8.2 — Апостериорные вероятности

Профиль	$P(H1_{\text{mono}} D)$	$P(H1_{\text{lognorm}} D)$	$P(H2_{\text{mono}} D)$	$P(H2_{\text{lognorm}} D)$	$P(H3 D)$
NFW	0.328085	0.011950	0.328879	0.002207	0.328879
Einasto	0.328132	0.011955	0.328951	0.002012	0.328951
Burkert	0.328088	0.012076	0.328880	0.002076	0.328880
ISO	0.328021	0.011921	0.328788	0.002482	0.328788

Из таблицы 8.2 следует:

- основная апостериорная масса делится между $H1_{\text{mono}}$, $H2_{\text{mono}}$ и $H3$;

- логнормальные гипотезы имеют малую вероятность и уступают монохроматическим;
- статистически значимого различия между $H1_{\text{mono}}$ и $H2_{\text{mono}}$ не наблюдается.

8.9 ЛУЧШИЕ ПАРАМЕТРЫ ГИПОТЕЗЫ H_3

Для всех профилей гало получено:

$$\hat{f}_{\text{cl}} = 0, \quad \text{branch}_{\text{best}} = \text{mono}. \quad (8.29)$$

Это означает, что смешанная гипотеза H_3 в максимуме правдоподобия вырождается в чисто гладкую монохроматическую модель:

$$H_3 \longrightarrow H2_{\text{mono}}. \quad (8.30)$$

Поэтому

$$\ln Z_{H3} = \ln Z_{H2_{\text{mono}}}, \quad P(H3 \mid D) = P(H2_{\text{mono}} \mid D) \quad (8.31)$$

для всех рассмотренных профилей гало.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были рассмотрены теоретические и наблюдательные аспекты кластеризации первичных черных дыр и возможности проверки соответствующих гипотез по данным микролинзирования. В теоретической части систематизированы современные представления о механизмах образования ПЧД, функциях масс, наблюдательных ограничениях и возможных процессах эволюции кластеров ПЧД. Важным выводом из обзорной части является то, что кластерная структура ПЧД может влиять на наблюдательные сигнатуры, однако характер этого влияния зависит от внутреннего профиля кластера и от того, каким образом выполняется усреднение по ансамблю наблюдаемых звезд.

Была построена байесовская схема сравнения пяти гипотез о распределении ПЧД по данным обзоров MACHO, EROS-2 и OGLE. Были рассмотрены две кластерные гипотезы — $H1_{\text{mono}}$ и $H1_{\text{lognorm}}$, две гладкие гипотезы — $H2_{\text{mono}}$ и $H2_{\text{lognorm}}$, а также смешанная гипотеза H_3 . Для всех гипотез были исследованы четыре профиля плотности гало: NFW, Einasto, Burkert и псевдоизотермический профиль.

Для смешанной гипотезы H_3 параметр f_{cl} определялся из максимума правдоподобия. Во всех рассмотренных профилях гало было получено $\hat{f}_{\text{cl}} = 0$, а лучшей ветвью оказывалась монохроматическая. Это означает, что в максимуме правдоподобия гипотеза H_3 фактически вырождается в гладкую монохроматическую модель $H2_{\text{mono}}$. Следовательно, в рамках текущей постановки данные не требуют присутствия кластерной компоненты в смеси, хотя и не позволяют статистически отделить чисто кластерную монохроматическую гипотезу $H1_{\text{mono}}$ от гладкой монохроматической гипотезы $H2_{\text{mono}}$.

Переход от NFW к Einasto, Burkert и ISO практически не изменил качественного вывода. Это означает, что на текущем уровне модели данные по микролинзированию в первую очередь различают закон распределения масс, а не конкретную форму профиля гало или сам факт кластерности. Таким образом, в работе показано, что при корректном усреднении по вероятности пересечения класте-

ра кластерные модели перестают искусственно проигрывать гладким, однако по одним только длительностям событий имеющихся данных недостаточно, чтобы уверенно различить кластерную и гладкую монохроматические гипотезы.

Перспективным направлением дальнейшего развития работы является включение пространственного распределения событий по полям наблюдения, сканирование параметров кластера R_{cl} , N_{cl} , M_{cl} , а также введение более полной модели астрофизического фона. Именно эти шаги представляются наиболее важными для последующего уточнения роли кластеризации ПЧД в данных микролинзирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zel'dovich Y. B., Novikov I. D.* The Hypothesis of Cores Retarded during Expansion and the Hot Cosmological Model // *Soviet Astronomy*. — 1967. — Т. 10. — С. 602.
2. *Hawking S. W.* Gravitationally collapsed objects of very low mass // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 1971. — Т. 152. — С. 75—78.
3. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger / B. P. Abbott [и др.] // *Physical Review Letters*. — 2016. — Т. 116, № 6. — С. 061102.
4. Primordial Black Hole Scenario for the GW150914 Event / M. Sasaki [и др.] // *Physical Review Letters*. — 2016. — Т. 117, № 6. — С. 061101.
5. *Ali-Haïmoud Y., Kovetz E. D., Kamionkowski M.* Merger rate of primordial black-hole binaries // *Physical Review D*. — 2017. — Т. 96, № 12. — С. 123523.
6. *Carr B., Kühnel F.* Primordial Black Holes as Dark Matter: Recent Developments // *Annual Review of Nuclear and Particle Science*. — 2020. — Т. 70. — С. 355—394.
7. *Green A. M., Kavanagh B. J.* Primordial Black Holes as a Dark Matter Candidate // *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*. — 2021. — Т. 48, № 4. — С. 043001.
8. Constraints on Primordial Black Holes / B. Carr [и др.] // *Reports on Progress in Physics*. — 2021. — Т. 84, № 11. — С. 116902.
9. *Garcia-Bellido J., Ruiz Morales E.* Primordial black holes from single-field models of inflation // *Physics of the Dark Universe*. — 2017. — Т. 18. — С. 47—54.
10. *Ezquiaga J. M., Garcia-Bellido J., Ruiz Morales E.* Primordial Black Hole production in Critical Higgs Inflation // *Physics Letters B*. — 2018. — Т. 776. — С. 345—349.

11. *Musco I., Jedamzik K., Young S.* Primordial black hole formation during the QCD phase transition // *Physical Review D*. — 2024. — T. 109. — C. 083506.
12. *Khlopov M. Y., Rubin S. G., Sakharov A. S.* Primordial structure of massive black hole clusters // *Astroparticle Physics*. — 2005. — T. 23. — C. 265—277.
13. *Niemeyer J. C., Jedamzik K.* Near-Critical Gravitational Collapse and the Initial Mass Function of Primordial Black Holes // *Physical Review Letters*. — 1998. — T. 80. — C. 5481—5484.
14. *Niemeyer J. C., Jedamzik K.* Dynamics of primordial black hole formation // *Physical Review D*. — 1999. — T. 59. — C. 124013.
15. *Musco I., Miller J. C.* Primordial black hole formation in the early Universe: Critical behaviour and self-similarity // *Classical and Quantum Gravity*. — 2013. — T. 30. — C. 145009.
16. *Harada T., Yoo C.-M., Kohri K.* Threshold of primordial black hole formation // *Physical Review D*. — 2013. — T. 88. — C. 084051. — Erratum: *Phys. Rev. D* 89, 029903 (2014).
17. *Carr B., Kühnel F., Sandstad M.* Primordial Black Holes as Dark Matter // *Physical Review D*. — 2016. — T. 94. — C. 083504.
18. *Dolgov A. D., Silk J.* Baryon isocurvature fluctuations at small scales and baryonic dark matter // *Physical Review D*. — 1993. — T. 47. — C. 4244—4255.
19. *Hawking S. W.* Black hole explosions? // *Nature*. — 1974. — T. 248. — C. 30—31.
20. Microlensing constraints on primordial black holes with Subaru/HSC Andromeda observations / H. Niikura [и др.] // *Nature Astronomy*. — 2019. — T. 3. — C. 524—534.
21. EROS-2 and OGLE references for microlensing constraints / P. Tisserand, A. Udalski [и др.]. — 2011. — Combined entry from the source list. Tisserand et al., *A&A* **469**, 387–404 (2007); Udalski et al., *Acta Astron.* **47**, 319 (1997).
22. *Saito R., Yokoyama J.* Gravitational-Wave Background as a Probe of the Primordial Black Hole Abundance // *Physical Review Letters*. — 2009. — T. 102. — C. 161101. — Erratum: *Phys. Rev. Lett.* 107, 069901 (2011).

23. Evidence for a Gravitational-wave Background / G. Agazie [и др.] // *Astrophysical Journal Letters*. — 2023. — Т. 951. — С. L8.
24. *Ricotti M., Ostriker J. P., Mack K. J.* Effect of Primordial Black Holes on the Cosmic Microwave Background and Cosmological Parameter Estimates // *Astrophysical Journal*. — 2008. — Т. 680. — С. 829—845.
25. *Ali-Haïmoud Y., Kamionkowski M.* Cosmic microwave background limits on accreting primordial black holes // *Physical Review D*. — 2017. — Т. 95. — С. 043534.
26. *Inman D., Ali-Haïmoud Y.* Early structure formation in primordial black hole cosmologies // *Physical Review D*. — 2019. — Т. 100. — С. 083528.
27. *Quinlan G. D., Shapiro S. L.* The Dynamical Evolution of Dense Clusters of Compact Stars // *Astrophysical Journal*. — 1989. — Т. 343. — С. 725—749.
28. *Stasenko V. D., Kirillov A. A., Belotsky K. M.* Dynamics and Merger Rate of Primordial Black Holes in a Cluster // *Universe*. — 2022. — Т. 8, № 1. — С. 41.
29. *Stasenko V., Belotsky K. M.* Influence of early dark matter halos on the primordial black hole merger rate // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2023. — Т. 526. — С. 4308—4323.
30. Primordial black hole mergers from three-body interactions / G. Franciolini [и др.] // *Physical Review D*. — 2022. — Т. 106. — С. 083529.
31. *Peters P. C.* Gravitational Radiation and the Motion of Two Point Masses // *Physical Review*. — 1964. — Т. 136. — B1224—B1232.
32. Population of Merging Compact Binaries Inferred Using Gravitational Waves through GWTC-3 / R. Abbott [и др.] // *Physical Review X*. — 2023. — Т. 13. — С. 011048.
33. *Стасенко В. Д.* Кластеризация и слияния первичных чёрных дыр : дис. ... канд. / Стасенко В. Д. — НИЯУ МИФИ, 2025. — Текст диссертации.
34. *Stasenko V.* Redshift evolution of primordial black hole merger rate // *Physical Review D*. — 2024. — Т. 109. — С. 123546.
35. Clusters of primordial black holes / K. M. Belotsky [et al.] // *Eur. Phys. J. C*. — 2019. — Vol. 79, no. 3. — P. 246. — arXiv: [1807.06590 \[astro-ph.CO\]](https://arxiv.org/abs/1807.06590).
36. The MACHO project: Microlensing results from 5.7 years of LMC observations / C. Alcock [et al.] // *Astrophys. J.* — 2000. — Vol. 542. — P. 281–307. — arXiv: [astro-ph/0001272](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0001272).

37. *Navarro J. F., Frenk C. S., White S. D. M.* The Structure of cold dark matter halos // *Astrophys. J.* — 1996. — Vol. 462. — P. 563–575. — arXiv: [astro-ph/9508025](#).
38. *Тощенко К. А.* Влияние кластеризации первичных черных дыр на наблюдательные ограничения доли компактных объектов гало // На стадии подготовки. —.
39. MACHO project limits on black hole dark matter in the 1-30 solar mass range / R. A. Allsman [et al.] // *Astrophys. J. Lett.* — 2001. — Vol. 550. — P. L169. — arXiv: [astro-ph/0011506](#).
40. *Navarro J. F., Frenk C. S., White S. D. M.* A Universal Density Profile from Hierarchical Clustering // *Astrophysical Journal*. — 1997. — T. 490. — C. 493—508.
41. The Aquarius Project: the subhalos of galactic halos / V. Springel [и др.] // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2008. — T. 391. — C. 1685—1711. — arXiv: [0809.0898](#).
42. *Burkert A.* The Structure of Dark Matter Halos in Dwarf Galaxies // *Astrophysical Journal Letters*. — 1995. — T. 447. — C. L25—L28.
43. *Griest K.* Galactic microlensing as a method of detecting massive compact halo objects // *Astrophysical Journal*. — 1991. — T. 366. — C. 412—421.
44. The MACHO Project: Microlensing Results from 5.7 Years of LMC Observations / C. Alcock [и др.] // *Astrophysical Journal*. — 2000. — T. 542. — C. 281—307. — arXiv: [astro-ph/0001272](#).
45. Limits on the Macho Content of the Galactic Halo from the EROS-2 Survey of the Magellanic Clouds / P. Tisserand [и др.] // *Astronomy and Astrophysics*. — 2007. — T. 469. — C. 387—404. — arXiv: [astro-ph/0607207](#).