

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

УДК 531.3, 539.1.05

На правах рукописи

ГОРБУНОВ ДМИТРИЙ СЕРГЕЕВИЧ

**КАЛИБРОВКА ИНТЕГРАЛЬНОЙ КВАНТОВОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ
АТМОСФЕРНЫХ ЧЕРЕНКОВСКИХ ТЕЛЕСКОПОВ УСТАНОВКИ
«TAIGA-IACT»**

Направление подготовки 14.04.02 «Ядерная физика и технологии»
Диссертация на соискание степени магистра

Научный руководитель,
к.ф.-м.н., доц.

_____ П. Е. Тетерин

Научный консультант,
м.н.с.

_____ П. А. Волчугов

Москва 2026

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА

**КАЛИБРОВКА ИНТЕГРАЛЬНОЙ КВАНТОВОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ
АТМОСФЕРНЫХ ЧЕРЕНКОВСКИХ ТЕЛЕСКОПОВ УСТАНОВКИ
«TAIGA-IAC»**

Студент	_____ Д. С. Горбунов
Научный руководитель, к.ф.-м.н., доц.	_____ П. Е. Тетерин
Научный консультант, м.н.с	_____ П. А. Волчугов
Рецензент, к.ф.-м.н., доц.	_____ А. Н. Дмитриева
Секретарь ГЭК, к.ф.-м.н.	_____ А. А. Кириллов
Зав. каф. №40, д.ф.-м.н., проф.	_____ М. Д. Скорохватов
Рук. учеб. прог., к.ф.-м.н.	_____ А. А. Кириллов

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 Введение	5
1.1 Космические лучи	5
1.2 Астрофизический комплекс TAIGA.....	6
1.3 Установка TAIGA-IACT.....	6
1.4 Цель и задачи работы.....	8
2 Черенковское излучение	9
2.1 Эффект Вавилова-Черенкова.....	9
2.2 Оценка предельно допустимой для анализа энергии мюонов	9
3 Оценка ожидаемого количества регистрируемых мюонных колец	11
4 Оценка углового размера пикселя в фокальной плоскости	12
5 Выделение событий от одиночных мюонов	14
5.1 Описание входных данных.....	14
5.2 Критерии отбора событий.....	15
5.3 Критерий величины радиуса черенковского кольца	16
5.4 Критерий длины дуги кольца	17
5.5 Результаты отбора колец	19
5.6 Распределение колец по радиусу.....	19
6 Мюонная калибровка	22
6.1 Формула Тамма-Франка.....	23
6.2 Сегментная функция	24
6.2.1 Расчёт граничных углов пикселя.....	24
6.2.2 Расчёт длины хорды в плоскости отражателя	27
6.2.3 Расчёт площади сегмента зеркала, собирающего свет в один пиксель.....	30
6.2.4 Критические значения прицельного параметра	33

6.3 Длина траектории мюона.....	34
6.4 Определение пропускной способности телескопа	34
6.5 Распределение квантовой эффективности	38
Заключение	40
Список использованной литературы.....	41
ПРИЛОЖЕНИЕ А	43
ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....	44
ПРИЛОЖЕНИЕ В	46
ПРИЛОЖЕНИЕ Г	48
ПРИЛОЖЕНИЕ Д	50
ПРИЛОЖЕНИЕ Е.....	53
ПРИЛОЖЕНИЕ Ж	59

1 Введение

1.1 Космические лучи

Космическими лучами называют элементарные частицы, фотоны и ядра атомов, движущиеся с высокими энергиями в космическом пространстве. Центральным вопросом физики космических лучей является объяснение наблюдаемого возле Земли потока космических лучей.

Физика космических лучей также изучает:

- механизмы, приводящие к возникновению и ускорению космических лучей;
- частицы космических лучей, их природу и свойства;
- явления, вызванные частицами космических лучей в космическом пространстве, атмосфере Земли и планет, такие как ШАЛ (широкие атмосферные ливни).

Изучение потоков высокоэнергетичных заряженных и нейтральных космических частиц, попадающих на границу атмосферы Земли, является важнейшей экспериментальной задачей.

Первичные космические лучи могут возникать:

- вне нашей Галактики;
- в нашей Галактике;
- на Солнце.

Вторичными же космическими лучами называют потоки частиц, возникающих под действием первичных космических лучей в атмосфере Земли и регистрирующихся на её поверхности.

Космические лучи являются составляющей естественной радиации на поверхности Земли и в атмосфере. Диапазон энергий частиц в космических лучах велик — от 10^6 эВ до $5 \cdot 10^{21}$ эВ. По количеству частиц космические лучи на 92 % состоят из протонов, на 6 % — из ядер гелия, около 1 % составляют более тяжёлые элементы, и около 1 % приходится на электроны.

Для их регистрации, с одной стороны, применяются прямые методы, такие как баллонные эксперименты в верхних слоях атмосферы и на орбите Земли. Преимуществом таких методов является возможность точного определения заряда приходящих частиц, а недостатком – малая площадь регистрации. Таким образом, чтобы набрать существенную статистику для высокоэнергетических космических лучей требуется значительное время, так как интенсивность их потока значительно ниже, чем у низкоэнергетичных.

С другой стороны, применяются косвенные методы, связанные с измерением параметров ШАЛ, вызываемых первичными ядрами и высокоэнергетическими гамма-квантами. Такие измерения можно проводить и на поверхности Земли, что за счёт увеличения площади регистрации даёт возможность уменьшить время измерения.

1.2 Астрофизический комплекс TAIGA

Гамма-обсерватория TAIGA (Tunka Advanced Instrument for cosmic rays and Gamma Astronomy) нацелена на решение актуальных вопросов гамма-астрономии и физики космических лучей путём измерения параметров широких атмосферных ливней, вызванных взаимодействием вторичных частиц этих лучей с атмосферой [1]. Измеряя различные параметры, можно восстановить направление прихода, заряд и энергию частиц. Одна из решаемых задач – ответить на вопрос о происхождении космических лучей в диапазоне от 10^{14} до 10^{18} эВ. Комплекс состоит из установок Tunka-133, Tunka-Grande, TAIGA-HiSCORE, TAIGA-MUON, TAIGA-IAC [2].

1.3 Установка TAIGA-IAC

Телескоп установки TAIGA-IAC (Imaging Atmospheric Cherenkov Telescopes) обладает сферическим отражателем радиусом 2,15 м и фокусным расстоянием 4,75 м. Регистрирующая камера телескопа имеет 22 кластера ФЭУ (фотоэлектронных умножителей), почти каждый из которых содержит 28 фотоумножителей (всего порядка 600 фотоумножителей). Каждый пиксель имеет диаметр 3 см и обзореает $0,36^\circ$ небесной сферы. Угловой

радиус поля зрения телескопа составляет $4,8^\circ$. Фотография первых двух телескопов установки приведена на рисунке 1.

Свет от ШАЛ распространяется в узком конусе. Часть этого света попадает на отражатель, он фокусирует свет в камеру, где, собственно, и наблюдается угловая проекция света от ШАЛ, по форме которой можно восстановить параметры первичной частицы. Телескоп нацелен на регистрацию гамма-квантов с энергиями выше 2-3 ТэВ. Установка непосредственно измеряет фото-электроны, зарегистрированные ФЭУ, расположенными в фокальной плоскости, однако зная пропускную способность (интегральную квантовую чувствительность) всей установки, можно оценить и непосредственно число упавших фотонов на зеркало.

Интегральная квантовая чувствительность для установки TAIGA-IACT играет важную роль в определении эффективности регистрации черенковского света, который возникает при взаимодействии гамма-излучения с атмосферой. Этот параметр позволяет оценить, сколько черенковских фотонов достигает детекторов установки и сколько из них реально регистрируется системой. Собственно, созданию методики для его периодической оценки в условиях реального эксперимента и будет посвящена данная работа.



Рисунок 1 – Фотография первых двух телескопов установки TAIGA-IACT

1.4 Цель и задачи работы

Цель работы:

Определить интегральную квантовую чувствительность телескопа TAIGA-IACST.

Основные задачи:

- 1) Оценить ожидаемое количество регистрируемых мюонных колец телескопом в единицу времени;
- 2) Разработать алгоритм выделения изображений от одиночных мюонов, регистрируемых телескопом TAIGA-IACST;
- 3) Разработать математическую модель распределения интенсивности черенковского излучения по дуге кольца;
- 4) Провести мюонную калибровку на основании отобранных мюонных колец для моделируемых и экспериментальных событий.

Актуальность:

Одним из методов наземной гамма-астрономии является регистрация черенковского света ШАЛ от первичных гамма-квантов. Атмосферные черенковские телескопы способны измерять потоки фотоэлектронов от черенковского излучения, но не фотонов. Следовательно, чтобы достоверно измерить энергию первичных частиц, необходимо знать точную связь числа черенковских фотонов с числом зарегистрированных фотоэлектронов. Одиночные мюоны, регистрируемые атмосферными черенковскими телескопами, позволяют установить эту связь благодаря возможности надёжного теоретического расчёта числа испущенных фотонов и числа зарегистрированных и таким образом оценить искомую пропускную способность, то есть интегральную квантовую эффективность телескопа.

2 Черенковское излучение

2.1 Эффект Вавилова-Черенкова

Эффект Вавилова-Черенкова заключается в свечении, вызываемом в прозрачной среде заряженной частицей, движущейся со скоростью, превышающей фазовую скорость распространения света в этой среде.

Детекторы, регистрирующие черенковское излучение, широко используются в физике высоких энергий для регистрации релятивистских частиц и определения их скорости и направления движения. Зная скорость и массу частицы, можно найти её кинетическую энергию.

В качестве таких частиц в данной работе используются одиночные мюоны, регистрируемые телескопом установки TAIGA-IACT, которые ввиду своих малых радиационных потерь, способны удаляться от оси ШАЛ на большие расстояния и могут быть зарегистрированы в качестве отдельной частицы, параметры которой по зарегистрированному черенковскому излучению можно оценить.

2.2 Оценка предельно допустимой для анализа энергии мюонов

Для оценки параметров оптической системы важно, чтобы черенковский угол не зависел от энергии мюонов, что наблюдается при высоких энергиях. Накопив и проанализировав достаточное количество событий от одиночных мюонов, возможно оценить их характеристики. Конкретная форма изображений таких событий будет объяснена в пункте 5.2.

На высоте гамма-обсерватории TAIGA $h = 700$ м показатель преломления атмосферы составляет $n = 1,0002614$. При данном показателе преломления максимально возможный черенковский угол составляет $\theta_{\text{пред}} = 1,31^\circ$. С учётом допустимого отклонения, выбранного равным $p = 5\%$, минимальный черенковский угол, при котором зависимость от энергии можно пренебречь, составляет $\theta_{\text{крит}} = 1,24^\circ$. Под таким углом будут излучать мюоны, обладающие энергией $E_{\text{крит}} = 14,4$ ГэВ. Также можно рассчитать пороговую энергию черенковского излучения для мюонов при

данном показателе преломления – $E_{\text{порог}} = 4,6$ ГэВ. Зависимость энергии мюонов от раствора черенковского конуса представлена на рисунке 2. Более подробные вычисления представлены в приложении Б.

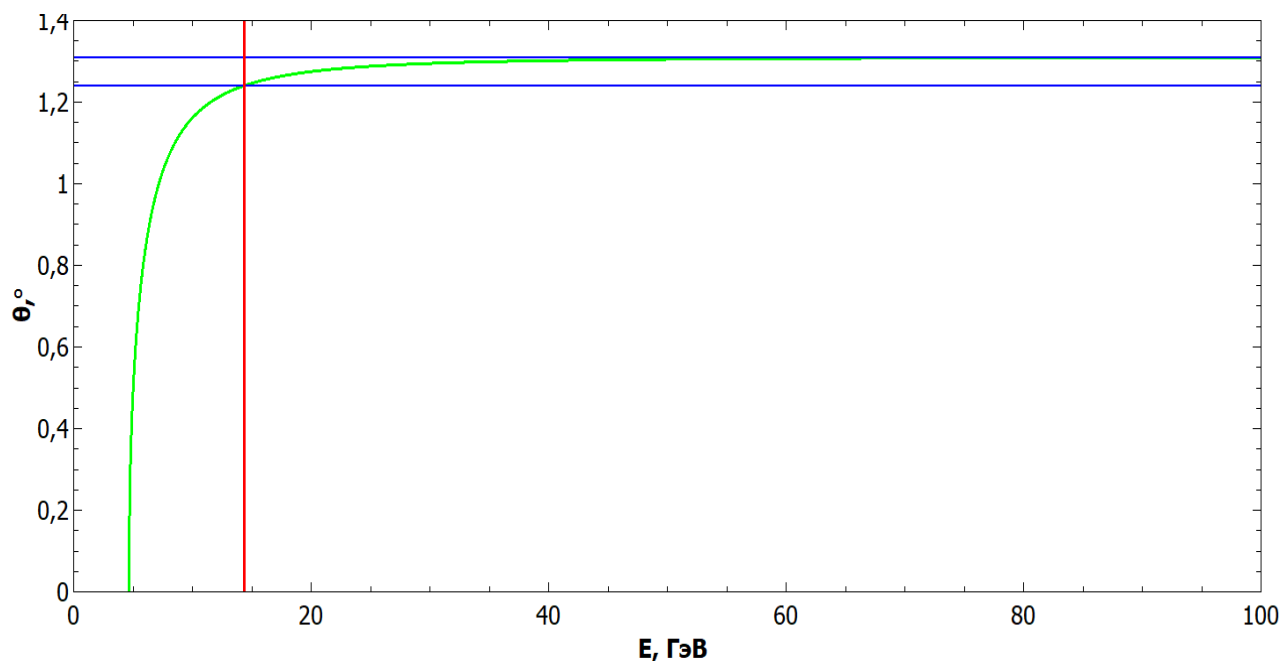


Рисунок 2 – Зависимость энергии мюонов E от раствора черенковского конуса Θ (зелёная линия); при энергиях больших красной абсциссы данная зависимость находится в узком диапазоне углов, ограниченном синими ординатами, что даёт возможно считать её там постоянной величиной

3 Оценка ожидаемого количества регистрируемых мюонных колец

Для выделения событий от одиночных мюонов из фона ШАЛов важно знать, какой поток одиночных мюонов проходит через зеркало телескопа в единицу времени в пределах его телесного угла. Это значение можно сравнивать с числом отобранных экспериментальных событий.

На основании справочных данных был получен поток одиночных мюонов в единицу времени в единицу телесного угла на единичную площадку для найденной ранее минимально допустимой энергии на высоте близкой к высоте обсерватории (700 метров) [3]:

$$\text{Для } E > E_1 = 12,51 \text{ ГэВ} \Rightarrow \left(\frac{dN_\mu}{dS d\Omega dt} \right)_1 = 5,487 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}},$$

$$\text{Для } E > E_2 = 16,68 \text{ ГэВ} \Rightarrow \left(\frac{dN_\mu}{dS d\Omega dt} \right)_2 = 3,551 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}}.$$

Так как для энергии, дающей отклонение в 5% (пункт 2.2), нет явного значения потока, то произведём линейную интерполяцию:

$$\text{Для } E > E_{\text{крит}} = 14,4 \text{ ГэВ} \Rightarrow \left(\frac{dN_\mu}{dS d\Omega dt} \right)_{\text{крит}} = 4,610 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}}.$$

Тогда ожидаемое количество мюонных колец можно найти, проинтегрировав полученное значение по площади зеркала и телесному углу:

$$\frac{dN_\mu}{dt} = \left(\frac{dN_\mu}{dS d\Omega dt} \right)_{\text{крит}} (1 - \cos \theta_{\text{пред}}) 2\pi^2 R_{\text{mir}}^2 = 0,110 \frac{\text{мюон}}{\text{с}} = 6,60 \frac{\text{мюон}}{\text{мин}} = 396 \frac{\text{мюон}}{\text{час}},$$

R_{mir} – радиус отражателя.

Более подробные вычисления представлены в приложении В.

4 Оценка углового размера пикселя в фокальной плоскости

Для расчёта потока черенковских фотонов, попадающих в конкретный пиксель, необходимо знать его угловую величину. Для этого рассмотрим оптическую схему сферического зеркала, представленную на рисунке 3.

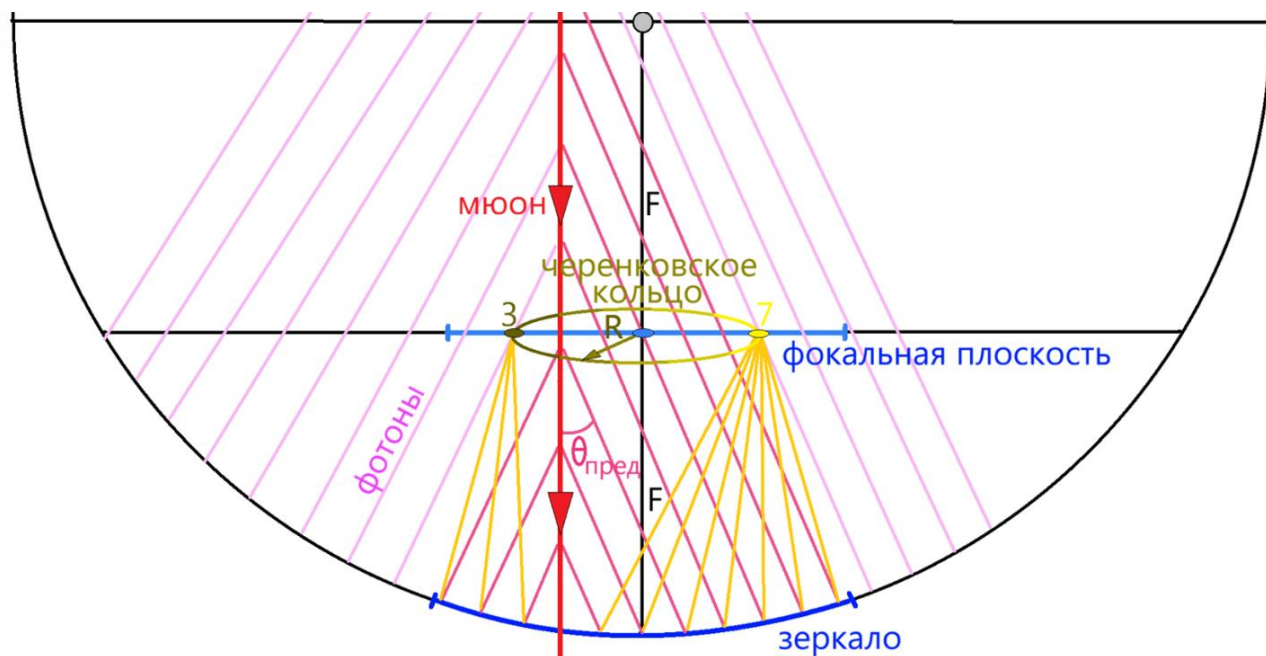


Рисунок 3 – Пример прохождения лучей через оптическую систему телескопа; малиновым цветом показаны траектории черенковских фотонов, дошедших до зеркала, а розовым – не дошедших; оранжевым показаны траектории фотонов отражённых от зеркала в фокальную плоскость, где эти лучи образуют кольцо с неравномерной яркостью (слева собралось 3 луча, а справа 7); расстояние от оптической оси до точки прохождения луча через фокальную плоскость соответствует радиусу черенковского кольца

Проекцией черенковского конуса на плоскость зеркала при малом угле падения мюона i будет круг, который после прохождения сферического зеркала преобразуется в кольцо в фокальной плоскости телескопа. При этом азимутальные углы падения относительно центра кольца после прохождения зеркала остаются неизменными (под азимутальными углами понимаются полярные углы точек окружности зеркала). Исходя из этого, следует, что число черенковских фотонов, попавших в конкретный пиксель кольца в

фокальной плоскости, будет пропорционально площади соответствующего сегмента зеркала, которую покрыл конус черенковского излучения.

Фокусное расстояние телескопа составляет $F = 4,75$ м. Тогда радиус черенковского кольца $R_{\text{пред}}$ в фокальной плоскости телескопа

$$\operatorname{tg} \theta_{\text{пред}} = \frac{R_{\text{пред}}}{F} \Leftrightarrow R_{\text{пред}} = F \operatorname{tg} \theta_{\text{пред}} = 475 \text{ см} * \operatorname{tg} 1,31^\circ = 10,86 \text{ см}.$$

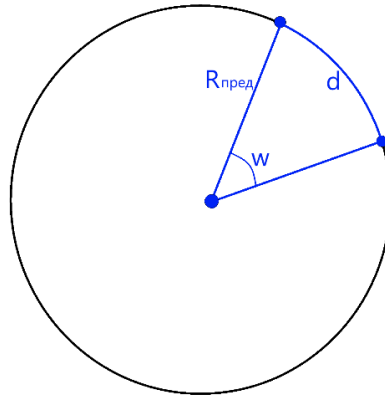


Рисунок 4 – Линейный d и угловой ω размеры пикселя в фокальной плоскости телескопа (кругом показано черенковское кольцо радиусом $R_{\text{пред}}$)

Линейный размер пикселя составляет $s = 3$ см, а угловой радиус поля зрения телескопа $i_{\text{пред}} = 4,8^\circ$. Так как угол $i_{\text{пред}}$ относительно мал, то в первом приближении будем считать, что все мюоны падают перпендикулярно поверхности зеркала, а значит все пиксели будут находиться на расстоянии $R_{\text{пред}}$ от центра кольца. Тогда угловой размер пикселя, то есть угол, под которым пиксель наблюдается из центра черенковского кольца, составит

$$\frac{\omega}{360^\circ} = \frac{s}{2\pi R_{\text{пред}}} \Leftrightarrow \omega = 360^\circ \frac{s}{2\pi R_{\text{пред}}} = 360^\circ \frac{3 \text{ см}}{2 * 3,14 * 10,86 \text{ см}} = 15,83^\circ.$$

Геометрическая интерпретация линейного и углового размеров пикселя представлена на рисунке 4.

5 Выделение событий от одиночных мюонов

5.1 Описание входных данных

Одиночные мюоны в используемом наборе моделирования с энергиями от 10 ГэВ до 100 ГэВ распределены по степенному закону с наклоном 2,6 и брошены под зенитными углами от 30 до 40 градусов на площадь радиусом 30 см вокруг центра телескопа. При этом максимальное отклонение мюонов от оси телескопа не превышает 5 градусов. При моделировании отклика использовалась процедура моделирования триггера и наложения экспериментального фона, о которой будет сказано далее.

Моделирование Монте-Карло выступает ключевым инструментом в исследованиях физики высоких энергий: оно помогает как оценить потенциал эксперимента, так и выступает основой для процедуры извлечения полезного сигнала. Процесс моделирования складывается из нескольких взаимосвязанных этапов.

Поскольку параметры первичной частицы (энергия, направление прихода, положение оси, глубина максимума развития ШАЛ и т.д.) в реальных событиях ШАЛ, зарегистрированных с помощью IACT, достоверно не известны, моделирование методом Монте-Карло, в котором все эти параметры заданы, играет ключевую роль на всех этапах эксперимента.

Это позволяет оценить эффективность регистрации, оптимизировать методы извлечения полезного сигнала, сформировать обучающие наборы данных для решения задач гамма-астрономии и оценить надежность полученных результатов.

Процедура моделирования включает в себя следующие этапы:

– Развитие ШАЛ в атмосфере. В данном случае конечным результатом моделирования является пространственное распределение черенковских фотонов от ШАЛ вблизи местоположения IACT телескопов. ШАЛ были смоделированы в CORSIKA v7.35 [4] с использованием GHEISHA-2002d [5]

для низкоэнергетических (ниже 80 ГэВ) и QGSJET-II-04 [6] для высокоэнергетических (выше 80 ГэВ) адронных взаимодействий.

– Распространение черенковских фотонов в оптической системе телескопа IAST и их преобразование в фотоэлектроны на фотокатоде. Этот этап реализован с помощью программного обеспечения TAIGA_optics [7]. Он учитывает количество и расположение сегментов отражателя, потери фотонов на зеркалах и входном окне камеры, а также квантовую чувствительность ФЭУ.

– Преобразование фотоэлектронов в электрические импульсы системы формирования триггера в камере IAST. Относительная чувствительность ФЭУ [8], вероятность возникновения послеимпульсного сигнала [9], а также фон ночного неба учитываются на основе экспериментальных измерений. При этом моделирование кодов АЦП не проводится, а моделируется сразу отклик детектора в фотоэлектронах.

После этапа добавления шума моделируемые события имеют конфигурацию, наиболее близкую к конфигурации экспериментально зарегистрированных событий ШАЛ [10].

К экспериментальным событиям, полученным с 3-го телескопа установки TAIGA-IAST на протяжении 26 часов наблюдения в течение сентября - октября 2022 года, применялась та же методика, что и к моделируемым событиям, начиная с клининга и заканчивая отборами по параметрам колец. Важное отличие при этом заключается в том, что в моделировании присутствуют только одиночные мюоны, в то время как в эксперименте присутствуют ещё и ШАЛ.

5.2 Критерии отбора событий

Как было показано ранее, радиус черенковского кольца, начиная с энергии $E_{\text{крит}} = 14,4$ ГэВ мы будем считать постоянным и равным $R_{\text{пред}} = 10,86$ см. Однако на практике, детектируется и множество других событий, вызванных ШАЛ и шумовыми событиями, которые в отличие от

черенковских колец мюонов не обладают радиусом, однако алгоритм тем не менее присваивает им его. Для отбора корректных событий используется три критерия:

- **Критерий величины радиуса** – допускается отклонение от теоретического значения в $R_0 = 2$ см;

- **Критерий равномерности окружности** – отбираются кольца со средним относительным отклонением точек от среднего значения радиуса не больше $\delta_H = 20\%$;

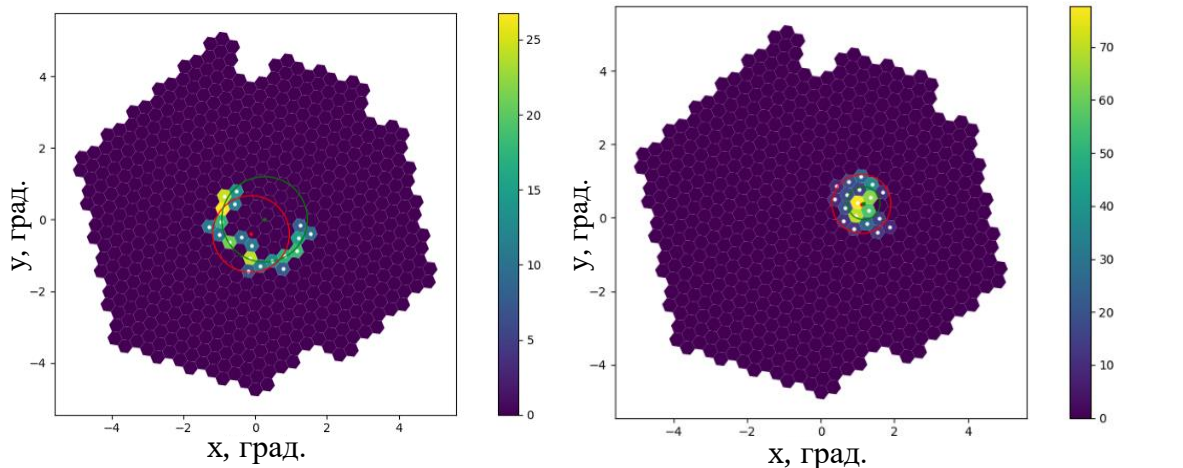
- **Критерий длины дуги** – из геометрических соображений она должна быть больше 180° .

5.3 Критерий величины радиуса черенковского кольца

Для определения радиуса колец используется два метода:

- **Грубый метод** – путём усреднения координат пикселей находится центр кольца и затем путём усреднения расстояний от пикселей до этого центра находится радиус кольца R и относительное отклонение пикселей δ_R (красные окружности на рисунках 5 и 6);

- **Преобразование Хафа [11]** – фазовое пространство координат пикселей разбивается на прямоугольные области, в каждой из которых считается радиус черенковского кольца R_H . Прямоугольник, обладающий наименьшим относительным отклонением δ_H – считается центром кольца. Данный метод требует значительно больших вычислительных возможностей по сравнению с грубым, однако является гораздо более эффективным (зелёные окружности на рисунках 5 и 6). Математическое сравнение алгоритмов аппроксимации в виде таблицы представлено в приложении А.



Событие №40-643 [эксперимент]

$$R = 8,87 \text{ см}, \delta_R = 27\%$$

$$R_H = 9,82 \text{ см} > 10,86 \text{ см} - 2 \text{ см} \Rightarrow \text{выполнен}$$

$$\delta_H = 14\% < 20\% \Rightarrow \text{выполнен}$$

Событие №9-8 [эксперимент]:

$$R = 6,66 \text{ см}, \delta_R = 46\%$$

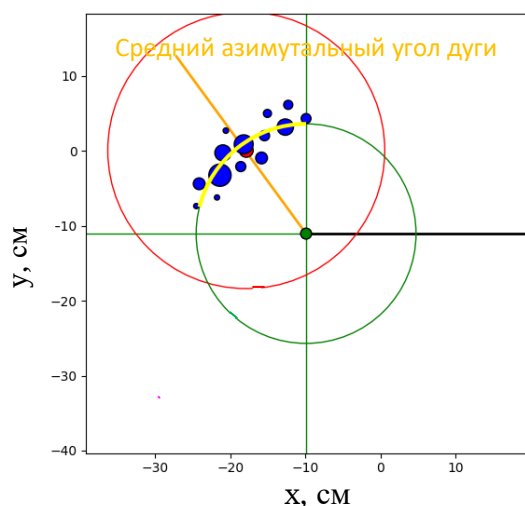
$$R_H = 3,72 \text{ см} < 10,86 \text{ см} - 2 \text{ см} \Rightarrow \text{НЕ выполнен}$$

$$\delta_H = 50\% > 20\% \Rightarrow \text{НЕ выполнен}$$

Рисунок 5 – Примеры использования критерия величины радиуса черенковского кольца (сетка шестиугольников представляет собой матрицу ФЭУ (пикселей) в фокальной плоскости телескопа; шкала интенсивности справа показывает, сколько фотонов упало в конкретный пиксель, красная окружность – мюонное кольцо, восстановленное грубым методом аппроксимации, зелёная же – преобразованием Хафа)

5.4 Критерий длины дуги кольца

Из геометрических соображений (приложение Д) для корректного выполнения мюонной калибровки длина дуги черенковского кольца должна быть больше 180° . В рамках реализованного в работе алгоритма вычисляются попарные расстояния между соседними пикселями, и наибольшее из них считается разрывом, а, соответственно, оставшаяся часть – дугой черенковского кольца $\Delta\omega_{arc}$. Примеры определения величины дуги представлены на рисунке 6.



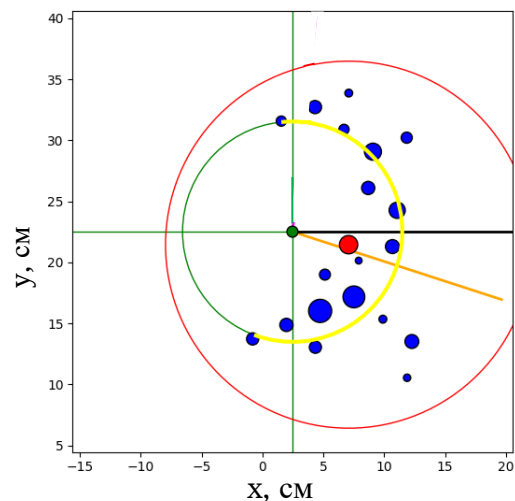
Событие №1-37 [эксперимент]:

$\omega_{c\,start} = 90^\circ$ (начало дуги)

$\omega_{c\,finish} = 166^\circ$ (конец дуги)

$\Delta\omega_{arc} = 76^\circ < 180^\circ$ (величина дуги)

критерий НЕ выполнен



Событие №6-2 [эксперимент]:

$\omega_{c\,start} = -110^\circ$ (начало дуги)

$\omega_{c\,finish} = 96^\circ$ (конец дуги)

$\Delta\omega_{arc} = 206^\circ > 180^\circ$ (величина дуги)

критерий выполнен

Рисунок 6 – Примеры использования критерия
 длины дуги черенковского кольца (синими точками обозначены пиксели,
 а их размер пропорционален количеству попавших в них фотонов;
 жёлтым показана величина дуги черенковского кольца,
 красная окружность – результат грубого метода аппроксимации,
 зелёная же – преобразования Хафа)

5.5 Результаты отбора колец

На основании описанных выше критериев, имеющиеся массивы моделируемых и экспериментальных событий (пункт 5.1) были подвергнуты отборам, результаты которых представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты отбора колец

Критерий	Моделирование	%	Эксперимент	%
Наблюдаемые события	Только мюоны	-	Мюоны и ШАЛы	-
Всего событий брошено	1 060 200	100	-	-
Прошло триггер телескопа	100 000	9	3 982 486	100
Прошло минимизацию	79 631	8	3 094 802	78
Отбор по дуге	4 591	0,4	244 022	6
Отбор по радиусу	15 027	1,4	297 064	7
Двойной отбор	1 068	0,10	1 826	0,05

Как видно, при сопоставимой исходной статистике моделируемых и экспериментальных событий, итоговое количество событий после всех отборов в обоих случаях оказывается одного порядка. Различие объясняется тем, что в эксперименте помимо одиночных мюонов наблюдаются события ШАЛ от различных ядер, что хорошо видно на рисунке 7.

5.6 Распределение колец по радиусу

Описанная выше методика аппроксимации колец была применена к массиву событий моделирования и массиву экспериментальных событий. С учётом отбора по величине дуги были построены распределения колец по радиусу, представленные на рисунке 7.

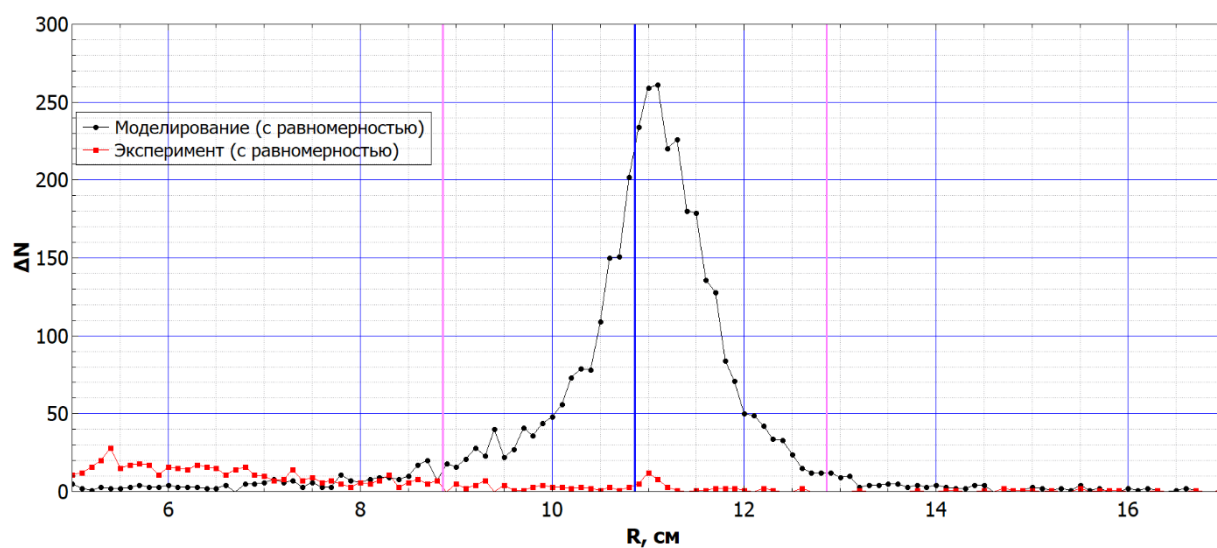
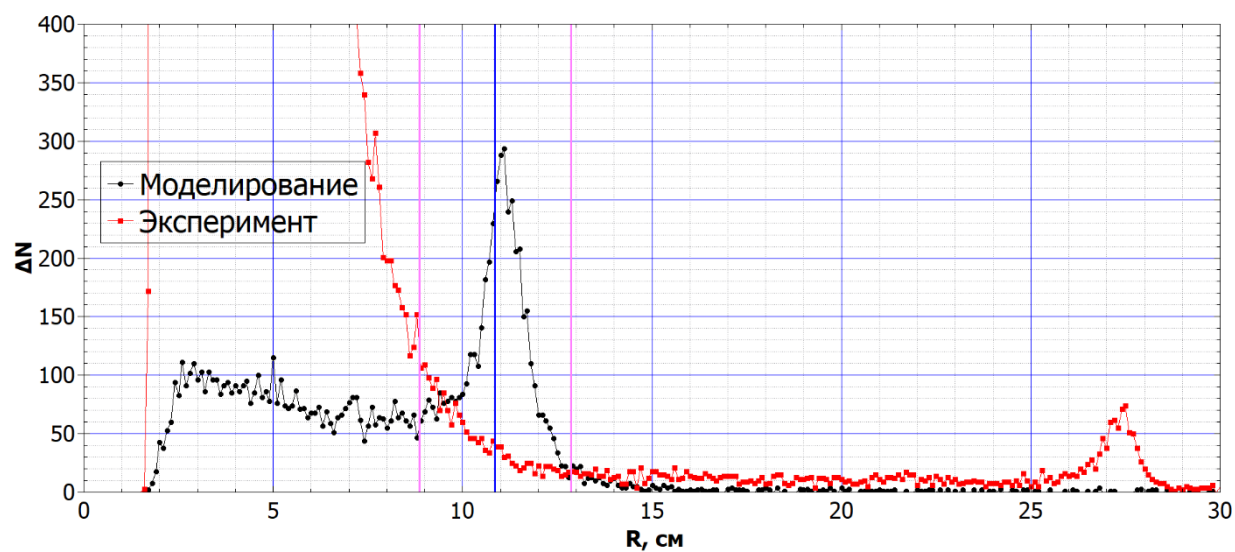


Рисунок 7 – Распределение моделируемых и экспериментальных событий с отбором по радиусу (а – без отбора по равномерности, б – с отбором по равномерности); синяя абсцисса – теоретическое значение радиуса; розовые абсциссы – допустимое отклонение от теоретического значения

В распределении событий моделирования отчётливо прослеживается пик в районе теоретического значения, в то время как в распределении экспериментальных событий этот пик невозможно выделить из-за шумов (рисунок 7а). После применения критерия равномерности окружности в экспериментальном распределении наблюдается слабая особенность в области ожидаемого радиуса мюонного кольца (рисунок 7б). Однако её статистическая значимость в данной работе отдельно не оценивалась, поэтому этот результат следует рассматривать только как качественное указание на возможное присутствие событий одиночных мюонов, а не как достоверное выделение мюонного пика.

На рисунке 7а пик в районе 28 см, вероятнее всего, объясняется событиями ШАЛ, которые представляют из себя сплошные эллипсы, а потому полностью отсекаются критерием равномерности окружности.

6 Мюонная калибровка

Так как эффективность оптической системы телескопа со временем ухудшается ввиду естественного загрязнения и старения материала, оказывается, крайне важным иметь способ для её периодического уточнения. Интегральная квантовая чувствительность телескопа может быть определена путём проведения измерений на телескопе с источником, спектр которого хорошо известен. Таким источником на практике может выступать черенковское излучение одиночной частицы.

В результате взаимодействия первичных космических лучей с атмосферой рождается множество вторичных частиц, значимую часть которых составляют мюоны и электроны. Так как радиационные потери мюонов значительно ниже, чем у электронов, они в большем количестве достигают поверхности Земли и при этом обладают энергией, достаточной для рождения черенковского излучения, что делает одиночные мюоны крайне удобным инструментом для определения интегральной квантовой чувствительности телескопа.

Методика оценки интегральной квантовой чувствительности с помощью мюонов аналогичная той, что реализована в данной работе, применяется в большинстве ИАСТ обсерваторий. Во многих аспектах представленная в данной работе модель отклика ИАСТ телескопа схожа с моделью, описанной, например, в работе обсерватории H.E.S.S., однако есть несколько существенных отличий, описанных в пункте 6.2.

Процедура выделения событий одиночных мюонов в системе H.E.S.S. представляет собой многоэтапный процесс обработки данных, нацеленный на получение чистой выборки искомым событий [12].

Ключевой элемент всей процедуры – участие в подгонке всех пикселей с интенсивностью выше порога. Благодаря этому удаётся эффективно отбрасывать события, загрязнённые адронными ливнями, даже при их слабом проявлении. В итоге достигается высокая чистота выборки одиночных

мюонов, что критически важно для достоверности последующих физических выводов.

6.1 Формула Тамма-Франка

Количество черенковских фотонов, излучаемых мюоном на длине пути h по всем азимутальным углам, может быть вычислено по формуле Тамма-Франка [13]

$$N = 2\pi\alpha h \sin^2 \theta_{\text{пред}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{d\lambda}{\lambda^2},$$

α – постоянная тонкой структуры, h – длина траектории мюона, λ – длина волны испускаемых фотонов.

Для того чтобы получить число черенковских фотонов, которые будут зарегистрированы телескопом, полученный результат, необходимо умножить на выше описанную интегральную квантовую чувствительность телескопа ψ

$$N_{\text{рег}} = 2\pi\alpha\psi h \sin^2 \theta_{\text{пред}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{d\lambda}{\lambda^2}, 0 < \psi < 1.$$

Для того чтобы получить количество черенковских фотонов, попавших в заданный пиксель камеры телескопа, полученный результат необходимо умножить на долю площади поверхности зеркала $\Delta\sigma$, фотоны с которой попадут в этот пиксель

$$I = 2\pi\alpha\psi h \Delta\sigma \sin^2 \theta_{\text{пред}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{d\lambda}{\lambda^2}, 0 < \Delta\sigma < 1.$$

Методика расчёта длины траектории мюона h , попавшей на поверхность зеркала, а также методика расчёта доли площади поверхности зеркала $\Delta\sigma$, фотоны с которой попадут в заданный пиксель, будут описаны в двух следующих главах.

6.2 Сегментная функция

Для расчёта доли площади поверхности зеркала, собирающей свет в заданный пиксель, в данной работе была введена сегментная функция, которая будет получена далее исходя из оптической схемы телескопа.

Для сравнения, в подходе, описанном в [12], используется лишь хордовая функция, учитывающая длину траектории мюона, свет с которой собирается зеркалом, в то время как в настоящей работе помимо нее присутствует также и сегментная функция, учитывающая неравномерность распределения света по сегментам отражателя телескопа*. Кроме того, в подходе, описанном в [12], принимается равенство зеркальных и прицельных углов, о которых будет подробнее сказано в пункте 6.2.1.

6.2.1 Расчёт граничных углов пикселя

Так как угловое распределение пикселей черенковского кольца в фокальной плоскости телескопа равномерно, то ввиду геометрии сферического зеркала и угловое распределение соответствующих им сегментов зеркала тоже будет равномерным. Это даёт нам возможность рассчитать граничные углы пикселя, в который попал черенковский фотон.

В камере телескопа задана система координат (x', y') , относительно которой для любой точки можно ввести азимутальный угол, который мы будем обозначать индексом s . Ранее с помощью преобразования Хафа были найдены координаты центра черенковского кольца в камере телескопа (x_c, y_c) .

*Подробнее см. раздел 6.2.3, рисунок 13.

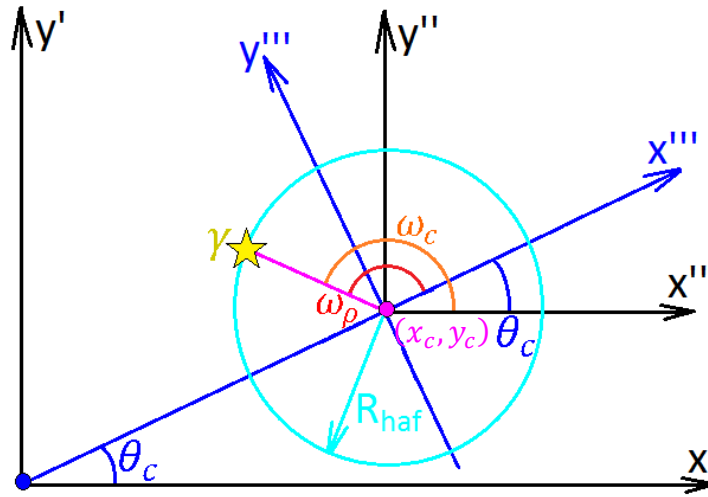


Рисунок 8 – Связь углов, характеризующих пиксель черенковского кольца, в разных системах координат

$((x', y'))$ - камера телескопа, $((x'', y''))$ - смещённая система координат (чёрная), $((x''', y'''))$ - мюонная система координат (синяя), γ – пиксель, в который попал черенковский фотон, R_{haf} - радиус черенковского кольца (голубой))

Азимутальный угол этого центра в камере телескопа будем называть – **центральный**

$$\theta_c = \arg(x_c, y_c).$$

Азимутальный угол произвольного пикселя в **смещённой** системе координат $((x'', y''))$ мы будем называть – **камерным**

$$\omega_c = \arg(x_0 - x_c, y_0 - y_c).$$

Характерным параметром траектории падения мюона на зеркало телескопа является **прицельный параметр** ρ , представляющий собой расстояние между точкой пересечения отражателя мюоном и центром зеркала. Систему координат $((x''', y'''))$, абсцисса которой направлена от центра камеры к центру мюонного кольца, мы будем называть – **мюонной**, относительно которой также можно ввести азимутальный угол, который мы будем обозначать индексом ρ . Азимутальный угол произвольного пикселя в мюонной системе координат мы будем называть – **прицельным**

$$\omega_\rho = \omega_c - \theta_c.$$

Систему координат на поверхности сферического зеркала (x, y) , абсцисса которой направлена от центра отражателя к точке пересечения мюоном плоскости отражателя, мы будем называть – **зеркальной**. Для произвольного фотона, падающего на зеркало, в ней можно ввести азимутальный угол φ , который мы будем называть – **зеркальным**. Так как сферическое зеркало при падении лучей сохраняет их углы, то на поверхности зеркала мы также можем ввести прицельный угол ω_ρ . Относительное расположение всех этих систем координат показано на рисунке 8.

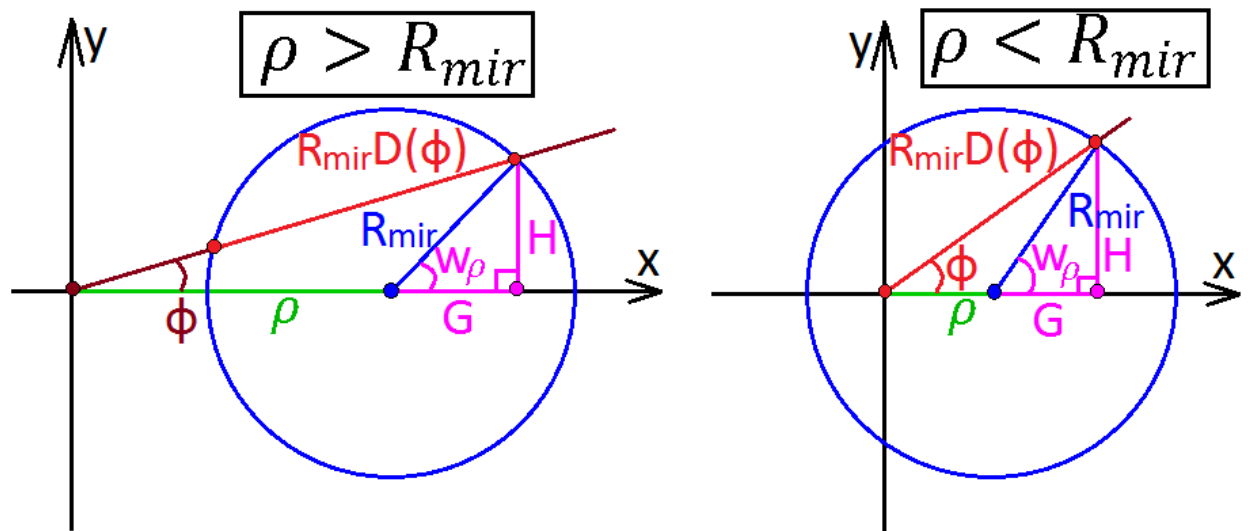


Рисунок 9 – Связь между азимутальными углами выбранной точки поверхности зеркала относительно его центра ω_ρ и относительно центра черенковского кольца φ , где прицельный параметр мюона ρ (зелёный), хорда $D(\varphi)$, вдоль которой свет собирается в одну и ту же точку фокальной плоскости (красная), R_{mir} – радиус отражателя телескопа (синий), G и H – горизонтальная и вертикальная соответственно проекции радиуса (розовые). Рисунок представляет собой вертикальную проекцию рисунка 3, где центр координат соответствует точке падения мюона, а синяя окружность соответствует краям отражателя телескопа)

Исходя из рисунка 9, можно найти связь между прицельным и зеркальным углами (приложение Г)

$$\varphi(\omega_\rho) = \arg\left(\frac{\rho}{R_{mir}} + \cos \omega_\rho, \sin \omega_\rho\right).$$

Отметим, что данная функция является нечётной, а, значит, если какая-либо функция является чётной или нечётной относительно ω_ρ , то он будет являться таковой и относительно φ

$$\varphi(-\omega_\rho) = -\varphi(\omega_\rho)$$

Теперь мы можем рассчитать граничные зеркальные углы произвольного пикселя

$$\varphi_\pm = \arg\left(\frac{\rho}{R} + \cos\left(\omega_\rho \pm \frac{\Delta\omega_{пред}}{2}\right), \sin\left(\omega_\rho \pm \frac{\Delta\omega_{пред}}{2}\right)\right)$$

Тогда угловой размер пикселя в зеркальной системе координат будет равен разности их граничных зеркальных углов

$$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_-.$$

6.2.2 Расчёт длины хорды в плоскости отражателя

Число черенковских фотонов, попавших в конкретный пиксель кольца в фокальной плоскости, в первом приближении будет пропорционально длине хорды, представляющей собой часть проекции траектории мюона, попавшей на окружность зеркала.

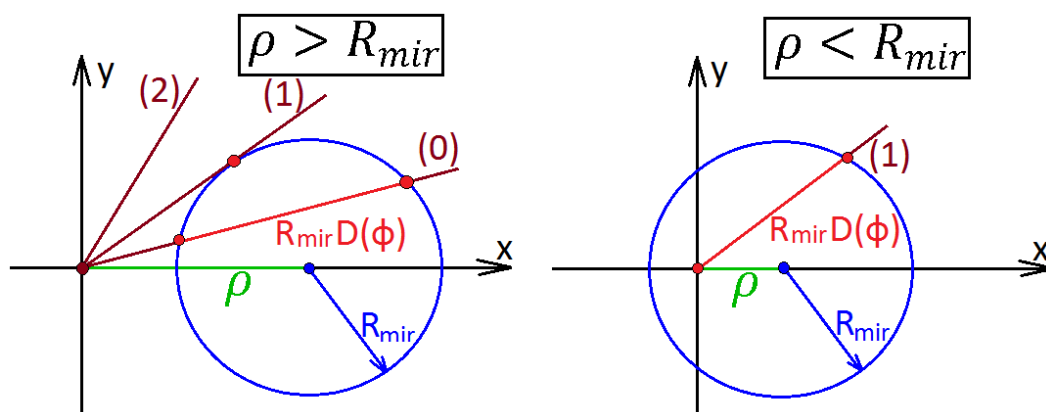


Рисунок 10 – В зависимости от азимутального угла луч может пересекать окружность зеркала от нуля до двух раз в случае, когда $\rho > R_{mir}$, и строго один раз, когда $\rho < R_{mir}$ (остальные детали аналогичны рисунку 9)

Как видно из рисунка 10, если центр черенковского кольца лежит внутри окружности зеркала ($\rho < R_{mir}$), то хорда будет пересекать окружность зеркала один раз при любом значении прицельного угла ω_ρ , то есть свет будет собираться в пиксель со всех прицельных углов. Именно этот случай представляет интерес в данной работе.

Если же центр черенковского кольца лежит вне окружности зеркала ($\rho > R_{mir}$), то в зависимости от величины прицельного угла ω_ρ можно выделить три случая относительного расположения хорды и окружности зеркала:

- $\varphi < \varphi_{пред}$ (хорда пересекает окружность зеркала два раза);
- $\varphi = \varphi_{пред}$ (хорда касается окружности зеркала в одной точке);
- $\varphi > \varphi_{пред}$ (хорда не пересекает окружность зеркала).

Предельный зеркальный угол соответствует случаю, когда хорда касается окружности зеркала в одной точке.

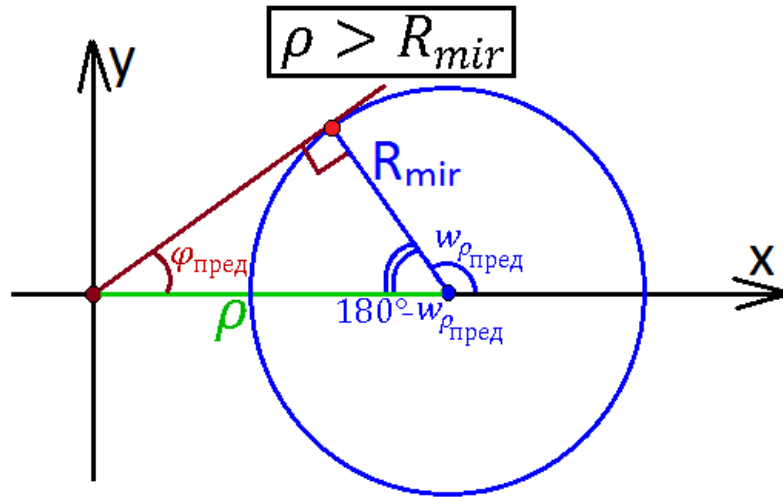


Рисунок 11 – Предельный зеркальный угол, возникающий в случае касания луча окружности зеркала, в этом случае связь прицельного $\omega_{\rho_{\text{пред}}}$ и зеркального $\varphi_{\text{пред}}$ угла оказывается тривиальной (остальные детали аналогичны рисунку 9)

Исходя из рисунка 11, можно найти связь между предельным прицельным и предельным зеркальным углами

$$\varphi_{\text{пред}} + (180^\circ - \omega_{\rho_{\text{пред}}}) = 90^\circ \Leftrightarrow \omega_{\rho_{\text{пред}}} - \varphi_{\text{пред}} = 90^\circ.$$

Таким образом, при зеркальных углах больших $\varphi_{\text{пред}}$, черенковский свет зеркалом собираться не будет.

Приравняв уравнения хорды и окружности поверхности зеркала, можно получить искомую длину хорды в плоскости отражателя (приложение Д)

$$D(\varphi) = \begin{cases} \frac{\rho}{R_{\text{mir}}} \cos \varphi + \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{\text{mir}}^2} \sin^2 \varphi}, \rho < R_{\text{mir}} \\ 2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{\text{mir}}^2} \sin^2 \varphi}, \rho > R_{\text{mir}} \end{cases}.$$

Для удобства анализа этой функции, все её значения нормированы на радиус зеркала телескопа. Таким образом, она может принимать значения от 0 до 1.

Отметим, что данная функция является чётной, а значит интегрирование этой функции от $-\varphi$ до φ эквивалентно удвоенному интегрированию её от 0 до φ

$$D(-\varphi) = D(\varphi)$$

Используя ОДЗ этих уравнений, можно получить в явном виде значение предельного зеркального угла (приложение Д)

$$\varphi_{\text{пред}} = \arcsin \frac{R_{\text{mir}}}{\rho}, \rho > R_{\text{mir}}$$

6.2.3 Расчёт площади сегмента зеркала, собирающего свет в один пиксель

Теперь, зная граничные зеркальные углы пикселя и зависимость длины хорды от зеркального угла, можно найти площадь зеркального сегмента, собирающего свет в заданный пиксель.

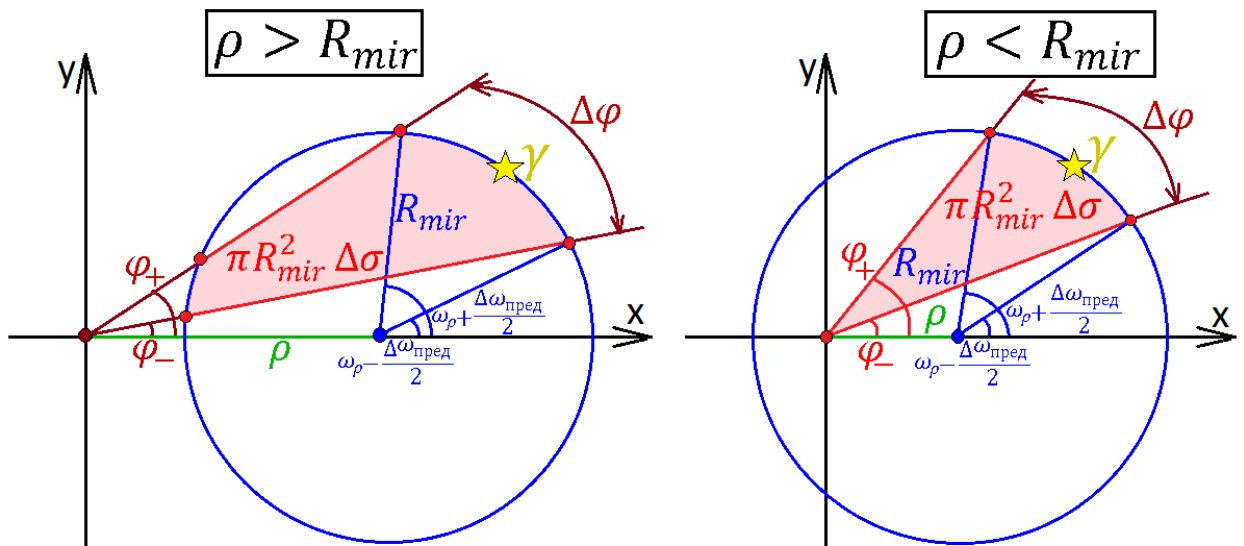


Рисунок 12 – Расчёт площади сегмента пикселя, собирающего свет в заданный пиксель (γ – пиксель, прицельный параметр ρ (зелёный), ограничивающие сегмент хорды φ_+ и φ_- (красные), R_{mir} – радиус отражателя телескопа (синий))

Площадь сегмента зеркала, собирающего свет в диапазоне зеркальных углов от 0 до φ , показанного на рисунке 12, можно получить, проинтегрировав зависимость длины хорды от зеркального угла в этом диапазоне. Результат интегрирования можно выразить через **сегментную функцию** (приложение Е)

$$\sigma(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left(\varphi + \frac{\rho^2}{2R_{mir}^2} \sin 2\varphi + \arcsin \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \right) + \frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right), \rho < R \\ \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \right) + \frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right), \rho > R \end{cases}.$$

Для удобства анализа этой функции, все её значения нормированы на площадь зеркала телескопа. Таким образом, она может принимать значения от 0 до 1.

Отметим, что данная функция является нечётной, а значит подстановка в неё значений от $-\varphi$ до φ эквивалентна удвоенной подстановки значений от 0 до φ

$$\sigma(-\varphi) = -\sigma(\varphi).$$

Как было показано ранее, в случае, когда центр черенковского кольца лежит внутри окружности зеркала ($\rho < R_{mir}$), свет собирается в пиксель со всех прицельных углов, а, значит, подставляя в сегментную функцию пределы от -180° до 180° , мы получим полную площадь зеркала, то есть 1

$$\Delta\sigma = \sigma(\pi) - \sigma(-\pi) = 2\sigma(\pi) = 1.$$

В случае же, когда центр черенковского кольца лежит вне окружности зеркала ($\rho > R_{mir}$), свет будет собираться только в диапазоне углов от $-\varphi_{пред}$ до $\varphi_{пред}$, а, значит, подставляя их, мы также получим полную площадь зеркала

$$\Delta\sigma = \sigma(\varphi_{пред}) - \sigma(-\varphi_{пред}) = 2\sigma(\varphi_{пред}) = 1.$$

Теперь, зная сегментную функцию, мы можем найти относительную площадь сегмента зеркала, собирающего свет в пиксель, ограниченный зеркальными углами φ_- и φ_+

$$\Delta\sigma = |\sigma(\varphi_+) - \sigma(\varphi_-)|.$$

Пример реального распределения света по пикселям, описываемого сегментной функцией, представлен на рисунке 13.

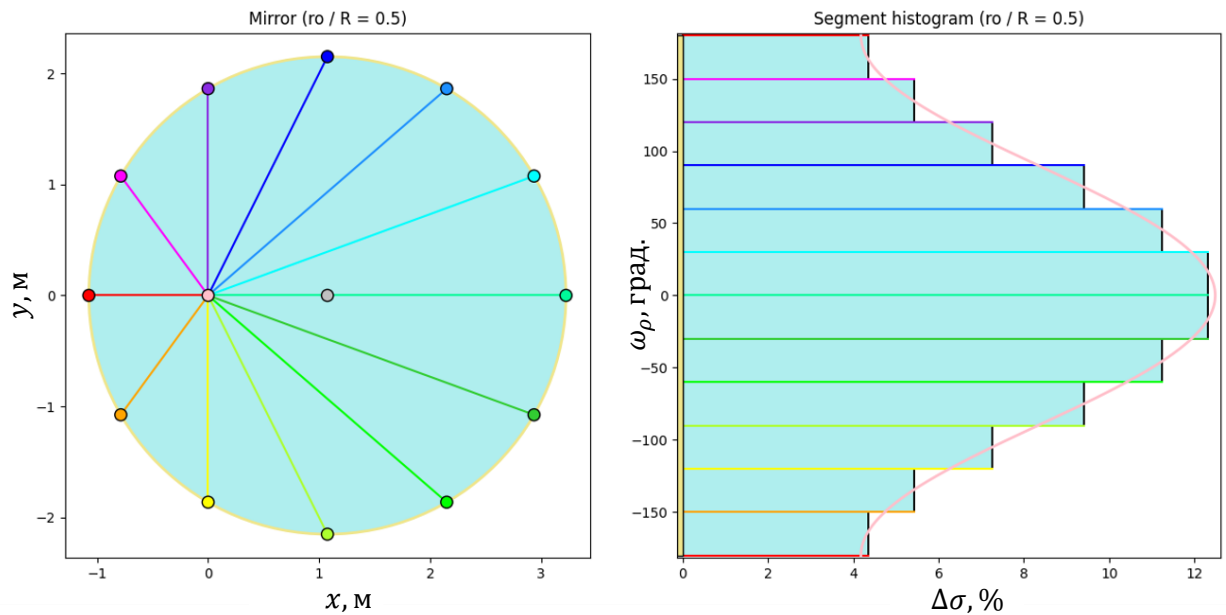


Рисунок 13 – Пример распределения света по пикселям в случае прицельного параметра, равного половине радиуса зеркала (а – распределение площади отражателя между сегментами относительно точки падения, удалённой от центра на половину радиуса, б – соответствующие значения сегментной функции). Для наглядности, периметр отражателя разделён на равные угловые интервалы цветными линиями, которые визуальнo позволяют соотнести площадь сегментов зеркала на разных частях графика

6.2.4 Критические значения прицельного параметра

При анализе поведения сегментной функции, оказываются очень наглядными некоторые значения прицельного параметра, при которых эта функция приобретает простой вид:

- Случай нулевого прицельного параметра ($\rho = 0$);
- Случай граничного прицельного параметра ($\rho = R_{mir}$);
- Случай бесконечного прицельного параметра ($\rho \rightarrow \infty$).

В таблице 2 представлены конкретные значения зеркальных углов, длины хорды и сегментной функции при критических значениях прицельного угла.

Таблица 2 – Критические значения прицельного параметра

ω_ρ	$\rho = 0$	$\rho = R_{mir}$	$\rho \rightarrow \infty$
$\varphi(\omega_\rho)$	ω_ρ	$\frac{\omega_\rho}{2}$	0
$\Delta\varphi(\omega_\rho)$	$\Delta\omega_{пред}$	$\frac{\Delta\omega_{пред}}{2}$	0
$D(\omega_\rho)$	1	$2 \cos \frac{\omega_\rho}{2}$	$2 \cos \omega_\rho $
$\sigma(\omega_\rho)$	$\frac{\omega_\rho}{2\pi}$	$\frac{\omega_\rho + \sin \omega_\rho}{2\pi}$	$\frac{1}{\pi} \left(\omega_\rho + \frac{\sin 2\omega_\rho}{2} \right), \omega_\rho < \frac{\pi}{2}$ $\frac{1}{\pi} \left(\pi - \omega_\rho - \frac{\sin 2\omega_\rho}{2} \right), \frac{\pi}{2} < \omega_\rho < \pi$
$\Delta\sigma(\omega_\rho)$	$\frac{\Delta\omega_{пред}}{2\pi}$	$\frac{\frac{\Delta\omega_{пред}}{2} + \sin \frac{\Delta\omega_{пред}}{2} \cos \omega_\rho}{\pi}$	$\frac{\Delta\omega_{пред} + \sin \Delta\omega_{пред} \cos 2\omega_\rho}{\pi}$

6.3 Длина траектории мюона

Длину траектории мюона $h(\varphi)$, представленную на рисунке 14, фотоны с которой попадают в заданный пиксель можно выразить через длину хорды $D(\varphi)$, рассмотренную в предыдущей главе

$$h(\varphi) = \frac{R_{mir} D(\varphi)}{\operatorname{tg} \theta_{пред}}.$$

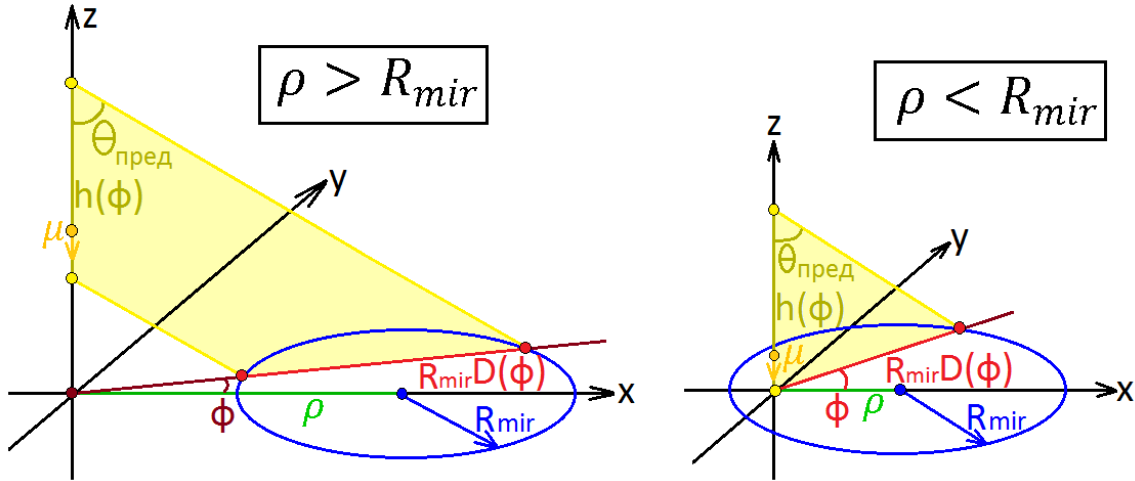


Рисунок 14 – Геометрическая интерпретация длины траектории мюона $h(\varphi)$, фотоны с которой падают на зеркало (схема аналогична рисунку 9, только теперь вид сбоку, а траектория падения мюона направлена противоположно оси z)

6.4 Определение пропускной способности телескопа

Теперь мы можем в явном виде выразить число черенковских фотонов, попавших в конкретный пиксель кольца. Для этого используем последний полученный вид формулы Тамма-Франка в пункте 6.1

$$I = \pi \alpha \psi D R_{mir} \Delta \sigma \sin 2\theta_{пред} \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \frac{d\lambda}{\lambda^2}.$$

В случае попадания мюона в центр зеркала при отсутствии световых потерь это выражение приобретает простой вид

$$I_{\text{пиксель}} = \frac{\alpha R_{mir} \Delta \omega_{пред} \sin 2\theta_{пред}}{2} \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \frac{d\lambda}{\lambda^2} = 83 \text{ кванта.}$$

Полное же число фотонов, попадающих на зеркало в этом случае оказывается равным

$$I_0 = \pi \alpha R_{mir} \sin 2\theta_{пред} \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \frac{d\lambda}{\lambda^2} = 1878 \text{ квантов.}$$

Для вычисления пропускной способности а также прицельного параметра, который тоже неизвестен, было использовано преобразование Хафа, алгоритм применения которого будет показан далее.

Рассмотрим событие, содержащее n пикселей, имеющих амплитуду m_k , где $1 \leq k \leq n$. Будем искать значение прицельного параметра ρ в пределах от 0 см до $\rho_{max} = R_{mir}$, а значение пропускной способности ψ в пределах от 0% до 100%.

Разобьём фазовый прямоугольник, ограниченный пределами изменения соответствующих переменных, на d частей по каждой оси с интервалами

$$\Delta\rho = \frac{\rho_{max}}{d}, \Delta\psi = \frac{100\%}{d}.$$

Найдём значения границ частей разбиения

$$\rho_i = i\Delta\rho, \psi_j = j\Delta\psi, 0 \leq i \leq d, 0 \leq j \leq d.$$

Вычислим теоретическое значение амплитуды для каждого пикселя с помощью вышеописанной модели

$$I_{i,j,k} = I_0 D(\rho_i, \omega_k) \Delta\sigma(\rho_i, \omega_k) \psi_j.$$

Вычислим суммарное квадратичное отклонение амплитуды отдельных пикселей от теоретического значения

$$(\Delta I_{i,j})^2 = \sum_{k=1}^n (m_k - I_{i,j,k})^2.$$

Узел разбиения (ρ_i, ψ_j) , имеющий наименьшее суммарное квадратичное отклонение амплитуды $\Delta I_{i,j}$ будем считать оптимальным. Тогда искомые параметры

$$\rho = \rho_i, \psi = \psi_j, \Delta I_{i,j} = \Delta I_{i,j_{min}}.$$

На основании аппроксимации можно найти среднюю амплитуду пикселей кольца

$$\bar{I} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k I_k}{\sum_{k=1}^n m_k}.$$

Это значение можно сравнить с усредненным значением амплитуды всех пикселей кольца

$$\bar{m} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k}{n}.$$

Наконец, можно найти относительное среднеквадратичное отклонение, которое позволяет отобрать события с высоким соответствием распределения амплитуды в кольце сегментной функции

$$\delta_I = \frac{\Delta I}{\bar{I}}.$$

Примеры наложения теоретических кривых на пиксели экспериментальных колец представлены на рисунке 15. Более подробные вычисления представлены в приложении Ж.

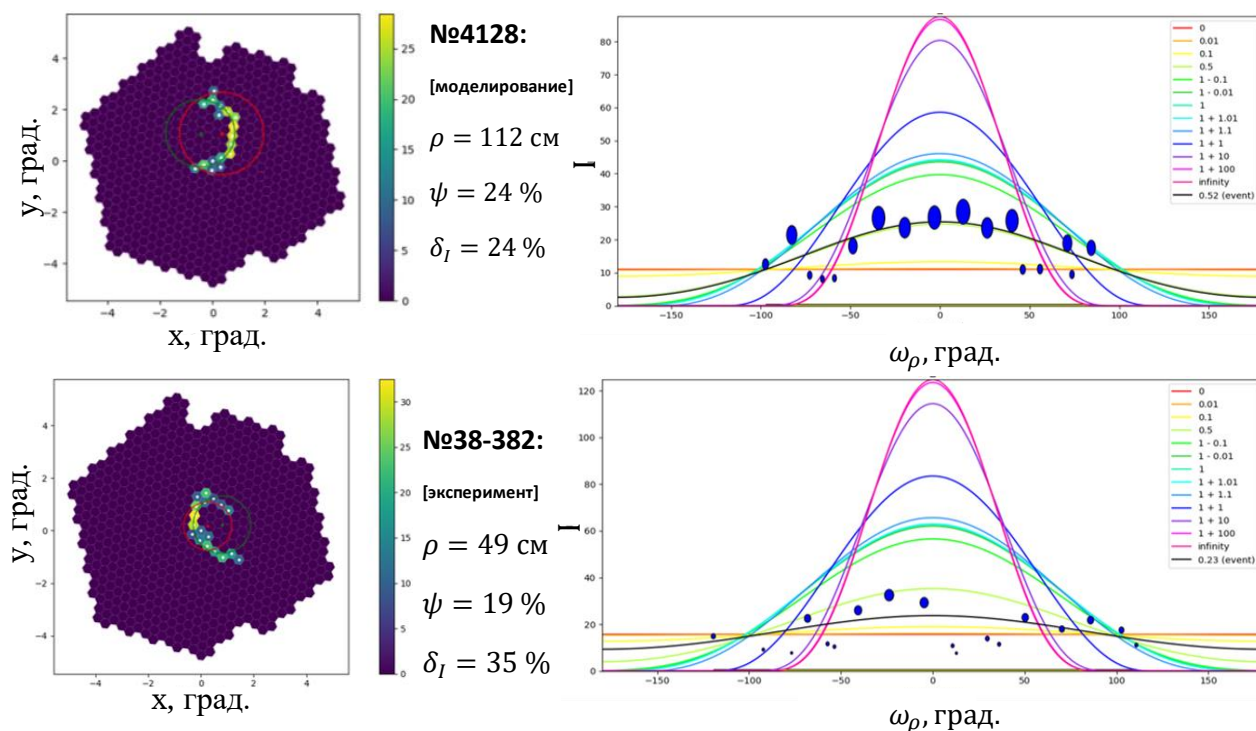


Рисунок 15 – Примеры определения прицельного параметра события и интегральной квантовой чувствительности телескопа с помощью алгоритма, реализованного в данной работе (слева показаны события в фокальной плоскости телескопа, шестиугольниками показаны отдельные пиксели; шкала интенсивности справа показывает, сколько фотонов упало в конкретный пиксель, справа показана процедура аппроксимации измеренных амплитуд пикселей теоретической кривой, цветными кривыми показаны различные варианты прицельного параметра, чёрная же кривая – показывает оптимальное его значение, размер точек справа показывает их статистический вес, то есть интенсивность; за нормировку по высоте отвечает интегральная квантовая чувствительность)

6.5 Распределение квантовой эффективности

Описанная выше методика определения интегральной квантовой чувствительности и прицельного параметра была применена к массиву событий моделирования и массиву экспериментальных событий. С учётом отборов по величине дуги и по величине радиуса были построены распределения колец по квантовой эффективности, представленные на рисунке 16. Также на рисунке представлена прямая оценка квантовой эффективности, полученная на основе потоков фотонов, заложенных в моделирование, далее для краткости её распределение будет называться «теоретическим».

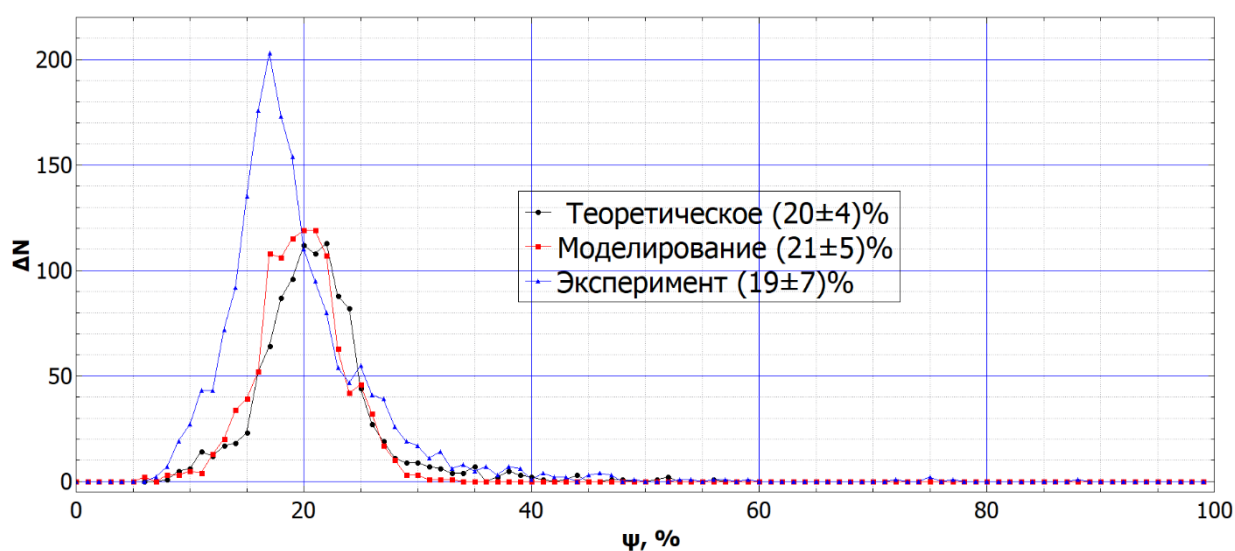


Рисунок 16 – Распределение интегральной квантовой чувствительности ψ моделируемых и экспериментальных событий (наблюдается согласие средних значений на основе трёх различных источников данных)

Как видно из графика, среднее теоретическое, экспериментальное и моделируемое значение квантовой эффективности совпадают в пределах погрешности.

Полученное согласие модельной и экспериментальной оценок интегральной квантовой чувствительности указывает на потенциальную применимость предложенной методики. Вместе с тем из-за отсутствия достоверной идентификации одиночных мюонов в экспериментальной выборке полученное значение для экспериментальных данных следует рассматривать как предварительную оценку. Для перехода к полноценной калибровке необходима дополнительная оптимизация критериев отбора и оценка частоты мюонной выборки.

За экспериментальное время (26 часов) исходя из теоретической оценки (396 мюонов в час), приведённой в 3-й главе, на зеркало телескопа должно упасть порядка 10 000 мюонов. Так как из 1 060 200 событий, брошенных в моделировании, триггер и двойной отбор прошло лишь 1068 событий, то полученный результат следует помножить на это соотношение, тогда получится лишь около 10 мюонов, в то время как двойной отбор в эксперименте прошло 1 826 событий, что указывает на необходимость дальнейшей оптимизации критериев отбора и оценки их эффективности на экспериментальных данных.

Заключение

В рамках данной работы:

- было оценено ожидаемое количество регистрируемых мюонных колец телескопом в единицу времени;
- был разработан алгоритм выделения изображений от одиночных мюонов, регистрируемых телескопом TAIGA-IACST;
- была разработана математическая модель распределения интенсивности черенковского излучения по дуге кольца;
- была проведена оценка интегральной квантовой чувствительности третьего телескопа установки TAIGA-IACST по данным эксперимента и моделирования.

На основании аппроксимации распределений квантовой эффективности были получены следующие усреднённые значения этой величины:

- На основании теоретических данных (данных, закладываемых в моделирование): $\psi = 20 \pm 4\%$;
- На основании данных моделирования: $\psi = 21 \pm 5\%$;
- На основании экспериментальных данных: $\psi = 19 \pm 7\%$.

Экспериментальное значение следует рассматривать, как предварительное, для более достоверной оценки необходима дополнительная оптимизация критериев отбора событий.

Список использованной литературы

1 Kuzmichev L. A., Astapov I. I., Bezyazeev P. A. et al. TAIGA gamma observatory: Status and prospects // *Physics of Atomic Nuclei*. 2018. Jul. Vol. 81, no. 4. P. 497.

2 Kuzmichev L., Astapov I., Bezyazeev P. et al. Tunka Advanced Instrument for cosmic rays and Gamma Astronomy (TAIGA): Status, results and perspectives // *EPJ Web of Conferences*. 2017. Vol. 145. P. 01001. Access mode: <https://doi.org/10.1051/epjconf/201714501001>.

3 De Pascale M. P., Morsell A., P. Picozza et al. Absolute Spectrum and Charge Ratio of Cosmic Ray Muons in the Energy Region From 0.2 GeV to 100 GeV at 600 m Above Sea Level // *Journal of geophysical research*, Vol. 98, no. A3, Pages 3501 – 3507, March 1, 1993.

4 <https://doi.org/10.5445/IR/270043064>

5 Fesefeldt, H.S., PITHA-85-02, 1985, p. 372.

6 Ostapchenko, S., *Phys. Rev. D*, 2011, vol. 83, no. 1, p. 014018.

7 A. A. Grinyuk, E. B. Postnikov, and L. G. Sveshnikova, *Phys. At. Nucl.* 83, 262 (2020).
<https://doi.org/10.1134/s106377882002012x>

8 Lubsandorzhev N., Astapov I., Bezyazeev P. et al. Camera of the first TAIGA-IACT: construction and calibration // *Proceedings of 35th International Cosmic Ray Conference - PoS(ICRC2017)*. - Sissa Medialab, 2017 -Aug. -Access mode.
<https://doi.org/10.22323/1.301.0757>.

9 Mirzoyan R., Lorenz E., Petry D., Prosch C. // *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A*. 1997. V. 387 (1). P. 74.
[https://doi.org/10.1016/S0168-9002\(96\)00964-3](https://doi.org/10.1016/S0168-9002(96)00964-3)

10 P. A. Volchugov, A. P. Kryukov, E. O. Gres et al. Influence of IACT Data Preprocessing Methods on the Accuracy of Reconstruction of EAS Parameters // ISSN 1063-7788, *Physics of Atomic Nuclei*, 2025, Vol. 88, No. 10, pp. 1934–1939. Pleiades Publishing, Ltd., 2025.

11 Duda R. O., Hart P. E. Use of the Hough Transformation to Detect Lines and Curves in Pictures. Commun. ACM, 1972, vol. 15, no. 1, pp. 11–15.

12 R. CHALME-CALVET, M. DE NAUROIS, J.-P. TAVERNET, FOR THE H.E.S.S. COLLABORATION. Muon efficiency of the H.E.S.S. telescope // ATMOHEAD WORKSHOP, 2013.

13 Мухин К.Н. Экспериментальная ядерная физика, Т.1,2.-М.: Энергоатомиздат, 1996.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Алгоритмы аппроксимации

Грубая формула	Преобразование Хафа	Квантовая эффективность
Область изменения переменных		
$x_{min} < x < x_{max}$ $y_{min} < y < y_{max}$	$x_{min} < x < x_{max}$ $y_{min} < y < y_{max}$	$0 < \rho < R_{mirror}$ $0 < \psi < 1$
Диаметр разбиения		
-	$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{d}$ $\Delta y = \frac{y_{max} - y_{min}}{d}$	$\Delta \rho = \frac{R_{mirror}}{d}$ $\Delta \psi = \frac{1}{d}$
Границы частей разбиения		
-	$x_i = x_{min} + i\Delta x, 0 \leq i \leq d$ $y_i = y_{min} + j\Delta y, 0 \leq j \leq d$	$\rho_i = i\Delta \rho, 0 \leq i \leq d$ $\psi_j = j\Delta \psi, 0 \leq j \leq d$
Массив среднеквадратичных отклонений		
-	$(R_{i,j,k})^2 = (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_j)^2$ $R_{i,j} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k R_{i,j,k}}{\sum_{k=1}^n m_k}$ $(\Delta R_{i,j})^2 = \frac{\sum_{k=1}^n m_k (R_{i,j,k} - R_{i,j})^2}{\sum_{k=1}^n m_k}$	$I_{i,j,k} = I_0 \Delta \sigma(\omega_k, \rho_i) \psi_j$ $(\Delta I_{i,j})^2 = \frac{\sum_{k=1}^n m_k (I_{i,j,k} - m_k)^2}{\sum_{k=1}^n m_k}$
Минимизация среднеквадратичного отклонения		
$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k}$ $y_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k}$ $(R_k)^2 = (x_k - x_c)^2 + (y_k - y_c)^2$ $R = \frac{\sum_{k=1}^n m_k R_k}{\sum_{k=1}^n m_k}$ $(\Delta R)^2 = \frac{\sum_{k=1}^n m_k (R_k - R)^2}{\sum_{k=1}^n m_k}$	$i \cap j: \Delta R_{i,j} = \Delta R_{i,j \min} \Rightarrow \begin{cases} x_c = x_i \\ y_c = y_j \\ R_H = R_{i,j} \\ \Delta R_H = \Delta R_{i,j} \end{cases}$	$i \cap j: \begin{cases} i \neq 0 \cap i \neq d \\ j \neq 0 \cap j \neq d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \rho_i \\ \psi = \psi_j \\ I_k = I_{i,j,k} \\ \Delta I = \Delta I_{i,j} \end{cases}$ $\bar{I} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k I_k}{\sum_{k=1}^n m_k}$ $\bar{m} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k}{n}$
Относительное среднеквадратичное отклонение		
$\delta_R = \frac{\Delta R}{R}$	$\delta_H = \frac{\Delta R_H}{R_H}$	$\delta_I = \frac{\Delta I}{\bar{I}}$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Оценка предельно допустимой для анализа энергии мюонов

Чтобы отбирать и анализировать события от одиночных мюонов важно, чтобы черенковский угол не зависел от их энергии, что наблюдается при высоких энергиях.

Высота гамма-обсерватории TAIGA над уровнем моря:

$$h = 700 \text{ м}$$

Коэффициент преломления воздуха на уровне обсерватории:

$$n = 1 + 2,9 * 10^{-4} * e^{-\frac{h}{7100 \text{ м}}} = 1 + 2,9 * 10^{-4} * e^{-\frac{700 \text{ м}}{7100 \text{ м}}} = 1,000262773$$

Раствор черенковского конуса:

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta n} \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{n \cos \theta}, \beta = \frac{v}{c} \text{ (релятивистский фактор)}$$

Энергия покоя мюона:

$$E_0 = 105,659 \text{ МэВ}$$

Полная энергия мюона:

$$E = \gamma E_0 = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2 \cos^2 \theta}}}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \text{ (гамма - фактор)}$$

Пороговая энергия мюона:

$$\cos \theta = 1 \Rightarrow E_{\text{порог}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{105,659 \text{ МэВ}}{\sqrt{1 - \frac{1}{1,000262773^2}}} = 4610 \text{ МэВ} = 4,6 \text{ ГэВ}$$

Предельный угол черенковского излучения:

$$\beta = 1 \Rightarrow \cos \theta_{\text{пред}} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow \theta_{\text{пред}} = \arccos \frac{1}{n} = \arccos \frac{1}{1,000262773} = 1,31^\circ$$

Условимся, что предельное допустимое отклонение черенковского угла для нас составляет:

$$p = 5\%$$

Тогда критический раствор черенковского конуса:

$$\theta_{\text{крит}} = \theta_{\text{пред}}(1 - p) = 1,31^\circ * (1 - 0,05) = 1,24^\circ$$

Тогда минимальная энергия мюонов, при которой зависимость энергии от раствора черенковского конуса можно пренебречь:

$$E_{\text{крит}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2 \cos^2 \theta_{\text{крит}}}}} = \frac{105,659 \text{ МэВ}}{\sqrt{1 - \frac{1}{1,000262773^2 \cos^2 1,24^\circ}}} = 14,4 \text{ ГэВ}$$

Далее в работе мы будем рассматривать лишь те мюоны, энергия которых больше критического значения:

$$E > E_{\text{крит}}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Оценка ожидаемого количества регистрируемых мюонных колец

Из справочной литературы найдём потоки одиночных мюонов в единицу времени на единицу площади и на единицу телесного угла [7].

$$\text{Для } E > E_1 = 12,51 \text{ ГэВ} \Rightarrow \left(\frac{dN_\mu}{dS d\Omega dt} \right)_1 = 5,487 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}}$$

$$\text{Для } E > E_2 = 16,68 \text{ ГэВ} \Rightarrow \left(\frac{dN_\mu}{dS d\Omega dt} \right)_2 = 3,551 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}}$$

Так как для нашей энергии нет явного значения потока, то произведём линейную интерполяцию:

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{крит}} - E_1}{E_2 - E_1} &= \frac{\left(\frac{dN_\mu}{dS d\Omega dt} \right)_{\text{крит}} - \left(\frac{dN_\mu}{dS d\Omega dt} \right)_1}{\left(\frac{dN_\mu}{dS d\Omega dt} \right)_2 - \left(\frac{dN_\mu}{dS d\Omega dt} \right)_1} \\ \left(\frac{dN_\mu}{dS d\Omega dt} \right)_{\text{крит}} &= \left(\frac{dN_\mu}{dS d\Omega dt} \right)_1 + \left(\left(\frac{dN_\mu}{dS d\Omega dt} \right)_2 - \left(\frac{dN_\mu}{dS d\Omega dt} \right)_1 \right) \frac{E_{\text{крит}} - E_1}{E_2 - E_1} = \\ &= 5,487 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}} + \left(3,551 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}} - 5,487 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}} \right) \frac{14,4 \text{ ГэВ} - 12,51 \text{ ГэВ}}{16,68 \text{ ГэВ} - 12,51 \text{ ГэВ}} = \\ &= 4,610 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}} \end{aligned}$$

Тогда ожидаемое количество мюонных колец можно найти, проинтегрировав полученное значение по площади зеркала и телесному углу:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{dN_\mu}{dS d\Omega dt} \right)_{\text{крит}} d\Omega &= \int 4,610 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}} d\Omega \\ \left(\frac{dN_\mu}{dS dt} \right)_{\text{крит}} &= 4,610 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}} \int d\Omega \\ \left(\frac{dN_\mu}{dS dt} \right)_{\text{крит}} &= 4,610 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}} \int_{0^\circ}^{1,31^\circ} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \end{aligned}$$

$$\left(\frac{dN_\mu}{dSdt}\right)_{\text{крит}} = -4,610 \frac{\text{мЮОН}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}} \cos \theta \Big|_{0^\circ}^{1,31^\circ} \varphi \Big|_0^{2\pi}$$

$$\left(\frac{dN_\mu}{dSdt}\right)_{\text{крит}} = -4,610 \frac{\text{мЮОН}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}} (\cos 1,31^\circ - \cos 0^\circ) (2\pi - 0)$$

$$\left(\frac{dN_\mu}{dSdt}\right)_{\text{крит}} = 4,610 \frac{\text{мЮОН}}{\text{м}^2 * \text{с}} 2\pi (1 - \cos 1,31^\circ)$$

$$\int \left(\frac{dN_\mu}{dSdt}\right)_{\text{крит}} dS = \int 4,610 \frac{\text{мЮОН}}{\text{м}^2 * \text{с}} 2\pi (1 - \cos 1,31^\circ) dS$$

$$\left(\frac{dN_\mu}{dt}\right)_{\text{крит}} = 4,610 \frac{\text{мЮОН}}{\text{м}^2 * \text{с}} 2\pi (1 - \cos 1,31^\circ) \int dS$$

$$\left(\frac{dN_\mu}{dt}\right)_{\text{крит}} = 4,610 \frac{\text{мЮОН}}{\text{м}^2 * \text{с}} 2\pi (1 - \cos 1,31^\circ) S$$

$$\left(\frac{dN_\mu}{dt}\right)_{\text{крит}} = 4,610 \frac{\text{мЮОН}}{\text{м}^2 * \text{с}} 2\pi (1 - \cos 1,31^\circ) \pi R^2$$

$$\left(\frac{dN_\mu}{dt}\right)_{\text{крит}} = 4,610 \frac{\text{мЮОН}}{\text{м}^2 * \text{с}} (1 - \cos 1,31^\circ) 2\pi^2 R^2$$

$$\left(\frac{dN_\mu}{dt}\right)_{\text{крит}} = 4,610 \frac{\text{мЮОН}}{\text{м}^2 * \text{с}} (1 - \cos 1,31^\circ) * 2 * 3,14^2 * 2,15^2 \text{ м}^2$$

$$\left(\frac{dN_\mu}{dt}\right)_{\text{крит}} = 0,110 \frac{\text{мЮОН}}{\text{с}} = 6,60 \frac{\text{мЮОН}}{\text{мин}} = 396 \frac{\text{мЮОН}}{\text{час}}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Расчёт граничных азимутальных углов пикселя

Рассчитаем граничные азимутальные углы пикселя в мюонной системе координат, используя два прямоугольных треугольника на рисунке 9, имеющих общую сторону:

$$\sin \omega_\rho = \frac{h}{R_{mir}} \Leftrightarrow h = R_{mir} \sin \omega_\rho$$

$$\cos \omega_\rho = \frac{f}{R_{mir}} \Leftrightarrow f = R_{mir} \cos \omega_\rho$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{\rho + f} = \frac{R_{mir} \sin \omega_\rho}{\rho + R_{mir} \cos \omega_\rho} = \frac{\sin \omega_\rho}{\frac{\rho}{R_{mir}} + \cos \omega_\rho} \Leftrightarrow \varphi = \arg \left(\frac{\rho}{R_{mir}} + \cos \omega_\rho, \sin \omega_\rho \right)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_\pm = \frac{\sin \left(\omega_\rho \pm \frac{\Delta\omega_{пред}}{2} \right)}{\frac{\rho}{R_{mir}} + \cos \left(\omega_\rho \pm \frac{\Delta\omega_{пред}}{2} \right)} \Leftrightarrow \varphi_\pm = \arg \left(\frac{\rho}{R_{mir}} + \cos \left(\omega_\rho \pm \frac{\Delta\omega_{пред}}{2} \right), \sin \left(\omega_\rho \pm \frac{\Delta\omega_{пред}}{2} \right) \right)$$

Тогда угловой размер пикселя в мюонной системе координат будет разностью двух граничных азимутальных углов:

$$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$$

При этом также можно вычислить средний азимутальный угол пикселя в мюонной системе координат:

$$\overline{\varphi} = \frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}$$

В случае нулевого прицельного параметра:

$$\rho = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \omega_\rho}{\frac{0}{R_{mir}} + \cos \omega_\rho} = \operatorname{tg} \omega_\rho \Leftrightarrow \varphi = \omega_\rho \Rightarrow \varphi_\pm = \omega_\rho \pm \frac{\Delta\omega_{пред}}{2}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \left(\omega_\rho + \frac{\Delta\omega_{пред}}{2} \right) - \left(\omega_\rho - \frac{\Delta\omega_{пред}}{2} \right) = \Delta\omega_{пред}$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2} = \frac{\left(\omega_\rho + \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2}\right) + \left(\omega_\rho - \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2}\right)}{2} = \omega_\rho$$

(распределение азимутальных углов пикселей в мюонной системе координат равномерно)

В случае граничного прицельного параметра:

$$\rho = R_{\text{mir}} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \omega_\rho}{\frac{R_{\text{mir}}}{R_{\text{mir}}} + \cos \omega_\rho} = \frac{\sin \omega_\rho}{1 + \cos \omega_\rho} = \frac{2 \sin \frac{\omega_\rho}{2} \cos \frac{\omega_\rho}{2}}{1 + 2 \cos^2 \frac{\omega_\rho}{2} - 1} = \operatorname{tg} \frac{\omega_\rho}{2} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\omega_\rho}{2}$$

$$\varphi_\pm = \frac{1}{2} \left(\omega_\rho \pm \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2} \right)$$

$$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \frac{1}{2} \left(\omega_\rho + \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\omega_\rho - \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2} \right) = \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2}$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2} = \frac{\frac{1}{2} \left(\omega_\rho + \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\omega_\rho - \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2} \right)}{2} = \frac{\omega_\rho}{2}$$

(распределение азимутальных углов пикселей в мюонной системе координат равномерно)

В случае бесконечного прицельного параметра:

$$\rho \rightarrow \infty \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\sin \omega_\rho}{\frac{\rho}{R_{\text{mir}}} + \cos \omega_\rho} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{R_{\text{mir}} \sin \omega_\rho}{\rho} = R_{\text{mir}} \sin \omega_\rho \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} = 0$$

$$\rho \rightarrow \infty \cap |\varphi| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \arg \left(\frac{\rho}{R_{\text{mir}}} + \cos \omega_\rho, \sin \omega_\rho \right) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{\sin \omega_\rho}{\frac{\rho}{R_{\text{mir}}} + \cos \omega_\rho} =$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{R_{\text{mir}} \sin \omega_\rho}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{R_{\text{mir}} \sin \omega_\rho}{\rho} = R_{\text{mir}} \sin \omega_\rho \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} = 0 \Rightarrow \varphi_\pm \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta\varphi = 0 \cap \bar{\varphi} = 0$$

(азимутальные углы пикселя в мюонной системе координат становятся бесконечно малыми)

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Расчёт длины хорды в плоскости отражателя

Уравнение окружности сечения черенковского конуса в плоскости отражателя в мюонной системе координат:

$$(x - \rho)^2 + y^2 = R_{mir}^2$$

Перейдём к полярным координатам:

$$(r \cos \varphi - \rho)^2 + (r \sin \varphi)^2 = R_{mir}^2$$

$$r^2 \cos^2 \varphi - 2\rho r \cos \varphi + \rho^2 + r^2 \sin^2 \varphi = R_{mir}^2$$

$$r^2 - 2\rho r \cos \varphi + \rho^2 - R_{mir}^2 = 0$$

$$\begin{aligned} r_{\pm}(\varphi) &= \rho \cos \varphi \pm \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi - (\rho^2 - R_{mir}^2)} = \rho \cos \varphi \pm \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 + R_{mir}^2} = \\ &= \rho \cos \varphi \pm \sqrt{R_{mir}^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi} = R_{mir} \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \cos \varphi \pm \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right) \end{aligned}$$

Условие существования хорды вследствие положительности подкоренного выражения:

$$\begin{aligned} R_{mir}^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi > 0 &\Leftrightarrow R_{mir}^2 > \rho^2 \sin^2 \varphi \Leftrightarrow R_{mir} > \rho |\sin \varphi| \Leftrightarrow |\sin \varphi| < \frac{R_{mir}}{\rho} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin |\varphi| < \frac{R_{mir}}{\rho} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin |\varphi| < \frac{R_{mir}}{\rho} < 1, \rho > R_{mir} \\ \sin |\varphi| < 1 < \frac{R_{mir}}{\rho}, \rho < R_{mir} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\varphi| < \arcsin \frac{R_{mir}}{\rho} < 90^\circ, \rho > R_{mir} \\ |\varphi| < 180^\circ, \rho < R_{mir} \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, при $\rho > R_{mir}$ в мюонной системе координат существует предельное значение азимутального угла, больше которого он быть не может:

$$\varphi_{\text{пред}} = \arcsin \frac{R_{mir}}{\rho}$$

Длина хорды в плоскости отражателя, вдоль которой собирается черенковское излучение для заданного азимутального угла:

$$RD(\varphi) = \begin{cases} r_+(\varphi) = R_{mir} \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \cos \varphi + \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right), \rho < R_{mir} \\ r_+(\varphi) - r_-(\varphi) = 2R_{mir} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi}, \rho > R_{mir} \end{cases}$$

$$D(\varphi) = \begin{cases} \frac{\rho}{R_{mir}} \cos \varphi + \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi}, \rho < R_{mir} \\ 2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi}, \rho > R_{mir} \end{cases}$$

Проверка чётности хордовой функции:

$$r_{\pm}(-\varphi) = \rho \cos(-\varphi) \pm \sqrt{R_{mir}^2 - \rho^2 \sin^2(-\varphi)} = \rho \cos \varphi \pm \sqrt{R_{mir}^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi} = r_{\pm}(\varphi)$$

$$RD(-\varphi) = \begin{cases} r_+(-\varphi), \rho < R_{mir} \\ r_+(-\varphi) - r_-(-\varphi), \rho > R_{mir} \end{cases} = \begin{cases} r_+(\varphi), \rho < R_{mir} \\ r_+(\varphi) - r_-(\varphi), \rho > R_{mir} \end{cases} = R_{mir} D(\varphi)$$

В случае нулевого прицельного параметра:

$$\rho = 0 \Rightarrow D(\varphi) = \frac{0}{R_{mir}} \cos \varphi + \sqrt{1 - \frac{0^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} = 1$$

(распределение длин хорд равномерно по азимутальному углу)

В случае граничного прицельного параметра:

$$\rho = R_{mir} \cap |\varphi| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow D(\varphi) = \frac{R_{mir}}{R_{mir}} \cos \varphi + \sqrt{1 - \frac{R_{mir}^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} = \cos \varphi + \sqrt{\cos^2 \varphi} =$$

$$= \cos \varphi + |\cos \varphi| = 2 \cos \varphi = 2 \cos \frac{\omega \rho}{2}$$

$$\rho = R \cap |\varphi| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow D(\varphi) = 2 \sqrt{1 - \frac{R_{mir}^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} = 2 \sqrt{\cos^2 \varphi} =$$

$$= 2 |\cos \varphi| = 2 \cos \varphi = 2 \cos \frac{\omega \rho}{2}$$

(равенство длин хорд в граничном случае выполняется;
распределение длин хорд гармонично по азимутальному углу)

В случае бесконечного прицельного параметра:

$$\begin{aligned}
 \rho \rightarrow \infty \Rightarrow D(\varphi) &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right) = 2 \sqrt{1 - \frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\rho^2 \sin^2 \varphi)}{R_{mir}^2}} = \\
 &= 2 \sqrt{1 - \frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\rho^2 \varphi^2)}{R_{mir}^2}} = 2 \sqrt{1 - \frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(\rho^2 \left(\frac{R_{mir} \sin \omega_\rho}{\rho} \right)^2 \right)}{R_{mir}^2}} = \\
 &= 2 \sqrt{1 - \frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} (R_{mir}^2 \sin^2 \omega_\rho)}{R_{mir}^2}} = 2 \sqrt{1 - \frac{R_{mir}^2 \sin^2 \omega_\rho}{R_{mir}^2}} = 2 \sqrt{\cos^2 \omega_\rho} = 2 |\cos \omega_\rho|
 \end{aligned}$$

(длины хорд остаются конечными даже при бесконечно малых азимутальных
углах; распределение длин хорд гармонично по азимутальному углу)

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

Расчёт площади сегмента зеркала, собирающего свет в один пиксель

Площадь сегмента зеркала, изображённого на рисунке 12, собирающего свет в диапазоне углов от 0 до φ в мюонной системе координат:

$$\begin{aligned}
 S_{\pm}(\varphi) &= \frac{1}{2} \int_0^{\varphi} r_{\pm}^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi} \left(\rho \cos \varphi \pm \sqrt{R_{mir}^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi} \right)^2 d\varphi = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\varphi} \left(\rho^2 \cos^2 \varphi + R_{mir}^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi \pm 2\rho \cos \varphi \sqrt{R_{mir}^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi} \right) d\varphi = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\varphi} \left(R_{mir}^2 + \rho^2 \cos 2\varphi \pm 2\rho \cos \varphi \sqrt{R_{mir}^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi} \right) d\varphi = \\
 &= \frac{1}{2} \left(R_{mir}^2 \int_0^{\varphi} d\varphi + \rho^2 \int_0^{\varphi} \cos 2\varphi d\varphi \pm 2\rho \int_0^{\varphi} \cos \varphi \sqrt{R_{mir}^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(R_{mir}^2 \int_0^{\varphi} d\varphi + \frac{\rho^2}{2} \int_0^{\varphi} \cos 2\varphi d(2\varphi) \pm 2\rho R_{mir} \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} d(\sin \varphi) \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(R_{mir}^2 \int_0^{\varphi} d\varphi + \frac{\rho^2}{2} \int_0^{\varphi} \cos 2\varphi d(2\varphi) \pm 2R_{mir}^2 \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \right)^2} d\left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \right) \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(R_{mir}^2 \varphi \Big|_0^{\varphi} + \frac{\rho^2}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{\varphi} \pm 2R_{mir}^2 \frac{\arcsin \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \right) + \frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \right)^2}}{2} \Big|_0^{\varphi} \right) = \\
 &= \frac{R_{mir}^2}{2} \left(\varphi \Big|_0^{\varphi} + \frac{\rho^2}{2R_{mir}^2} \sin 2\varphi \Big|_0^{\varphi} \pm \left(\arcsin \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \right) + \frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right) \Big|_0^{\varphi} \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{R_{mir}^2}{2} \left(\varphi + \frac{\rho^2}{2R_{mir}^2} \sin 2\varphi \pm \arcsin \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \right) \pm \frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right) - \\
&- \frac{R_{mir}^2}{2} \left(0 + \frac{\rho^2}{2R_{mir}^2} \sin 0 \pm \arcsin \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin 0 \right) \pm \frac{\rho}{R_{mir}} \sin 0 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 0} \right) = \\
&= \frac{R_{mir}^2}{2} \left(\varphi + \frac{\rho^2}{2R_{mir}^2} \sin 2\varphi \pm \arcsin \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \right) \pm \frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right)
\end{aligned}$$

В случае, если $\rho < R_{mir}$:

$$\pi R_{mir}^2 \sigma(\varphi) = S_+(\varphi) = \frac{R_{mir}^2}{2} \left(\varphi + \frac{\rho^2}{2R_{mir}^2} \sin 2\varphi + \arcsin \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \right) + \frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right)$$

В случае, если $\rho > R_{mir}$:

$$\begin{aligned}
\pi R_{mir}^2 \sigma(\varphi) &= S_+(\varphi) - S_-(\varphi) = \\
&= \frac{R_{mir}^2}{2} \left(\varphi + \frac{\rho^2}{2R_{mir}^2} \sin 2\varphi + \arcsin \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \right) + \frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right) - \\
&- \frac{R_{mir}^2}{2} \left(\varphi + \frac{\rho^2}{2R_{mir}^2} \sin 2\varphi - \arcsin \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \right) - \frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right) = \\
&= R_{mir}^2 \left(\arcsin \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \right) + \frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right)
\end{aligned}$$

В итоге:

$$\sigma(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left(\varphi + \frac{\rho^2}{2R_{mir}^2} \sin 2\varphi + \arcsin \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \right) + \frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right), \rho < R_{mir} \\ \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \right) + \frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right), \rho > R_{mir} \end{cases}$$

Тогда относительная площадь сегмента зеркала, собирающего свет в пиксель, ограниченный азимутальными углами φ_- и φ_+ :

$$\Delta\sigma = |\sigma(\varphi_+) - \sigma(\varphi_-)|$$

Проверка нечётности сегментной функции:

$$\begin{aligned} S_{\pm}(-\varphi) &= \frac{R_{mir}^2}{2} \left(-\varphi + \frac{\rho^2}{2R_{mir}^2} \sin(-2\varphi) \pm \arcsin\left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin(-\varphi)\right) \pm \frac{\rho}{R_{mir}} \sin(-\varphi) \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2(-\varphi)} \right) = \\ &= \frac{R_{mir}^2}{2} \left(-\varphi - \frac{\rho^2}{2R_{mir}^2} \sin 2\varphi \mp \arcsin\left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi\right) \mp \frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right) = -S_{\pm}(\varphi) \\ \pi R_{mir}^2 \sigma(-\varphi) &= \begin{cases} S_+(-\varphi), \rho < R_{mir} \\ S_+(-\varphi) - S_-(-\varphi), \rho > R_{mir} \end{cases} = \begin{cases} -S_+(\varphi), \rho < R_{mir} \\ -S_+(\varphi) + S_-(\varphi), \rho > R_{mir} \end{cases} = -\pi R_{mir}^2 \sigma(\varphi) \end{aligned}$$

В случае нулевого прицельного параметра:

$$\begin{aligned} \rho = 0 \Rightarrow \sigma(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \left(\varphi + \frac{0^2}{2R_{mir}^2} \sin 2\varphi + \arcsin\left(\frac{0}{R_{mir}} \sin \varphi\right) + \frac{0}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{0^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right) = \frac{\varphi}{2\pi} \\ \Delta\sigma &= |\sigma(\varphi_+) - \sigma(\varphi_-)| = \left| \frac{\varphi_+}{2\pi} - \frac{\varphi_-}{2\pi} \right| = \left| \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2\pi} \right| = \left| \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \right| = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta\omega_{пред}}{2\pi} \end{aligned}$$

(распределение площадей сегментов равномерно по азимутальному углу)

В случае граничного прицельного параметра:

$$\begin{aligned} \rho = R_{mir} \cap |\varphi| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sigma(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \left(\varphi + \frac{R_{mir}^2}{2R_{mir}^2} \sin 2\varphi + \arcsin\left(\frac{R_{mir}}{R_{mir}} \sin \varphi\right) + \frac{R_{mir}}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{R_{mir}^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} + \arcsin \sin \varphi + \frac{R_{mir}}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{\cos^2 \varphi} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} + \varphi + \frac{R_{mir}}{R_{mir}} \sin \varphi |\cos \varphi| \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} + \varphi + \frac{R_{mir}}{R_{mir}} \sin \varphi \cos \varphi \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} + \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\omega_\rho}{2} + \frac{\sin \omega_\rho}{2} \right) = \frac{\omega_\rho + \sin \omega_\rho}{2\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho = R \cap |\varphi| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sigma(\varphi) &= \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{R_{mir}}{R_{mir}} \sin \varphi \right) + \frac{R_{mir}}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{R_{mir}^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right) = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \sin \varphi + \sin \varphi \sqrt{\cos^2 \varphi} \right) = \frac{1}{\pi} (\varphi + \sin \varphi |\cos \varphi|) = \\
&= \frac{1}{\pi} (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi) = \frac{1}{\pi} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\omega_\rho}{2} + \frac{\sin \omega_\rho}{2} \right) = \frac{\omega_\rho + \sin \omega_\rho}{2\pi}
\end{aligned}$$

(равенство площадей сегментов в граничном случаи выполняется)

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma &= |\sigma(\varphi_+) - \sigma(\varphi_-)| = \left| \frac{1}{\pi} \left(\varphi_+ + \frac{\sin 2\varphi_+}{2} \right) - \frac{1}{\pi} \left(\varphi_- + \frac{\sin 2\varphi_-}{2} \right) \right| = \\
&= \left| \frac{1}{\pi} \left(\varphi_+ - \varphi_- + \frac{\sin 2\varphi_+ - \sin 2\varphi_-}{2} \right) \right| = \left| \frac{\varphi_+ - \varphi_- + \sin(\varphi_+ - \varphi_-) \cos(\varphi_+ + \varphi_-)}{\pi} \right| = \\
&= \left| \frac{\Delta\varphi + \sin \Delta\varphi \cos 2\bar{\varphi}}{\pi} \right| = \frac{\Delta\varphi + \sin \Delta\varphi \cos 2\bar{\varphi}}{\pi} = \frac{\frac{\Delta\omega}{2} + \sin \frac{\Delta\omega}{2} \cos \omega_\rho}{\pi}
\end{aligned}$$

(распределение площадей сегментов гармонично по азимутальному углу)

В случае бесконечного прицельного параметра:

$$\begin{aligned}
\rho \rightarrow \infty \Rightarrow \sigma(\varphi) &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \right) + \frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right) \right) = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\rho \sin \varphi)}{R_{mir}} \right) + \frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\rho \sin \varphi)}{R_{mir}} \sqrt{1 - \frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\rho^2 \sin^2 \varphi)}{R_{mir}^2}} \right) = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\rho \varphi)}{R_{mir}} \right) + \frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\rho \varphi)}{R_{mir}} \sqrt{1 - \frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\rho^2 \varphi^2)}{R_{mir}^2}} \right) = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(\rho \frac{R_{mir} \sin \omega_\rho}{\rho} \right)}{R_{mir}} \right) + \frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(\rho \frac{R_{mir} \sin \omega_\rho}{\rho} \right)}{R_{mir}} \sqrt{1 - \frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(\rho^2 \left(\frac{R_{mir} \sin \omega_\rho}{\rho} \right)^2 \right)}{R_{mir}^2}} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} (R_{mir} \sin \omega_\rho)}{R_{mir}} \right) + \frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} (R_{mir} \sin \omega_\rho)}{R_{mir}} \sqrt{1 - \frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} (R_{mir}^2 \sin^2 \omega_\rho)}{R_{mir}^2}} \right) = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{R_{mir} \sin \omega_\rho}{R_{mir}} \right) + \frac{R_{mir} \sin \omega_\rho}{R_{mir}} \sqrt{1 - \frac{R_{mir}^2 \sin^2 \omega_\rho}{R_{mir}^2}} \right) = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \sin \omega_\rho + \sin \omega_\rho \sqrt{\cos^2 \varphi} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \sin \omega_\rho + \sin \omega_\rho |\cos \omega_\rho| \right) = \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\pi} (\arcsin \sin \omega_\rho + \sin \omega_\rho \cos \omega_\rho), & |\omega_\rho| < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\pi} (\arcsin \sin(\pi - \omega_\rho) - \sin \omega_\rho \cos \omega_\rho), & \frac{\pi}{2} < |\omega_\rho| < \pi \end{cases} = \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left(\omega_\rho + \frac{\sin 2\omega_\rho}{2} \right), & |\omega_\rho| < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\pi} \left(\pi - \omega_\rho - \frac{\sin 2\omega_\rho}{2} \right), & \frac{\pi}{2} < |\omega_\rho| < \pi \end{cases}
\end{aligned}$$

В случае, если $|\omega_\rho| < \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma &= \left| \sigma \left(\omega_\rho + \frac{\Delta\omega_{пред}}{2} \right) - \sigma \left(\omega_\rho - \frac{\Delta\omega_{пред}}{2} \right) \right| = \\
&= \left| \frac{1}{\pi} \left(\omega_\rho + \frac{\Delta\omega_{пред}}{2} + \frac{\sin 2 \left(\omega_\rho + \frac{\Delta\omega_{пред}}{2} \right)}{2} \right) - \frac{1}{\pi} \left(\omega_\rho - \frac{\Delta\omega_{пред}}{2} + \frac{\sin 2 \left(\omega_\rho - \frac{\Delta\omega_{пред}}{2} \right)}{2} \right) \right| = \\
&= \left| \frac{1}{\pi} \left(\Delta\omega + \frac{\sin 2 \left(\omega_\rho + \frac{\Delta\omega_{пред}}{2} \right) - \sin 2 \left(\omega_\rho - \frac{\Delta\omega_{пред}}{2} \right)}{2} \right) \right| = \\
&= \left| \frac{\Delta\omega_{пред} + \sin \Delta\omega_{пред} \cos 2\omega_\rho}{\pi} \right| = \frac{\Delta\omega_{пред} + \sin \Delta\omega_{пред} \cos 2\omega_\rho}{\pi}
\end{aligned}$$

В случае, если $\frac{\pi}{2} < |\omega_\rho| < \pi$:

$$\Delta\sigma = \left| \sigma \left(\omega_\rho + \frac{\Delta\omega_{пред}}{2} \right) - \sigma \left(\omega_\rho - \frac{\Delta\omega_{пред}}{2} \right) \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{1}{\pi} \left(\pi - \left(\omega_\rho + \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2} \right) - \frac{\sin 2 \left(\omega_\rho + \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2} \right)}{2} \right) - \frac{1}{\pi} \left(\pi - \left(\omega_\rho - \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2} \right) - \frac{\sin 2 \left(\omega_\rho - \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2} \right)}{2} \right) \right| = \\
&= \left| \frac{1}{\pi} \left(-\Delta\omega_{\text{пред}} - \frac{\sin 2 \left(\omega_\rho + \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2} \right) - \sin 2 \left(\omega_\rho - \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2} \right)}{2} \right) \right| = \\
&= \left| -\frac{\Delta\omega_{\text{пред}} + \sin \Delta\omega_{\text{пред}} \cos 2\omega_\rho}{\pi} \right| = \left| \frac{\Delta\omega_{\text{пред}} + \sin \Delta\omega_{\text{пред}} \cos 2\omega_\rho}{\pi} \right| = \frac{\Delta\omega_{\text{пред}} + \sin \Delta\omega_{\text{пред}} \cos 2\omega_\rho}{\pi}
\end{aligned}$$

В итоге:

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta\omega_{\text{пред}} + \sin \Delta\omega \cos 2\omega_\rho}{\pi}$$

(площадь сегментов остаётся конечной даже при бесконечно малых азимутальных углах; распределение площадей сегментов гармонично по азимутальному углу)

В случае интегрирования по всей поверхности зеркала:

$$\rho < R_{\text{mir}} \Rightarrow |\varphi| < \pi \Rightarrow \sigma(\pi) = \frac{1}{2\pi} \left(\pi + \frac{\rho^2}{2R_{\text{mir}}^2} \sin 2\pi + \arcsin \left(\frac{\rho}{R_{\text{mir}}} \sin \pi \right) + \frac{\rho}{R_{\text{mir}}} \sin \pi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{\text{mir}}^2} \sin^2 \pi} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\Delta\sigma = \sigma(\pi) - \sigma(-\pi) = \sigma(\pi) + \sigma(\pi) = 2\sigma(\pi) = 1$$

$$\rho > R \Rightarrow |\varphi| < \arcsin \frac{R_{\text{mir}}}{\rho} \Rightarrow \sigma \left(\arcsin \frac{R_{\text{mir}}}{\rho} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{\rho}{R_{\text{mir}}} \sin \arcsin \frac{R_{\text{mir}}}{\rho} \right) + \frac{\rho}{R_{\text{mir}}} \sin \arcsin \frac{R_{\text{mir}}}{\rho} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{\text{mir}}^2} \sin^2 \arcsin \frac{R_{\text{mir}}}{\rho}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{\rho}{R_{\text{mir}}} \frac{R_{\text{mir}}}{\rho} \right) + \frac{\rho}{R_{\text{mir}}} \frac{R_{\text{mir}}}{\rho} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{\text{mir}}^2} \frac{R_{\text{mir}}^2}{\rho^2}} \right) = \frac{1}{\pi} \arcsin(1) = \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta\sigma = \sigma \left(\arcsin \frac{R_{\text{mir}}}{\rho} \right) - \sigma \left(-\arcsin \frac{R_{\text{mir}}}{\rho} \right) = \sigma \left(\arcsin \frac{R_{\text{mir}}}{\rho} \right) + \sigma \left(\arcsin \frac{R_{\text{mir}}}{\rho} \right) = 2\sigma \left(\arcsin \frac{R_{\text{mir}}}{\rho} \right) = 1$$

(интегрирование по всей поверхности зеркала в обоих случаях даёт полную площадь его круга)

ПРИЛОЖЕНИЕ Ж

Расчёт плотности распределения фотонов в кольце

В случае попадания мюона в центр зеркала при отсутствии световых потерь интенсивность черенковского света в каждом пикселе приобретает простой вид:

$$I_{\text{пиксель}} = \frac{\alpha R_{\text{mir}} \Delta\omega_{\text{пред}} \sin 2\theta_{\text{пред}}}{2} \int_{\lambda_{\text{min}}}^{\lambda_{\text{max}}} \frac{d\lambda}{\lambda^2} = \frac{\alpha R_{\text{mir}} \Delta\omega_{\text{пред}} \sin 2\theta_{\text{пред}}}{2} \left(\frac{1}{\lambda_{\text{min}}} - \frac{1}{\lambda_{\text{max}}} \right) =$$
$$= \frac{1}{137} * 2,15 \text{ м} * \frac{15,83^\circ * 3,14}{180^\circ} * \sin(2 * 1,31^\circ) * \left(\frac{1}{400 \text{ нм}} - \frac{1}{600 \text{ нм}} \right) = 83 \text{ кванта}$$

Полное же число фотонов, попадающих на зеркало в этом случае оказывается равным:

$$I_0 = \pi \alpha R_{\text{mir}} \sin 2\theta_{\text{пред}} \int_{\lambda_{\text{min}}}^{\lambda_{\text{max}}} \frac{d\lambda}{\lambda^2} = \pi \alpha R_{\text{mir}} \sin 2\theta_{\text{пред}} \left(\frac{1}{\lambda_{\text{min}}} - \frac{1}{\lambda_{\text{max}}} \right) =$$
$$= 3,14 * \frac{1}{137} * 2,15 \text{ м} * \sin(2 * 1,31^\circ) * \left(\frac{1}{400 \text{ нм}} - \frac{1}{600 \text{ нм}} \right) = 1878 \text{ квантов}$$