

ИССЛЕДОВАНИЕ КЛАСТЕРНОЙ СТРУКТУРЫ АТОМНЫХ ЯДЕР И ЕЁ ПРОЯВЛЕНИЙ В ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЯХ



Бажин Антон Сергеевич

1.3.15 Физика атомных ядер и элементарных
частиц, физика высоких энергий

Кафедра № 40 «Физика элементарных частиц»

Научный руководитель: д.ф-м.н. Гуров Юрий Борисович

Консультант: д.ф-м.н Самарин Вячеслав Владимирович (ОИЯИ ЛЯР)

д.ф-м.н Ракитянский Сергей Анатольевич (ОИЯИ ЛТФ)

2026, Москва

Участие в конференциях

1. 74 международная конференция по ядерной физике «ЯДРО-2024: Фундаментальные вопросы и приложения»

Bazhin A.S., Samarin V.V. STUDY OF THE STRUCTURE OF ^{12}C AND ^6Li NUCLEI IN THE ALPHA-CLUSTER MODEL BY HYPERSPHERICAL FUNCTIONS AND FEYNMAN'S PATH INTEGRALS, 2024.

2. 7th International Conference on Particle Physics and Astrophysics

Bazhin A.S. STUDY OF THE STRUCTURE OF ^{12}C AND ^6Li NUCLEI IN THE ALPHA-CLUSTER MODEL BY HYPERSPHERICAL FUNCTIONS, 2024.

Сайт конференции <https://indico.particle.mephi.ru/event/436/>

3. 28th International Scientific Conference of Young Scientists and Specialists (AYSS-2024)

Bazhin A.S. Study of nuclei structure in alpha-cluster model by hyperspherical functions using cubic spline interpolation, 2024.

Сайт конференции <https://indico.jinr.ru/event/4343/overview>

4. South Africa - JINR Workshop on Theoretical and Computational Physics

Bazhin A.S. Study of the structure of nuclei in the alpha-cluster model by hyperspherical functions method, 2025.

Сайт конференции <https://indico.jinr.ru/event/5349/overview>

5. LXXV International Conference «NUCLEUS – 2025. Nuclear physics, elementary particle physics and nuclear technologies»

Bazhin A.S. Study of the structure of $^{16,18}\text{O}$ nuclei in the alpha-cluster model by hyperspherical functions and Feynman's path integrals, 2025.

Сайт конференции <https://indico.jinr.ru/event/4343/overview>

6. International Conference “Mathematical Modeling and Computational Physics” (MMCP'2026) 22–26 June 2026

Bazhin A.S. The cubic spline method for solving two- and three-body Schrodinger Equation, 2026.

Сайт конференции <https://indico.jinr.ru/event/5789/overview>

Статьи

1. *Известия РАН Серия физическая том 88, номер 8, 2024.*

A.S. Bazhin and V.V. Samarin Study of the Structure of the ^9Be Nucleus in the Alpha-Cluster Model by the Method of Hyperspherical Functions. Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics, 2024, Vol. 88, No. 8, pp. 1177–1184. **DOI:** [10.1134/S1062873824707281](https://doi.org/10.1134/S1062873824707281)

2. (Принято к опубликованию) *Известия РАН Серия физическая том 89, номер 8, 2025.*

A.S. Bazhin and V.V. Samarin “Study of the Structure of ^{12}C and ^6Li Nuclei in the Alpha-Cluster and Shell Models”. Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics, 2025, Vol. 89, No. 8, pp. 1273–1283. **DOI:** [10.1134/S1062873825712048](https://doi.org/10.1134/S1062873825712048)

3. (В работе) *Физика элементарных частиц и атомного ядра*

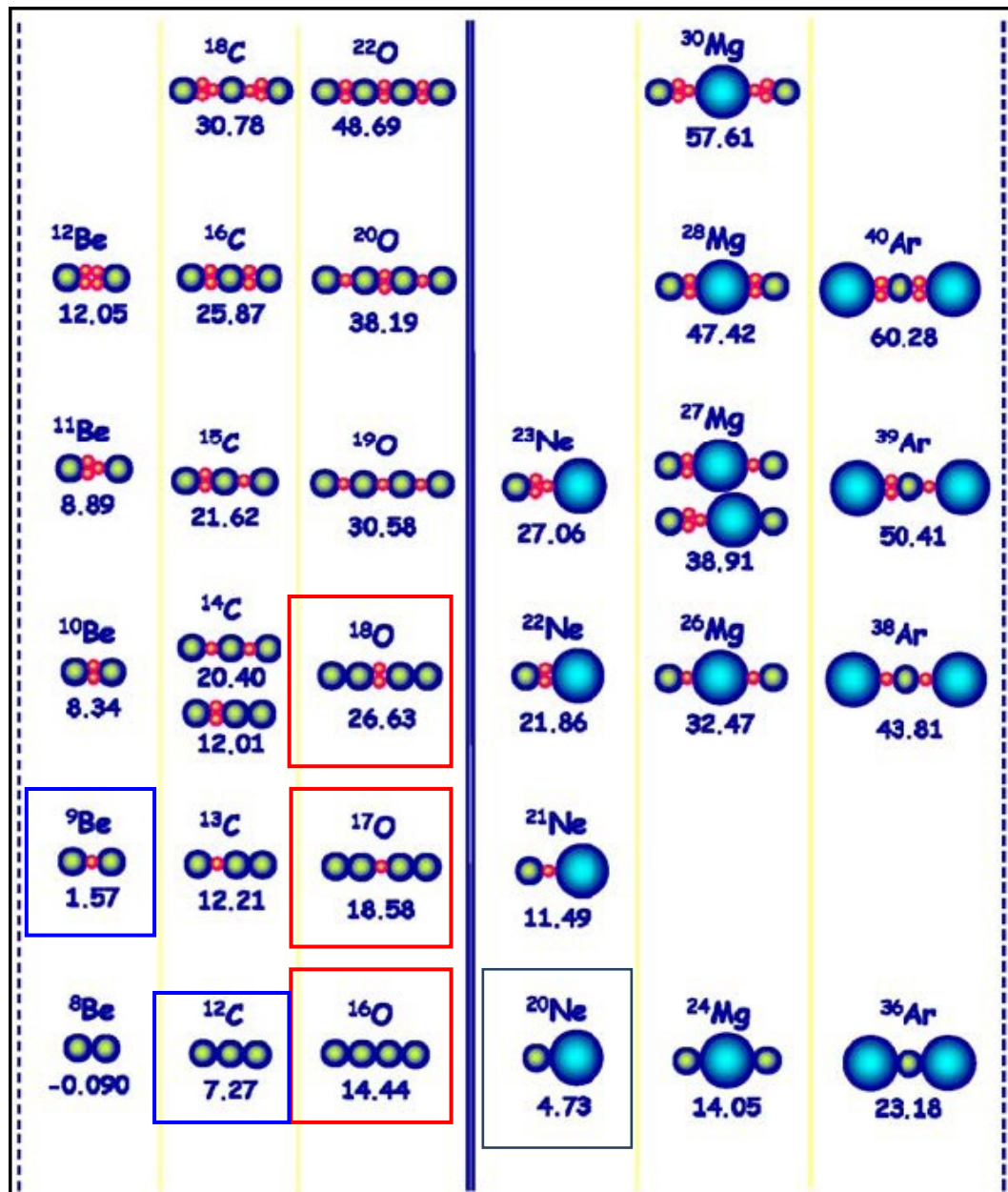
A.S. Bazhin "Исследование структуры ядер ^{18}O и ^{20}Ne в альфа-кластерной модели с использованием метода гипесферических функций«

4. (В работе) *Computer Physics Communications*

A.S. Bazhin. CSI-2B: GUI-based method for solving radial Schrodinger equation using cubic spline interpolation method.

В последнее время растёт интерес в изучении нейтроноизбыточных и слабосвязанных ядер и рассмотрение их в концепции кластерных ядер.

Структура кор + валентный нейтрон может быть описана вблизи альфа-кластерного распада. Помимо, этого кластерные состояния и структуры могут наблюдаться в ядерных реакциях вблизи кулоновского барьера, для примера, в ядрах ${}^9\text{Be}$, ${}^{12}\text{C}$, ${}^{16,18}\text{O}$, ${}^{24}\text{Mg}$.



Alpha-cluster nuclei with the energy separation number.

[W. von Oertzen, M. Freer, Y. Kanada-En'yo, Physics Reports 432 (2006) 43]

Метод кубических сплайнов

Формула кубического сплайна

$$S_i(x) = f_i + \left(\frac{1}{h_{i+1}} \Delta f_i - \frac{h_{i+1}}{2} m_i - \frac{h_{i+1}}{6} \Delta m_i \right) + (x - x_i) + \frac{m_i}{2} (x - x_i)^2 + \frac{1}{6h_{i+1}} \Delta m_i (x - x_i)^3,$$

Используя условие непрерывности

$$S'_{i-1}(x)|_{x=x_i} = S'_i(x)|_{x=x_i}, i = \overline{1, n-1},$$

Можно получить трехдиагональную систему для m_i коэффициентов

$$\frac{h_i}{6} m_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3} m_i + \frac{h_{i+1}}{6} m_{i+1} = \frac{\Delta f_i}{h_{i+1}} - \frac{\Delta f_{i-1}}{h_i}, i = \overline{1, n-1}.$$

С естественным граничным условием $m_0 = m_n = 0$.

трехдиагональная система может быть записана как

$$\mathbf{A}\mathbf{m} = \mathbf{H}\mathbf{f}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} & -\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right) & \frac{1}{h_2} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{h_2} & -\left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right) & \frac{1}{h_3} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_3} & -\left(\frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}\right) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

Система в матричном представлении может быть использована для множества точек функции f_i .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2+h_3}{3} & \frac{h_3}{6} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{h_3}{6} & \frac{h_3+h_4}{3} & \frac{h_4}{6} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

Однако, существует возможность использовать коэффициенты m_i , которые являются второй производной интерполируемой функции

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Применение метода кубических сплайнов для радиального уравнения Шредингера

Трёхдиагональная система

$$\mathbf{A}\mathbf{m}=\mathbf{H}\mathbf{f},$$

коэффициент \mathbf{m} может быть выражен как

$$\mathbf{m}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{f},$$

И может быть использован в радиальном уравнении Шредингера

$$-\frac{d^2\chi(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}U_{\text{eff}}(r)\chi(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2}E\chi(r).$$

$$-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{H}\chi + \frac{2\mu}{\hbar^2}\mathbf{U}\chi = \lambda\chi.$$

$$\mathbf{B}\chi = \lambda\chi$$

Выражение является задачей на собственные значения λ и вектора χ матрицы \mathbf{B} .

$$\mathbf{B} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{H} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\mathbf{U}, \quad \lambda = \frac{2\mu}{\hbar^2}E, \quad \mathbf{U} = \begin{vmatrix} U_{\text{eff}}(r_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & U_{\text{eff}}(r_{n-1}) \end{vmatrix}, \quad \chi = \begin{vmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \vdots \\ \chi_{n-1} \end{vmatrix}$$

1. Для получения ортогональных собственных векторов χ , матрица \mathbf{B} должна быть симметрична. Иначе, радиальные волновые функции могут быть неточны. Использование эквидистантной сетки ($h_i = h$) решает данную проблему.

2. Полученные волновые функции могут быть выражены аналитически. Как пример, нормировка

$$\int |\chi(r)|^2 dr = 1.$$

3. Помимо связанных состояний, существует возможность использовать метод для расчёта резонансных состояний кластерных ядер, используя комплексное вращение $r_c = r \exp(i\phi)$ которое также используется в методы функций Йоста.

$$\int |\chi(r)|^2 dr = \sum_{i=0}^{n-1} \left[f_i \Delta x_i + \left(\frac{1}{h_{i+1}} \Delta f_i - \frac{h_{i+1}}{2} m_i - \frac{h_{i+1}}{6} \Delta m_i \right) \Delta x_i^2 + \frac{m_i}{2} \Delta x_i^3 + \frac{1}{6h_{i+1}} \Delta m_i \Delta x_i^4 \right],$$

Изотропный гармонический осциллятор

Радиальное уравнение

$$-\frac{d^2\chi(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} U_{\text{eff}}(r)\chi(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} E\chi(r).$$

с эффективным потенциалом

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{\mu\omega^2 r^2}{2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}, \quad m_1 = 1, m_2 = 1, \mu = \frac{1}{2}, \omega = 1, \hbar = 1$$

имеет точное решение

$$E_{nl} = \hbar\omega \left(2n + l + \frac{3}{2} \right), \quad n, l = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\chi_{nl}^{\text{ex}}(r) = N_{nl} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \xi^{l+1} F\left(-n, l + \frac{3}{2}, \xi^2\right) \quad \xi = \frac{r}{a}, \quad a = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}},$$

где N_{nl} - нормализационный коэффициент, F - вырожденная гипергеометрическая функция.

h	E_0, E_1	$\max(\chi(r) - \chi_{nl}^{\text{ex}}(r))$
1	1.573	5.037×10^{-2}
	3.840	1.392×10^{-1}
0.5	1.519	1.247×10^{-2}
	3.595	4.084×10^{-2}
0.25	1.504	2.960×10^{-3}
	3.524	1.038×10^{-2}
0.1	1.500	6.614×10^{-4}
	3.504	8.910×10^{-3}
Exact	1.5	-
	3.5	-

Интерполяция кубическими сплайнами.

Уравнение кубического сплайна

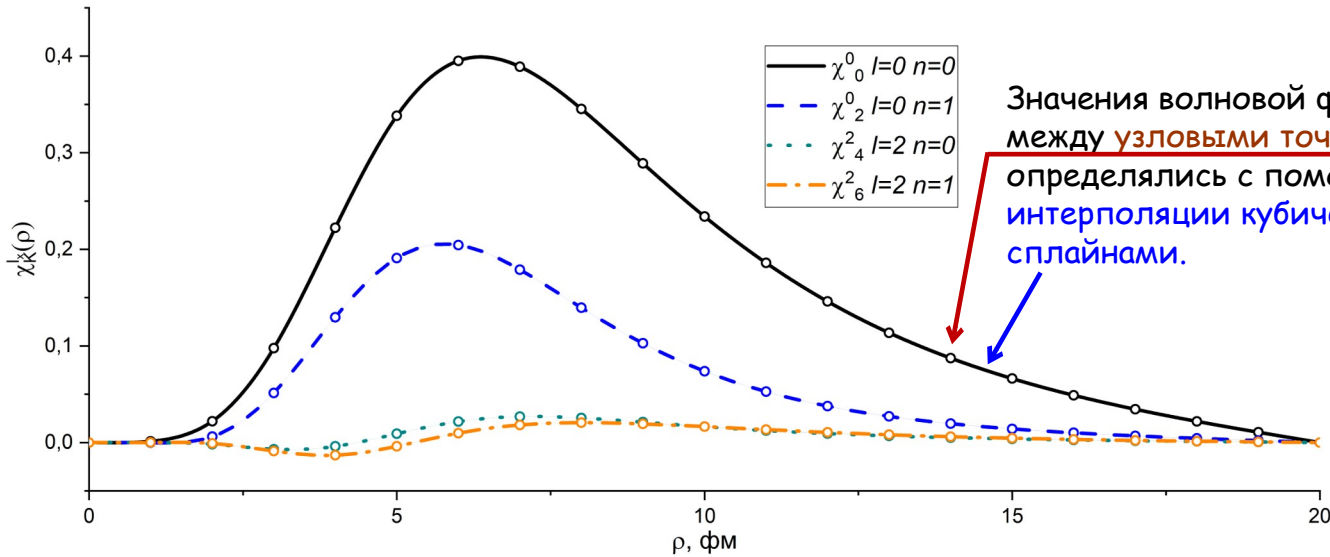
$$g_i(x) = f_i + \left(\frac{1}{h_{i+1}} \Delta f_i - \frac{h_{i+1}}{2} m_i - \frac{h_{i+1}}{6} \Delta m_i \right) \cdot (x - x_i) + \frac{m_i}{2} \cdot (x - x_i)^2 + \frac{1}{6h_{i+1}} \Delta m_i \cdot (x - x_i)^3, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}],$$

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i \quad \Delta m_i = m_{i+1} - m_i \quad h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$$

Условия гладкой сшивки: $g_{i-1}(x_i) = g_i(x_i)$, $g'_{i-1}(x_i) = g'_i(x_i)$, $i = \overline{1, n-1}$

$$\frac{h_i}{6} m_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3} m_i + \frac{h_{i+1}}{6} m_{i+1} = \frac{\Delta f_i}{h_{i+1}} - \frac{\Delta f_{i-1}}{h_i}, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad m_0 = 0; m_n = 0.$$

$$\mathbf{A} \mathbf{m} = \mathbf{H} \mathbf{F}$$



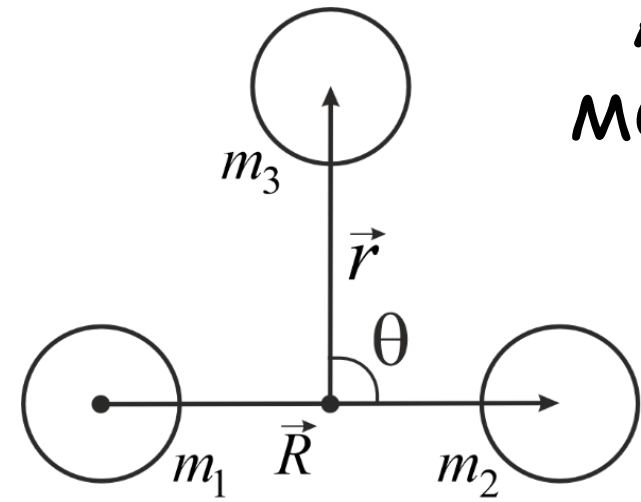
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{h_1 + h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2 + h_3}{3} & \frac{h_3}{6} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{h_{n-2}}{6} & \frac{h_{n-2} + h_{n-1}}{3} & \frac{h_{n-1}}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_{n-1} + h_n}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} & -\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right) & \frac{1}{h_2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_2} & -\left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\left(\frac{1}{h_{n-2}} + \frac{1}{h_{n-1}}\right) & \frac{1}{h_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{h_{n-1}} & -\left(\frac{1}{h_{n-1}} + \frac{1}{h_n}\right) & \frac{1}{h_n} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}$$

[Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - М. Наука, 1980]

Альфа-кластерная модель ядра и метод гиперсферических функций.



Модель трех тел с векторами Якоби.

Вектора Якоби

$$R = r_3 - r_1$$

$$\vec{r} = r_2 - \frac{r_1 + r_3}{2}$$

Нормированные вектора Якоби

$$\vec{x} = \sqrt{\frac{M}{m_0 x_0^2}} \vec{R} \quad \vec{y} = \sqrt{\frac{\mu}{m_0 x_0^2}} \vec{r}$$

Гиперсферические координаты

$$x = \rho \cos \alpha, \quad y = \rho \sin \alpha$$

$$M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\mu = \frac{m_3 (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Разложение волновой функции ψ_0 основного состояния системы по гиперсферическим функциям

$$\psi_0(\alpha, \theta, \rho) = \sum_{l_x K} \chi_K^{l_x}(\rho) \rho^{-5/2} \Phi_{K00}^{l_x l_x}(\Omega) = \sum_{l_x K} \chi_K^{l_x}(\rho) \rho^{-5/2} (\sin \alpha \cos \alpha)^{l_x} N_n^{l_x} J_n^{l_x+1/2, l_x+1/2}(\cos 2\alpha) \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(\cos \theta)$$

$J_n^{l_x+1/2, l_x+1/2}(\cos 2\alpha)$ - полиномы Якоби,

$$N_n^{l_x} = \sqrt{\frac{2n!(2l_x + 2n + 2)(n + 2l_x + 1)!}{\Gamma\left(n + l_x + \frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n + l_x + \frac{3}{2}\right)}}$$

$l_x = 0, 2, 4, \dots$, - угловой момент пары α -частиц, $n = 0, 1, 2, \dots$,
 $K = 2l_x + 2n$ - гипермомент.

Функции $\chi_K^{l_x}(\rho)$, находятся из решения системы гиперрадиальных уравнений.

[Джибути Р.И., Шитикова К.В. Метод гиперсферических функций в атомной и ядерной физике. 1993 г.]

Метод гиперсферических функций. Система гиперрадиальных уравнений.

Система гиперрадиальных уравнений

$$\frac{d^2}{dr^2} \chi_K^{l_x}(\rho) + \left[2Eb_0 - \frac{1}{\rho^2} (K+3/2)(K+5/2) \right] \chi_K^{l_x}(\rho) = 2b_0 \sum_{K'l'_x} \tilde{U}_{KK'}^{l_x l'_x}(\rho).$$

Система уравнений для сплайна: $\mathbf{A}\mathbf{m} = \mathbf{H}\mathbf{F}$

Коэффициенты m_i сплайна совпадают со второй производной волновой функции $\frac{d^2}{dr^2} \chi_K^{l_x} = \mathbf{m} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{H}\mathbf{F}$

$$\mathbf{W}_{i,i} = 2b_0 \tilde{U}_{KK'}^{l_x l'_x}(\rho_i) + \frac{1}{\rho_i^2} (K+3/2)(K+5/2) \delta_{K;K'} \delta_{l_x; l'_x},$$

$$\mathbf{A}_{i,i} = I \frac{h_i + h_{i+1}}{3}, \quad \mathbf{A}_{i,i+1} = \mathbf{A}_{i+1,i} = I \frac{h_{i+1}}{6},$$

$$\mathbf{H}_{i+1,i} = \mathbf{H}_{i,i+1} = I \frac{1}{h_{i+1}}, \quad \mathbf{H}_{i,i} = -I \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right),$$

$$\mathbf{F}_i = \chi_K^{l_x}(\rho_i), \quad i = 1, \dots, n_p - 1.$$

$$\tilde{U}_{K;K'}^{l_x l'_x}(\rho) = \langle l_x l_x K 0 | U | l'_x l'_x K' 0 \rangle, \quad K = 2n + 2l_x$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \quad l_x = 0, 2, 4, \dots$$

$$b_0 = \frac{m_0 \varepsilon_0 x_0^2}{\hbar^2} = 0.02392$$

$$\varepsilon_0 = 1 \text{ MeV},$$

$$x_0 = 1 \text{ fm}$$

m_0 - масса нуклона

E - энергия (в МэВ)

$$-\mathbf{m}_i + \mathbf{W}\mathbf{F} = 2b_0 E \mathbf{F},$$

$$-\mathbf{A}^{-1} \mathbf{H}\mathbf{F} + \mathbf{W}\mathbf{F} = 2b_0 E \mathbf{F},$$

$$\mathbf{B}\mathbf{F} = \lambda \mathbf{F},$$

$$\mathbf{B} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{H}\mathbf{F} + \mathbf{W}\mathbf{F}, \quad \lambda = \frac{2\mu}{\hbar^2} E.$$

Задача сводится к задаче нахождения собственных значений и векторов матрицы

Зарядовое распределение и среднеквадратичный зарядовый радиус ядра альфа-кластерного ядра

Зарядовое распределение $\rho(r)$ в альфа-кластерном ядре

$$\rho(r) = \int n(r_1) \rho_{\text{He}}(|r - r_1|) dr_1^3$$

$n(r_1)$ - функция распределения по радиусам r_1 центров α -частиц определяется выражением

$$n(r_1) = \frac{2}{M\mu} \int_0^{\rho_{\max}} \rho^5 d\rho \int_0^{\pi/2} (\cos \alpha \sin \alpha)^2 d\alpha \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta |\Psi_0(\alpha, \theta, \rho)|^2 \delta(r_1 - R_\alpha(\alpha, \theta, \rho))$$

$\delta(r)$ - дельта-функция Дирака, волновая функция $\Psi_0(\alpha, \theta, \rho)$, зависящая от модулей векторов Якоби и угла между ними, нормирована условием

$$\int_0^{\rho_{\max}} \rho^5 d\rho \int_0^{\pi/2} (\cos \alpha \sin \alpha)^2 d\alpha \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta |\Psi_0(\alpha, \theta, \rho)|^2 = 1$$

При численных расчетах дельта-функция Дирака заменялась на функцию

$$\delta(r) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta r}, & \text{при } |r| \leq \frac{\Delta r}{2}, \\ 0, & \text{при } |r| > \frac{\Delta r}{2}. \end{cases}$$

Среднеквадратичный зарядовый радиус $\langle r_{\text{ch}}^2 \rangle$ системы определяется среднеквадратичным зарядовым радиусом распределения заряда в α -кластере, который считался таким же, как и для α -частицы $\langle r_{\text{He}}^2 \rangle$, и среднеквадратичным радиусом распределения центров α -кластеров $\langle r_\alpha^2 \rangle$

$$\langle r_{\text{ch}}^2 \rangle = \langle r_\alpha^2 \rangle + \langle r_{\text{He}}^2 \rangle$$

$$\langle r_\alpha^2 \rangle = \frac{\int_0^{\infty} (\rho)^5 d\rho \int_0^{\pi/2} (\sin \alpha \cos \alpha)^2 d\alpha \int_0^{\pi} |\Psi(\alpha, \theta, \rho)|^2 R_\alpha^2(\alpha, \theta, \rho) \sin(\theta) d\theta}{\int_0^{\infty} (\rho)^5 d\rho \int_0^{\pi/2} (\sin \alpha \cos \alpha)^2 d\alpha \int_0^{\pi} |\Psi(\alpha, \theta, \rho)|^2 \sin(\theta) d\theta}$$

R_α - расстояние между α -частицей и центром масс системы

$$R_\alpha^2 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{R} + \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \vec{r} \right)^2$$

Для ядра ^{12}C $R_\alpha^2 = \left(\frac{1}{2} \vec{R} + r \frac{1}{3} \right)^2 = \rho^2 \left(\frac{1}{8} (\cos(\alpha))^2 + \frac{1}{4\sqrt{3}} (\cos(\alpha) \sin(\alpha) \cos(\theta)) + \frac{1}{24} (\sin(\alpha))^2 \right)$

Для ядра ^9Be $R_\alpha^2 = \left(\frac{1}{2} \vec{R} + r \frac{1}{9} \right)^2 = \rho^2 \left(\frac{1}{8} (\cos(\alpha))^2 + \frac{1}{12} (\cos(\alpha) \sin(\alpha) \cos(\theta)) + \frac{1}{72} (\sin(\alpha))^2 \right)$

Взаимодействие альфа-частиц

Потенциал сильного взаимодействия $V_{\alpha-\alpha}$ основан данных по рассеиванию альфа частиц, известному как потенциал Али-Бодмера [1]

$$V_{\alpha-\alpha}^{(N)}(r) = v_1 \exp(-r^2/a_1^2) - v_2 \exp(-r^2/a_2^2) \quad (1)$$

Кулоновской взаимодействии $V_{\alpha-\alpha}^{(C)}(r)$ получено из [1,2].

$$V_{\alpha-\alpha}^{(C)}(r, a_c, b_c) = a_c \cdot \operatorname{erf}(b_c r) / r \quad (2)$$

Потенциал с двумя функциями Вудса-Саксона имеет больше параметров. Это важно при описании экспериментальных данных [3]

$$V_{\alpha-\alpha}^{(N)}(r) = -U_{\alpha 1} f(r, B_{\alpha 1}, a_{\alpha 1}) + U_{\alpha 2} f(r, B_{\alpha 2}, a_{\alpha 2}) \quad (3)$$

Функция Вудса-Саксона $f(r, B, a)$

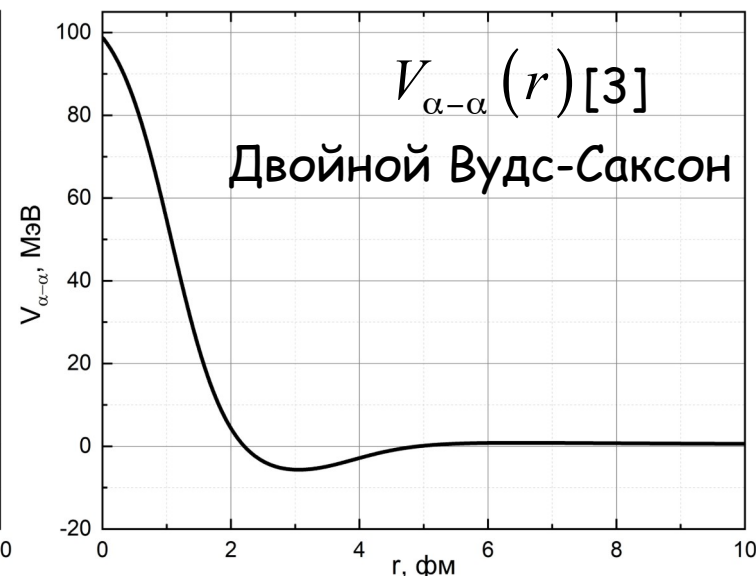
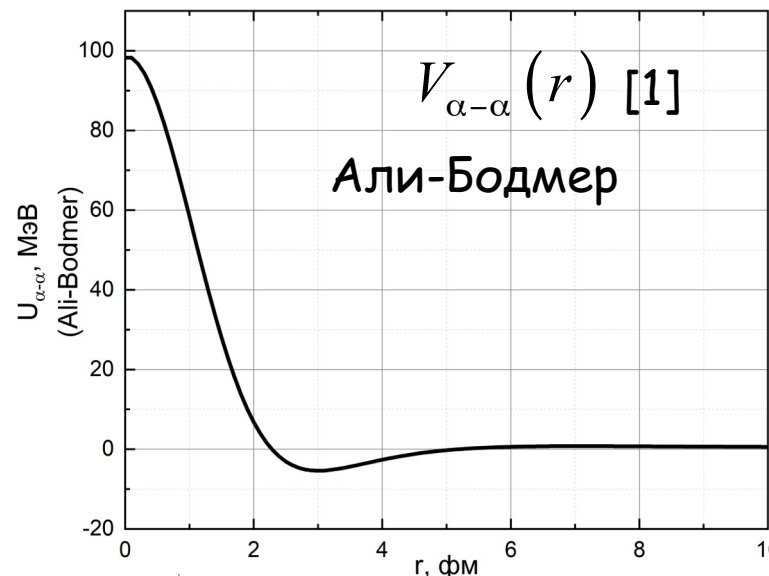
$$f(r, B, a) = \left[1 + \exp\left(\frac{r-B}{a}\right)^{-1} \right] \quad (4)$$

[1] S. Ali, A.R. Bodmer, Nucl. Phys. **80**, 99 (1966).

[2] H. Suno, Y. Suzuki, P. Descouvemont, Phys. Rev. C **91**, 014004 (2015).

[3] V.V. Samarin, Study of spatial structures in α -cluster nuclei, Eur. Phys. J. A, **58**, 117 (2022).

$$V_{\alpha-\alpha}(r) = V_{\alpha-\alpha}^{(N)}(r) + V_{\alpha-\alpha}^{(C)}(r)$$



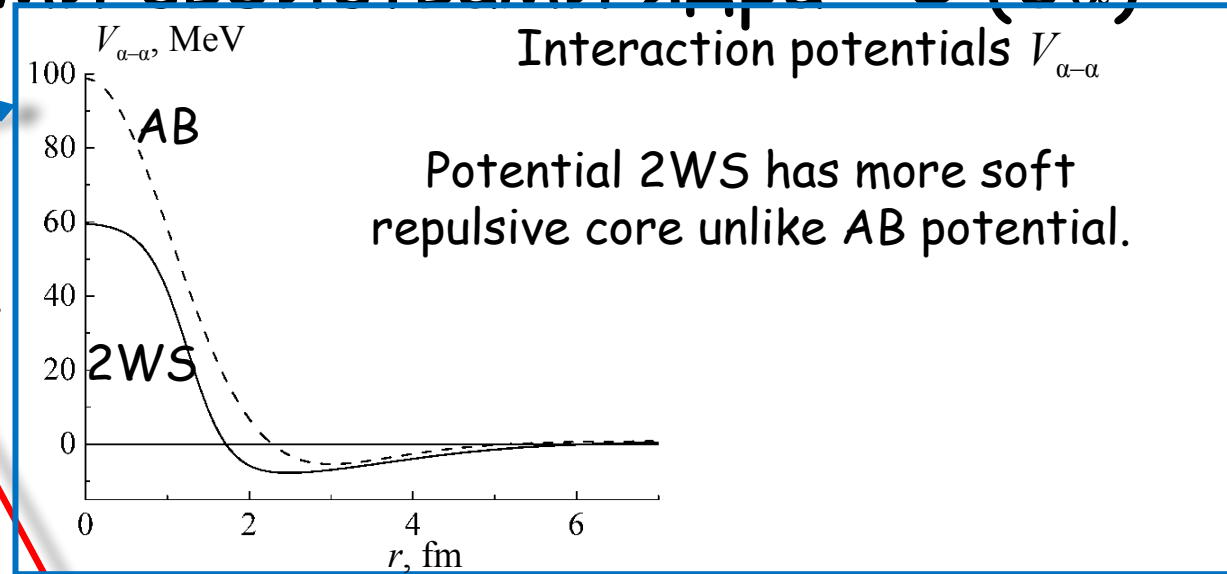
Альфа-альфа рассеяние потенциалов Али-Бодмера и двойного Вудса-Саксона почти совпадают.

Известно, что потенциал Али-Бодмера не подходит для описания энергий связанных состояний альфа-кластерного ядра, к примеру ^{12}C .

Ввиду данного факта, потенциал двойного Вудса-Саксона используется для описания взаимодействия альфа-кластеров в ядре.

Выбор параметров взаимодействия α - α для достижения согласия с экспериментальными свойствами ядра ^{12}C (3α)

1. Для получения согласия с экспериментальными данными, параметры потенциала двойного Вудс-Саксона ядра ^{12}C **были изменены**. Полученное **зарядовое распределение** и энергия отделения на 3 альфа-частицы ядра ^{12}C близки к экспериментальному.

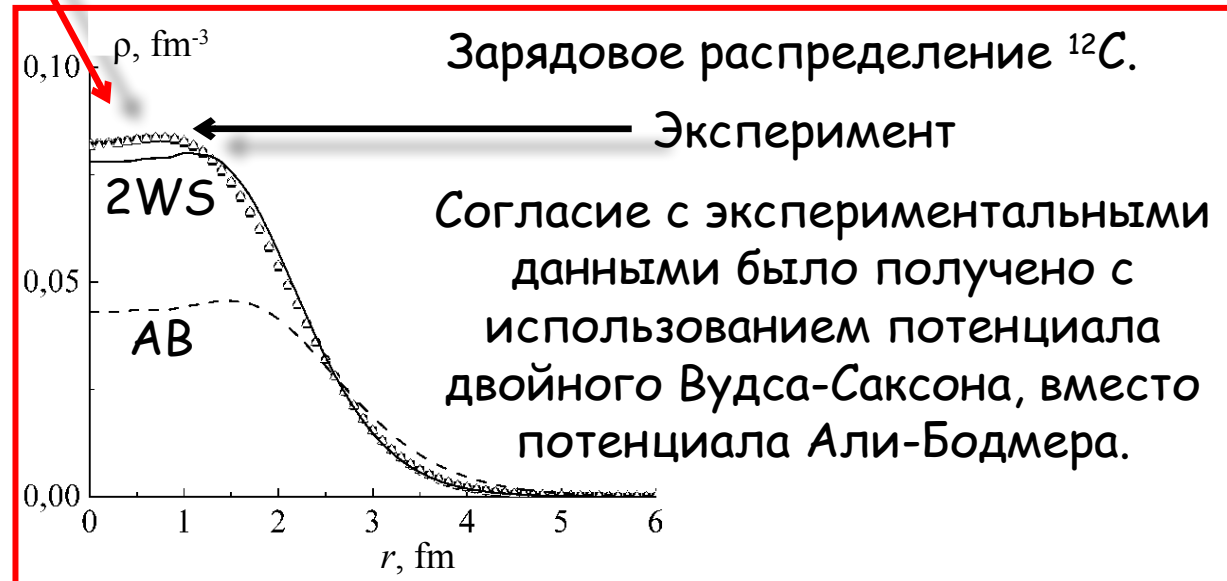


2. После отделения альфа-частицы из ядра ^{12}C , образуется несвязанное состояние в виде ядра ^8Be . По этой причине, полученная энергия основного состояния $E_0 = -7.272$ МэВ близко к

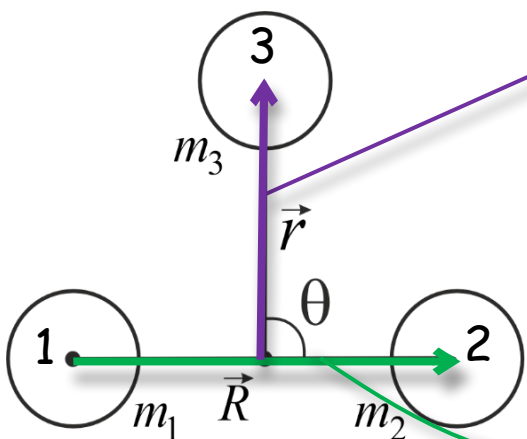
экспериментальному значению отделения альфа-частицы от ^{12}C $E_s = 7.366$ МэВ [1] ($E_0 \approx -E_s$).

3. Вычисленный среднеквадратичный зарядовый радиус также близок к экспериментальному

$$\langle r_C^2 \rangle_{\text{theor}}^{1/2} = 2.774 \text{ fm}, \quad \langle r_C^2 \rangle_{\text{exp}}^{1/2} = 2.47 \text{ fm}.$$



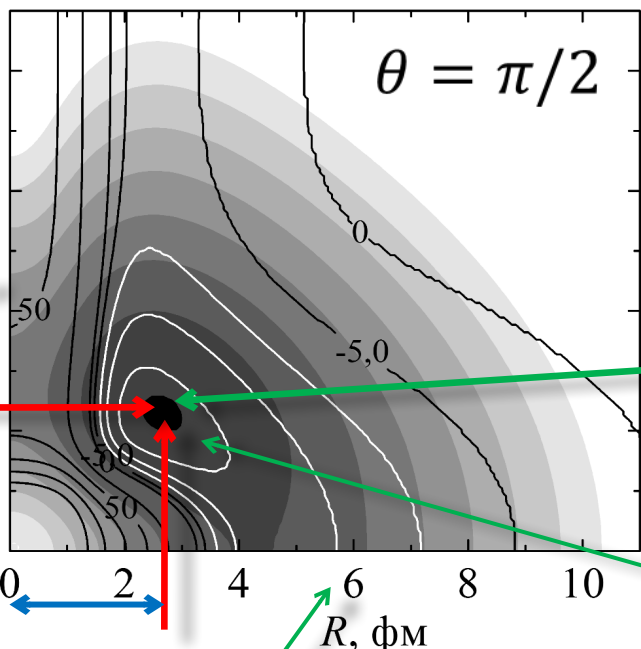
Картина плотности вероятности для основного состояния альфа-кластерного ядра ^{12}C



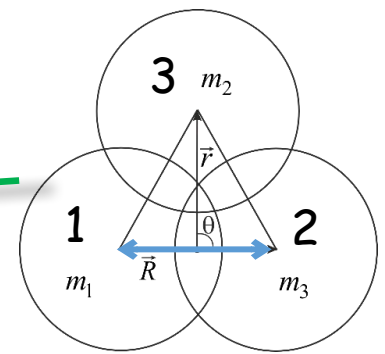
$$r_0 \approx 2.3 \text{ фм}$$

$$r_0 \approx \frac{\sqrt{3}}{2} R_0$$

$$R_0 \approx 2.6 \text{ фм}$$



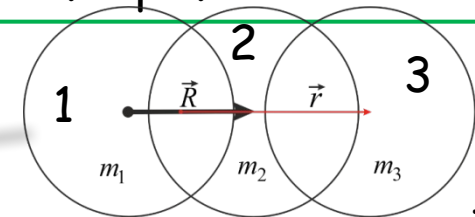
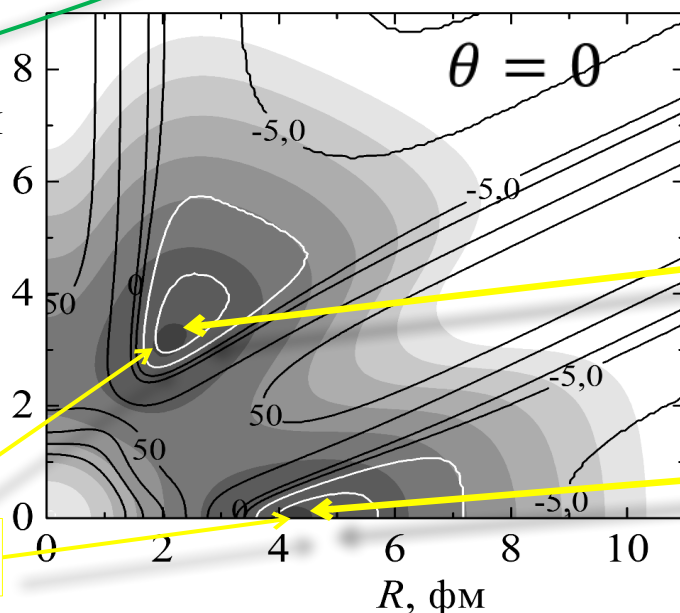
Расположение альфа-кластеров, радиус альфа-кластеров был выбран в как для ядра ^4He - 1.67 фм.



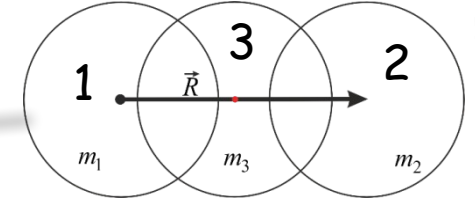
Треугольная конфигурация

Самое вероятное состояние - треугольное, когда альфа-кластеры расположены в вершинах равностороннего треугольника с длиной сторон ~ 2.6 фм.

Смягчение отталкивающего кора приводит к перекрытию чистой альфа-кластерной структуры. Зарядовое распределение и зарядовый радиус $\langle r_C^2 \rangle_{\text{theor}}^{1/2}$ рассчитаны как среднее для всех позиций векторов \vec{R} и \vec{r} .

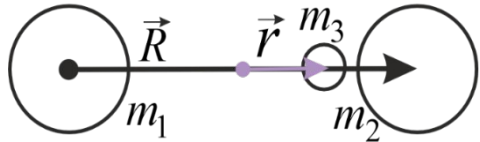
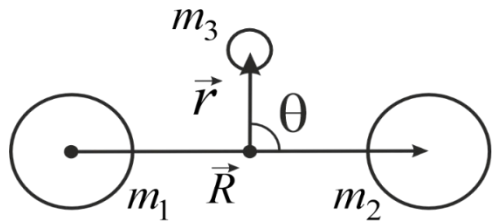


Линейная конфигурация

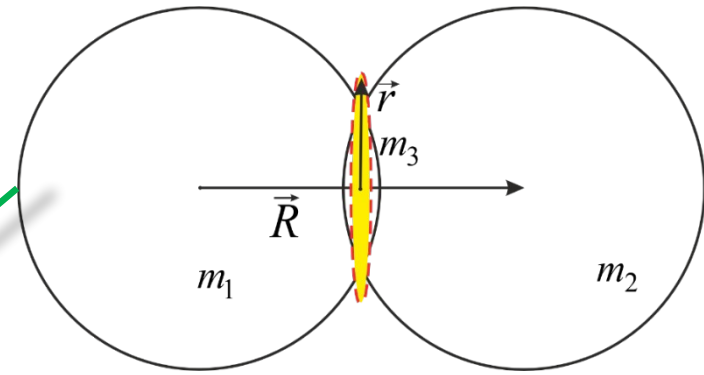
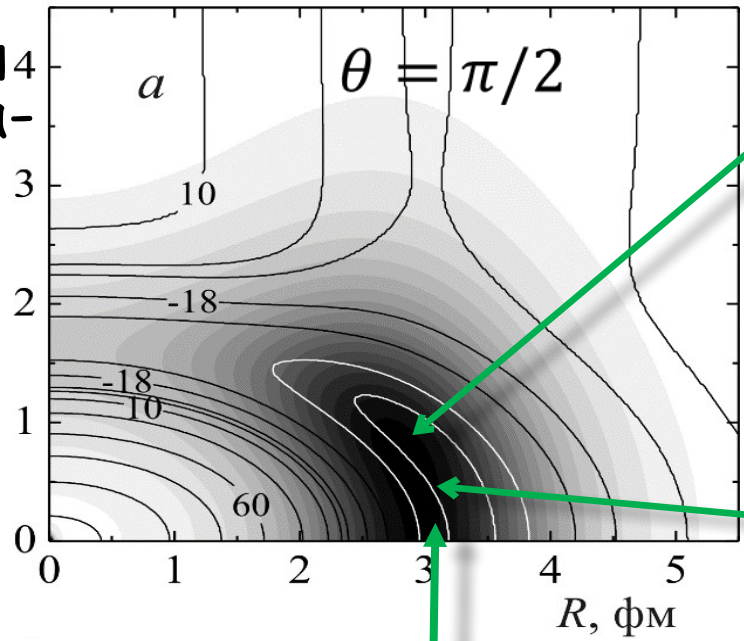


Менее вероятная конфигурация

Картина плотности вероятности для основного состояния альфа-кластерного ядра ${}^9\text{Be}$

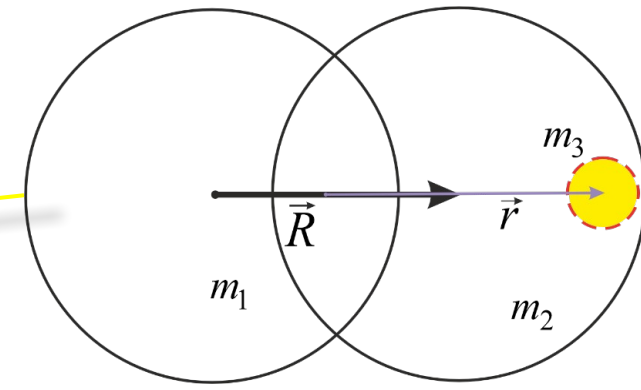
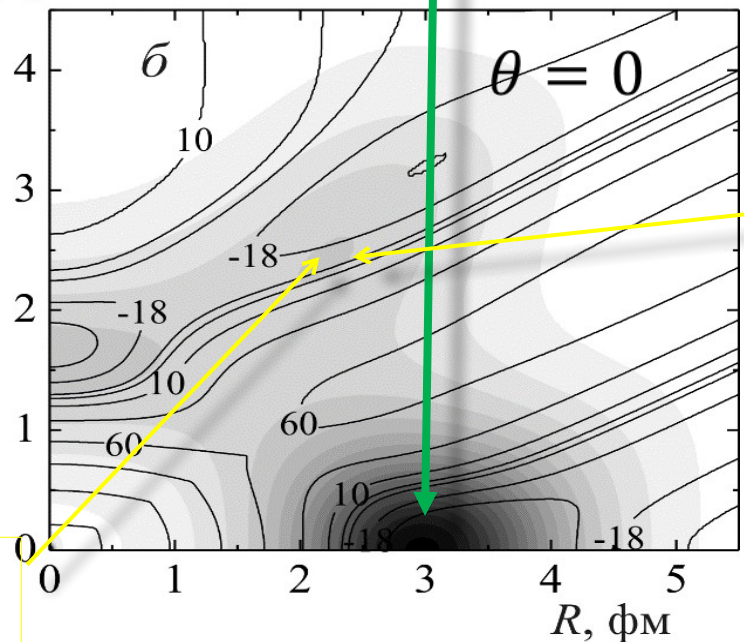


$r, \text{ фм}$



Наиболее вероятная конфигурация "ядерной молекулы", когда нейтрон находится между альфа-кластерами.

$r, \text{ фм}$



Менее вероятная конфигурация ${}^4\text{He}+{}^5\text{He}$.

		$E_0, \text{ MeV}$		$\langle r_\alpha^2 \rangle^{1/2}, \text{ fm}$		$\langle r_{\text{Be}}^2 \rangle, \text{ fm}$	
n_{max}	l_{max}	$V_{\alpha-\alpha}^{(N)}(29)$	$V_{\alpha-\alpha}^{(N)}(33)$	$V_{\alpha-\alpha}^{(N)}(29)$	$V_{\alpha-\alpha}^{(N)}(33)$	$V_{\alpha-\alpha}^{(N)}(29)$	$V_{\alpha-\alpha}^{(N)}(33)$
2	2	-0.5814	-0.9979	2.3260	2.0577	2.7875	2.6466
4	4	-1.0813	-1.4824	2.2333	2.0	2.7854	2.6020
6	6	-1.2378	-1.6135	2.2308	2.0079	2.7834	2.6081
8	8	-1.2815	-1.6471	2.2418	2.0160	2.7922	2.6144
10	10	-1.2949	-1.6562	2.2502	2.0237	2.7989	2.6203
12	12	-1.2993	-1.6591	2.2530	2.0266	2.8012	2.6225

Картина плотности вероятности для основного состояния альфа-кластерного ядра ${}^6\text{Li}$

Основное состояние $J=1$:

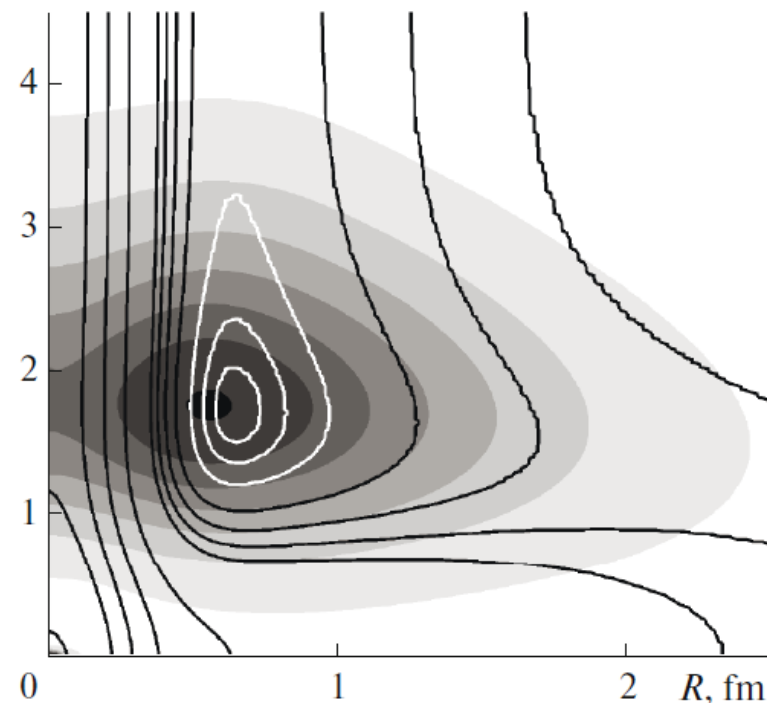
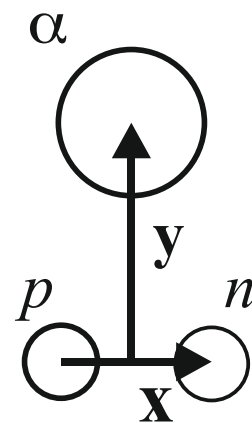
$E_{\text{отд}} = 3.725 \text{ MeV}$ (на 3 частицы α , p и n).

Вычисленная энергия основного триплетного состояния ($p+n$) подсистемы - 3.7 MeV .

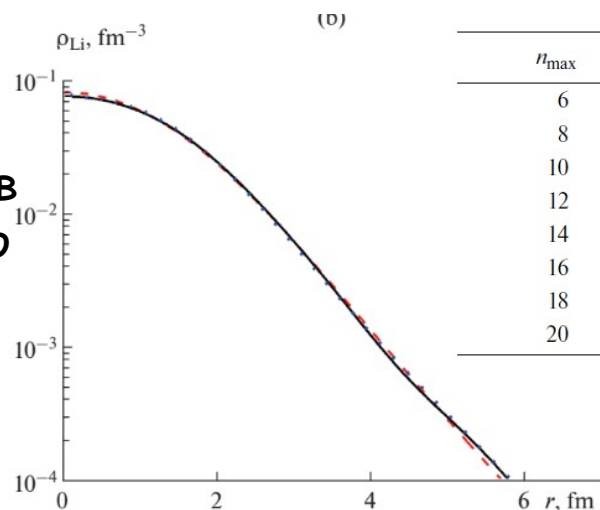
Возбужденные состояния $J=0$:

$E_{\text{возб}} = 3.563 \text{ MeV}$, $E_{\text{отд}} = 0.162 \text{ MeV}$ (на 3 частицы α , p и n)

может быть представлено как основное синглетное состояние ($p+n$), вычисленная энергия равна -0.3 MeV .



Зарядовое распределение (в размерности элементарного заряда) для основного состояния ядра ${}^6\text{Li}$.

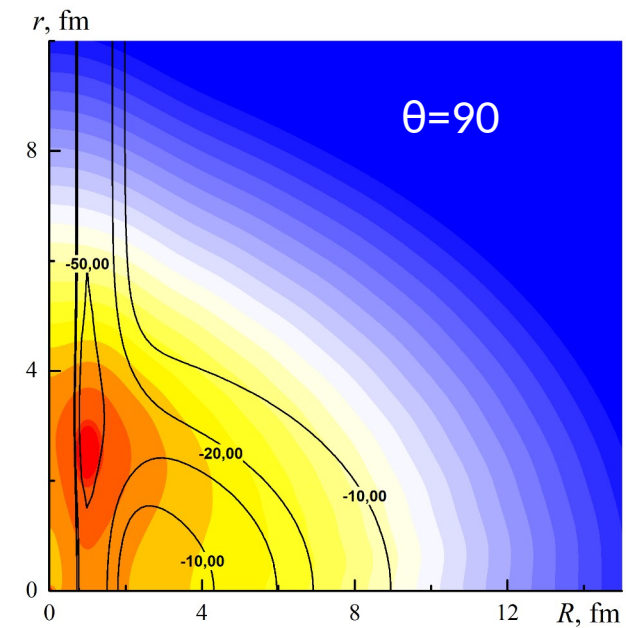
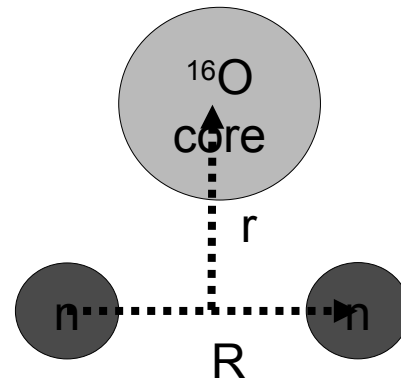


n_{max}	l_{max}	$E_0, \text{ MeV}$		$\langle r_{\text{Li}}^2 \rangle^{1/2}, \text{ fm}$	
		$E_{0,t}$	$E_{0,s}$	$J=1$	$J=0$
6	6	-3.439		2.50	
8	8	-3.544		2.524	
10	10	-3.602	-0.0556	2.538	3.088
12	12	-3.638	-0.0851	2.546	3.079
14	14	-3.663	-0.1052	2.549	3.075
16	16	-3.680	-0.1221	2.554	2.981
18	18	-3.693	-0.1323	2.554	2.984
20	20	-3.702		2.554	

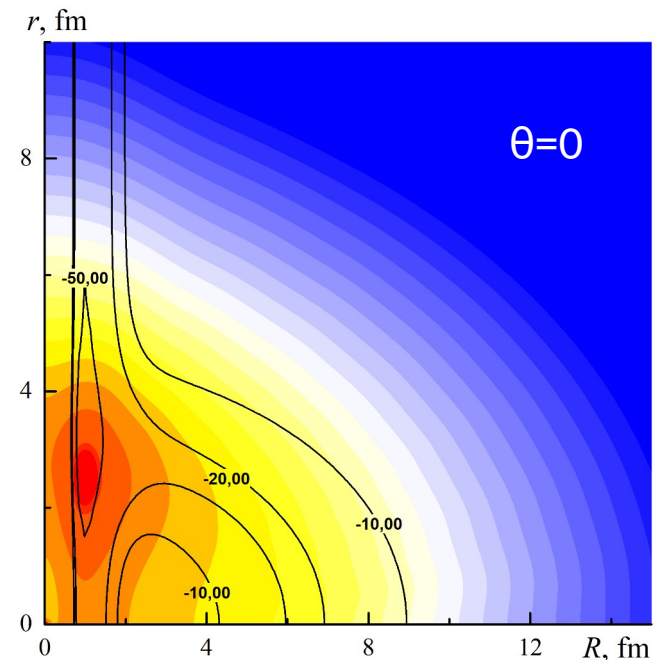
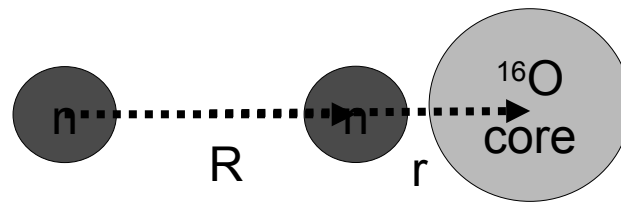
Картина плотности вероятности для основного состояния альфа-кластерного ядра ^{18}O

Волновые функции основного состояния ядра ^{18}O в модели кор+нейтроны вычислены методом гиперсферических функций [1,2].

Для ядра ^{18}O энергия отделения $E_0 = -12.38$ МэВ и экспериментальное значение -12.188 МэВ.



n_{\max}	l_{\max}	$E_0(^{18}\text{O})$, МэВ	$\langle r_{\alpha^{18}\text{O}}^2 \rangle^{1/2}$, фм	$\langle r_{^{18}\text{O}}^2 \rangle^{1/2}$, фм
6	6	-7.876	-	-
8	8	-7.964	-	-
10	10	-8.049	-	-
12	12	-8.113	-	-
14	14	-8.155	-	-



1. V.V. Samarin, Eur. Phys. J. A, **58**, 117 (2022).
2. A.S. Bazhin, V.V. Samarin, Bull. Russ. Acad. Sci: Phys, **88**, 1177 (2024).

Дальнейшие планы

Написание статьи "ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ЯДЕР ^{17}O , ^{18}O и ^{20}Ne В АЛЬФА-КЛАСТЕРНОЙ И ОБОЛОЧЕЧНОЙ МОДЕЛЯХ"

Исследование резонансных состояний ^9Be с использованием методов кубического сплайна и функций Йоста.

Использование полученных пространственных структур в расчётах ядерных реакций с помощью метода DWBA.

Спасибо за внимание!

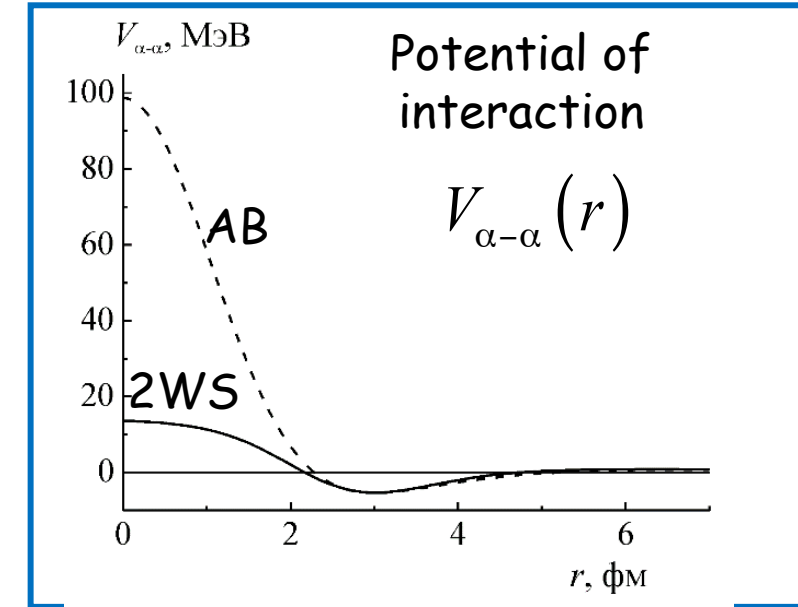
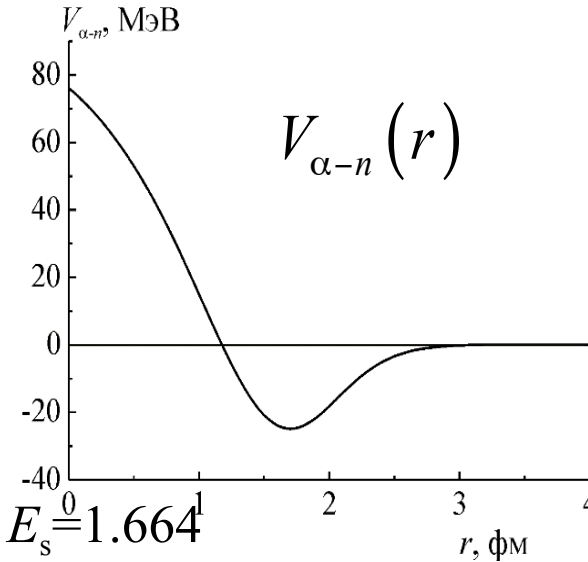
Черновики

Selection of parameters of α - α interaction potential for making an agreement with experimental properties of alpha-cluster nucleus ${}^9\text{Be}$ (α - n - α). Potential $V_{\alpha-n}$

Interaction α - n is represented by pseudopotential of strong interaction between alpha-cluster and nucleon.

It gives correct description for neutrons outside of alpha-cluster (doesn't take into account neutrons scattering on alpha-clusters)

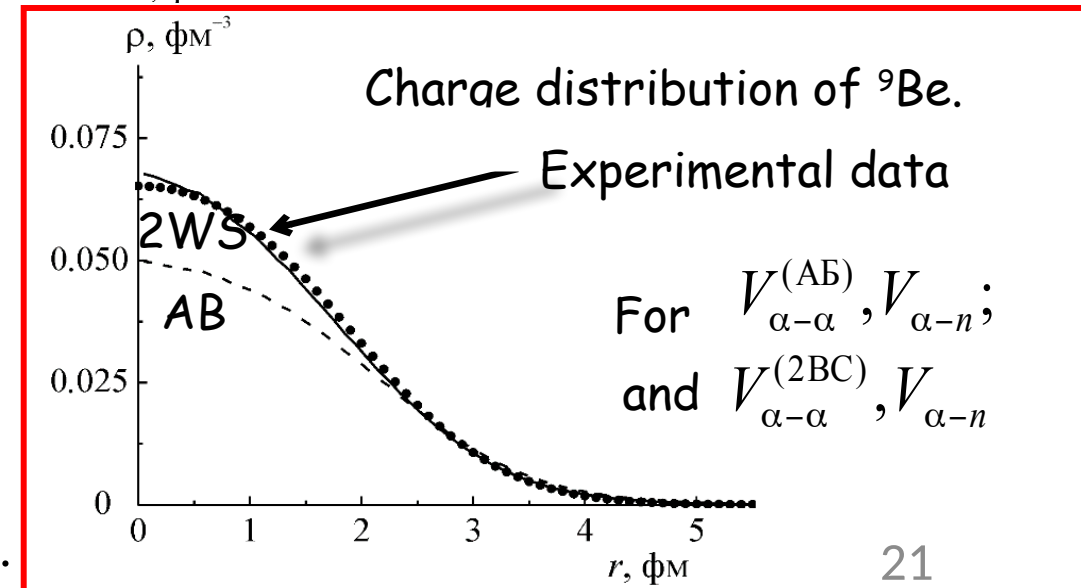
$$V_{\alpha-n}(r) = -U_1 f(r, B_1, a_1) + U_2 f(r, B_2, a_2) - U_3 f(r, B_3, a_3).$$



Experimental value of neutron separation for ${}^9\text{Be}$ $E_s^0 = 1.664$ MeV [1]. After neutron separation, unbound nucleus ${}^8\text{Be}$ is formed.

As a result of the selection, the value of the ground state energy was obtained $E_0 = -1.663$ MeV. Thus, agreement with experimental data was obtained $E_0 \approx -E_s$.

At the same time, charge distribution was obtained, which is close to the experimental data. Calculated rms charge radii also is close to the experimental value [1].



$$\langle r_C^2 \rangle_{\text{theor}}^{1/2} = 2.43 \text{ fm}, \langle r_C^2 \rangle_{\text{exp}}^{1/2} = 2.52 \text{ fm}.$$

Selection of parameters of α - α interaction potential for making an agreement with experimental properties of alpha-cluster nucleus ${}^6\text{Li}$ (α -n-p)

The parameters of the SX variant [1] of the A-T-potential

The nuclear part of the nucleon-nucleon interaction may be described by the effective pairwise central soft-core Afnan-Tang (A-T) potential [7] for a triplet state (t) and for a singlet (s) state

$$V_{t,s}(r) = \sum_{i=1}^3 v_i^{(t,s)} \exp(-\beta_i^{(t,s)} r^2)$$

	$v_1(\text{MeV})$	$v_2(\text{MeV})$	$v_3(\text{MeV})$	$\beta_1(\text{fm}^{-2})$	$\beta_2(\text{fm}^{-2})$	$\beta_3(\text{fm}^{-2})$
t	500	-102	-2	11.41	0.625	0.141
s	500	-102	-2	4.15	0.625	0.141

We using effective nucleon-nucleon pseudopotentials $V_{\alpha-n}$ and $V_{\alpha-p}$ in calculations [1]. The pseudopotentials do not take into account the data on phase shifts, but their forms are similar to α - α and nucleon-nucleon potentials. The parameters of the pseudopotentials were determined from the condition of equality of the calculated and experimental values of the ground state energies for systems α -cluster + nucleons.

$$V_{\alpha-N}^{(N)}(r) = -u_1 f(r, B_1, a_1) + u_2 f(r, B_2, a_2) - u_3 f(r, B_3, a_3) f(r, B_4, a_4),$$

$$f(r, B, a) = \left[1 + \exp\left(\frac{r-B}{a}\right) \right]^{-1}, \quad V_{\alpha-n}(r) = V_{\alpha-N}^{(N)}(r), \quad V_{\alpha-p}(r) = V_{\alpha-N}^{(N)}(r) + V_{\alpha-p}^{(C)}(r)$$

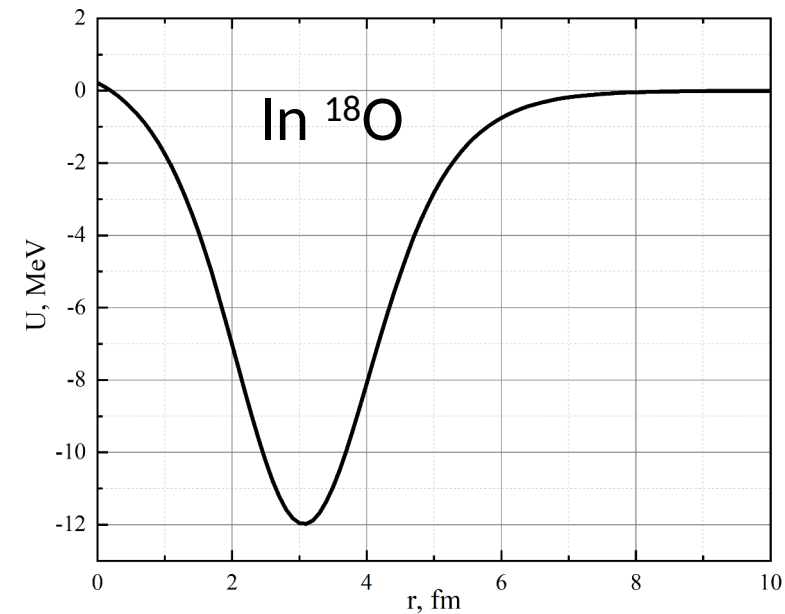
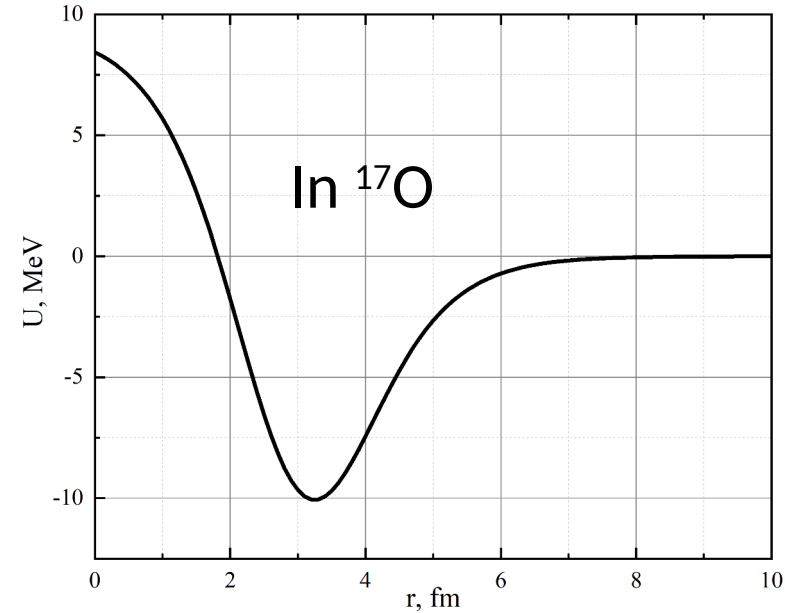
I	u_1 (MeV)	B (fm)	a (fm)
1	64.8	1.95	0.25
2	55.8	1.22	0.3
3	119	0.9	0.5
4	—	2.7	1

Core-nucleon potential in ^{17}O , ^{18}O

The two-body Schrodinger equation was also solved by spline-interpolation method. The calculated energy separation for ^{17}O is -4.01 MeV and the experimental value is 4.14 MeV. This potential gives the correct energy.

17 O	α - decay	-6358.67
	β^- - decay	-2760.43
	β^+ - decay	-9700.87
	e-capture	-8678.87
	1p - decay	-13781.67
	2p - decay	-25259.91
	1n - decay	-4143.06

The similar potential was used to calculate the separation energy of ^{18}O .



Nucleon–nucleon potentials for description of ^{18}O

Below we use the nucleon-nucleon potentials SX and α -nucleon pseudopotential to calculate of the ground state energies for system ^{18}O (core+ $n+n$).

