

Вычисление интегралов Фейнмана в интегрируемых квантовых теориях поля

Слуцкая Ольга Юрьевна

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Научный руководитель PhD, к.ф.-м.н., доц. Алфимов М.Н.

Москва, 1 июля 2026 г.

Объект изучения: Бозонная модель Тирринга в пространстве Минковского.

Цель работы: исследовать механизм дуальности между бозонной моделью Тирринга и комплексной моделью синус-Гордона, а также проверить гипотезу об интегрируемости модели Тирринга в старших порядках теории возмущений.

Литература: M. Alfimov, A. Kurakin, «On bosonic Thirring model in Minkowski signature», *Nucl. Phys. B* 998, 116418 (2024).

Квантовые технологии:

- **Подавление ошибок:** точное решение интегрируемых контуров → калибровка квантовых процессоров.
- **Квантовый транспорт:** корреляционные функции → моделирование спиновых цепочек.
- **Топологические фазы:** S -матрица описывает рассеяние на топологических дефектах.

Бозонная модель Тирринга — это очень удобная простая игрушечная модель для исследования всех перечисленных прикладных задач.

Фундаментальная физика:

- **BFKL-спектр:** диаграммы Fishnet CFT → поведение глюонов в КХД.
- **Геометрия Калаби-Яу:** спектры теорий \leftrightarrow периоды многообразий.
- **Дробный квантовый эффект Холла:** методы обобщаются на парафермионы.

Правила Фейнмана для $\beta\gamma$ -модели

Исходная бозонная модель Тирринга:

$$\mathcal{L}_{\beta\gamma} = \beta_+ \partial_- \bar{\gamma} + \beta_- \partial_+ \gamma - m\beta_+ \beta_- - m\bar{\gamma} \gamma + g^2 \beta_+ \beta_- \gamma \bar{\gamma}$$

Свободный лагранжиан записывается в матричной форме:

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = -\frac{1}{2} \Phi^T \hat{K} \Phi, \quad \Phi = (\beta_+ \quad \beta_- \quad \bar{\gamma} \quad \gamma)^T$$

где \hat{K} — матрица кинетического оператора.

Матрица пропагаторов находится как обратная к \hat{K} в импульсном представлении:

$$D(k) = -i\tilde{K}^{-1}(k)$$

Явный вид пропагаторов:

$$\langle \tilde{\beta}_+(k) \tilde{\beta}_-(-k) \rangle = \frac{im}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

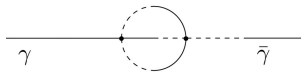
$$\langle \tilde{\gamma}(k) \tilde{\beta}_+(-k) \rangle = \frac{2k^-}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$\langle \tilde{\gamma}(k) \tilde{\gamma}(-k) \rangle = \frac{im}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

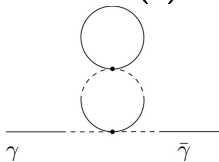
$$\langle \tilde{\gamma}(k) \tilde{\beta}_-(-k) \rangle = \frac{2k^+}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Типы двухпетлевых диаграмм

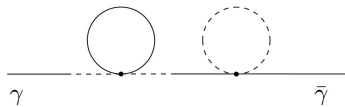
«Закатные» (Sunset)
(a)



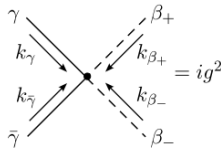
Связанные
петли (b)



Разделенные петли (c)



$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \gamma \qquad \bar{\gamma} \end{array} = \frac{im}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 & \begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \beta_+ \qquad \beta_- \end{array} = \frac{im}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 & \begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \gamma \qquad \beta_- \end{array} = \frac{2k^-}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 & \begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \bar{\gamma} \qquad \beta_+ \end{array} = \frac{2k^+}{k^2 - m^2 + i\epsilon}
 \end{aligned}$$



Исходное выражение для sunset-вклада:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\gamma} \tilde{\gamma} \rangle_a^{(2)} = & g^4 \frac{m^2 + k^2}{(k^2 - m^2)^2} (J_0 - J_2^{+-}) \\ & - \frac{2im g^4}{(k^2 - m^2)^2} (k^+ J_1^- + k^- J_1^+ - k^+ J_3^{-+-} - k^- J_3^{+--}) \end{aligned}$$

Ключевая идея: перейти от светоконусных компонент к скалярным произведениям.

Результат: числитель сведён к комбинации мастер-интегралов, что позволило выделить ультрафиолетовые расходимости.

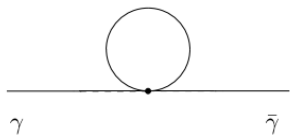
Лагранжиан CSG имеет вид:

$$\mathcal{L}_{\text{CSG}} = \underbrace{\frac{\partial_+ \gamma \partial_- \bar{\gamma}}{m - g^2 \gamma \bar{\gamma}} - m \gamma \bar{\gamma}}_{\text{результат интегрирования по } \beta_{\pm}} - \underbrace{\frac{g^4 \partial_+ (\gamma \bar{\gamma}) \partial_- (\gamma \bar{\gamma})}{8\pi (m - g^2 \gamma \bar{\gamma})^2}}_{\text{контрчлен}} + \dots$$

Разложение в ряд по g^2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \underbrace{\frac{1}{m} \partial_+ \gamma \partial_- \bar{\gamma} - m \gamma \bar{\gamma}}_{\mathcal{L}_0} + \underbrace{\frac{g^2}{m^2} \partial_+ \gamma \partial_- \bar{\gamma} \gamma \bar{\gamma}}_{\mathcal{L}_2} \\ &+ \underbrace{\frac{g^4}{m^3} \partial_+ \gamma \partial_- \bar{\gamma} (\gamma \bar{\gamma})^2}_{\mathcal{L}_{4a}} - \underbrace{\frac{g^4}{8\pi m^2} \partial_+ (\gamma \bar{\gamma}) \partial_- (\gamma \bar{\gamma})}_{\mathcal{L}_{4b}} + O(g^6). \end{aligned}$$

Однопетлевой вклад в двухточечную функцию $\langle \gamma \bar{\gamma} \rangle$



Вершинный множитель:

$$V(k, p) = i \frac{g^2}{m^2} (k^2 + p^2)$$

Собственная энергия:

$$\Gamma^{(1)}(k) = V \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{im}{p^2 - m^2}$$

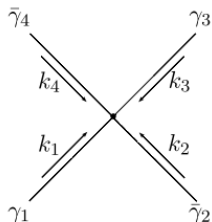
Поправка к пропагатору:

$$\Delta^{(1)}(k) = \Delta_0(k) \Gamma^{(1)}(k) \Delta_0(k)$$

Итоговое выражение:

$$\Delta^{(1)}(k) = -i \frac{g^2 (k^2 + m^2) m}{4\pi (k^2 - m^2)^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right)$$

Древесный вклад в четырёхточечную функцию $\langle \gamma \bar{\gamma} \gamma \bar{\gamma} \rangle$



Вершинный множитель:

$$\mathcal{M}_{\text{vertex}} = -4i \frac{g^2}{m^2} (k_1^- + k_3^-)(k_2^+ + k_4^+)$$

Четырёхточечная функция:

$$G_{\text{tree}}^{(4)} = \prod_{i=1}^4 \Delta_0(k_i) \cdot \mathcal{M}_{\text{vertex}}$$

В явном виде:

$$G_{\text{tree}}^{(4)} = -4ig^2 m^2 \frac{(k_1^- + k_3^-)(k_2^+ + k_4^+)}{(k_1^2 - m^2)(k_2^2 - m^2)(k_3^2 - m^2)(k_4^2 - m^2)}$$

Полученные результаты:

- 1 Вычислены двухпетлевые диаграммы типа (a), (b), (c) для двухточечной функции
- 2 Числитель sunset-диаграмм сведён к комбинации мастер-интегралов
- 3 Выделены ультрафиолетовые расходимости для каждого типа диаграмм
- 4 Получено выражение для общей двухпетлевой расходимости
- 5 Подтверждено совпадение с моделью CSG:
 - однопетлевой вклад в двухточечную функцию,
 - древесный вклад в четырёхточечную функцию.

Планы на третий семестр:

- 1 Вычислить четырёхточечную функцию в CSG в однопетлевом порядке
- 2 Выполнить вычисление двухточечной функции в CSG на двухпетлевом уровне
- 3 Сравнить структуры расходимостей в обеих моделях
- 4 Определить явный вид двухпетлевого контрчлена

- 68-я Всероссийская научная конференция МФТИ (Москва, март 2026) — доклад «Двухпетлевой анализ бозонной модели Тирринга в пространстве Минковского».

Спасибо за внимание!