

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

(НИЯУ «МИФИ»)

УДК 539.123

ОТЧЕТ

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

Анализ чувствительности осцилляционных реакторных экспериментов со
средней базой к иерархии масс нейтрино

Руководитель НИР,
к.ф.-м.н.

_____ О.А. Титов

Студент

_____ Д.В. Попов

Москва 2020

Содержание

Введение	3
1 Вероятность выживания	4
2 Реакторные эксперименты. Эксперимент JUNO	8
3 Анализ чувствительности	13
3.1 Влияние осцилляций на спектр реакторных антинейтрино . . .	13
3.2 Влияние осцилляций на спектр обратного бета-распада	14
3.3 Влияние функции отклика детектора	17
3.4 Спектральный анализ: преобразование Фурье	21
4 Математическая модель	24
4.1 Модель реакторного спектра	24
4.2 Модель позитронного спектра	27
4.3 Метод Монте-Карло	29
5 Заключение	36
5 Список использованных источников	37

Введение

Явление нейтринных осцилляций — перехода нейтрино одного сорта (электронного, мюонного или тау-нейтрино) в нейтрино других сортов — активно исследовалось в последние два десятилетия и неоднократно наблюдалось в различных экспериментах.

На данный момент измерены основные параметры осцилляций: углы смешивания и разности квадратов масс. Открытой, однако, остаётся проблема иерархии масс: тяжелее или легче одно из массовых состояний, чем два других? Решение этой проблемы важно для построения теоретических моделей масс и смешивания нейтрино, поиска CP -нарушения в лептонном секторе, более точного моделирования астрофизических процессов [1].

Иерархию масс планируется определить в экспериментах нового поколения, в частности, в реакторных экспериментах с расстоянием до детектора порядка 50 км [2, 3, 4]. В недавних работах [4, 5] обсуждалось влияние неопределённостей спектров реакторных антинейтрино на чувствительность таких экспериментов.

Целью данной работы является построение математической модели реакторного эксперимента JUNO с использованием метода Монте-Карло для анализа чувствительности реакторных экспериментов к иерархии масс.

1 Вероятность выживания

Согласно [1], первым необходимым условием осцилляций является ненулевая масса нейтрино для различных ароматов (аромат в дальнейшем будем называть электрослабым состоянием), которая вводится в Стандартную модель путем добавления к лагранжиану дополнительного массового слагаемого — некоторой эрмитовой, лоренц-ковариантной и, вообще говоря, недиагональной матрицы \mathbf{M} . Электрослабые состояния нейтрино $|\nu_e\rangle$, $|\nu_\mu\rangle$ и $|\nu_\tau\rangle$ при этом не являются для неё собственными. Путем диагонализации \mathbf{M} можно получить три массовых вектора $|\nu_1\rangle$, $|\nu_2\rangle$ и $|\nu_3\rangle$, которые, как и электрослабые, являются базисом в пространстве состояний, но обладают определенной массой. Переход между этими двумя состояниями осуществляется матрицей перехода \mathbf{U}_{PMNS} :

$$\begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\mu\rangle \\ |\nu_\tau\rangle \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{\text{PMNS}} \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \\ |\nu_3\rangle \end{pmatrix}, \quad (1)$$

реализующей смешивание состояний нейтрино, что является вторым необходимым условием осцилляций. Матрица \mathbf{U}_{PMNS} называется матрицей смешивания Понтекорво–Маки–Накагава–Саката и один из видов её параметризации выглядит следующим образом [6]:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{\text{PMNS}} = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{23} & \sin \theta_{23} \\ 0 & -\sin \theta_{23} & \cos \theta_{23} \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} \cos \theta_{13} & 0 & \sin \theta_{13} \cdot e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_{13} \cdot e^{-i\delta} & 0 & \cos \theta_{13} \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} & \sin \theta_{12} & 0 \\ -\sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2) \end{aligned}$$

Такая матрица параметризована четырьмя параметрами — тремя углами смешивания $\theta_{ij} \in [0; \pi/2]$ и комплексной фазой $\delta \in [-\pi; \pi]$, неравенство нулю которой приводит к CP-нарушению в лептонном секторе. Геометрическая интерпретация смешивания нейтринных состояний представлена на рисунке 1.

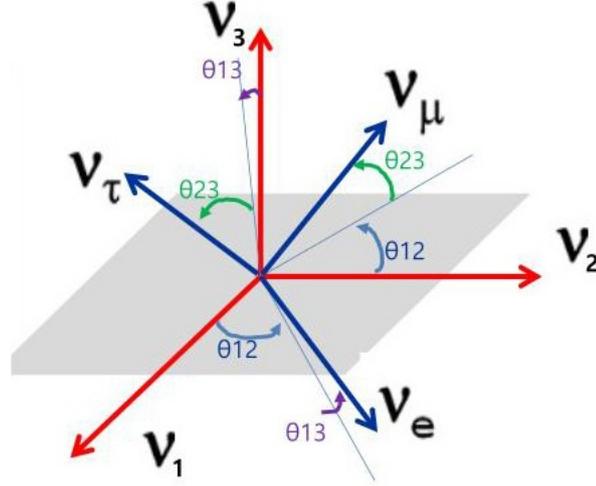


Рисунок 1 — Геометрическая интерпретация смешивания нейтринных состояний

Рассмотрим случай нейтринных осцилляций, когда матрица смешивания параметризована в виде (2). Под вероятностью выживания будем понимать вероятность P_{ee} того, что нейтрино в начальном состоянии $|\nu_e\rangle$ в момент времени t будет зарегистрировано в том же состоянии $|\nu_e\rangle$. Полагаем, что все нейтрино в пучке имеют одинаковый фиксированный импульс p_ν и двигаются со скоростью света. Получим [6]:

$$P_{ee} = 1 - \sin^2 2\theta_{13} (\cos^2 \theta_{12} \sin^2 \Delta_{31} + \sin^2 \theta_{12} \sin^2 \Delta_{32}) - \cos^4 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \Delta_{21}, \quad (3)$$

где $\Delta_{ij} = 1.267 \cdot \Delta m_{ij}^2 \frac{L}{E}$, $i, j = 1, 2, 3$.

$\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$ — разность квадратов масс массовых состояний [эВ²];

L — пройденный путь (расстояние от источника до детектора) [км];

E — энергия нейтрино [МэВ].

Поскольку осцилляции не зависят от шкалы масс, неизвестно, в каком соотношении находятся друг к другу сами массы. Гипотезы $m_1, m_2 \ll m_3$ и $m_3 \ll m_1, m_2$ называют нормальной и обратной иерархиями соответственно. Иллюстрация нормальной и обратной иерархий представлена на рисунке 2.

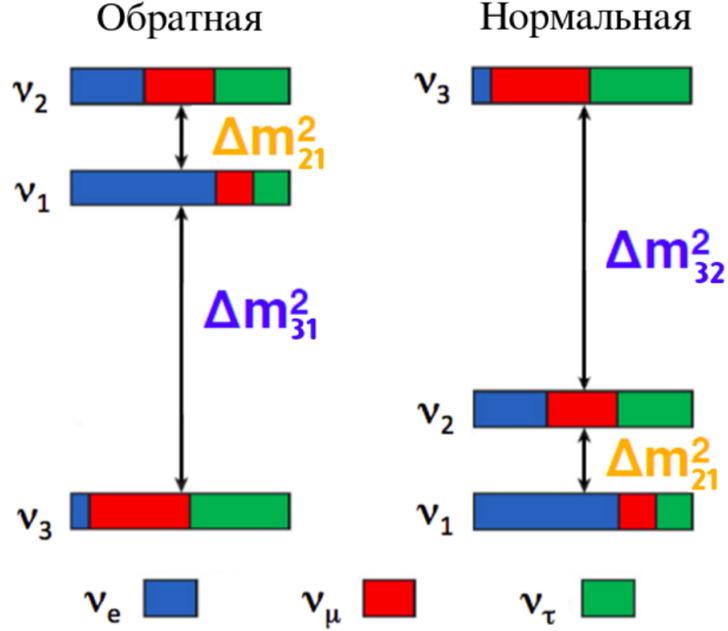


Рисунок 2 — Иллюстрация гипотез нормальной и обратной иерархий масс нейтрино

Измеренные на данный момент параметры осцилляций представлены в таблице 1.

	Нормальная иерархия	Обратная иерархия
$\sin^2 \theta_{12}$	0.307 ± 0.013	
$\sin^2 \theta_{13}$	$(2.12 \pm 0.08) \cdot 10^{-2}$	
$\sin^2 \theta_{23}$	0.417 ± 0.028	0.421 ± 0.033
$\Delta m_{21}^2, \text{эВ}^2$	$(7.53 \pm 0.18) \cdot 10^{-5}$	
$\Delta m_{31}^2, \text{эВ}^2$	$(2.59 \pm 0.08) \cdot 10^{-3}$	$(-2.49 \pm 0.07) \cdot 10^{-3}$
$\Delta m_{32}^2, \text{эВ}^2$	$(2.51 \pm 0.05) \cdot 10^{-3}$	$(-2.56 \pm 0.04) \cdot 10^{-3}$

Таблица 1 — Параметры осцилляций по данным PDG 2018 [8]

На рисунке 3 представлен график зависимости вероятности выживания от энергии нейтрино $P_{ee}(E)$ при фиксированном расстоянии от источника до детектора $L = 53$ километра.

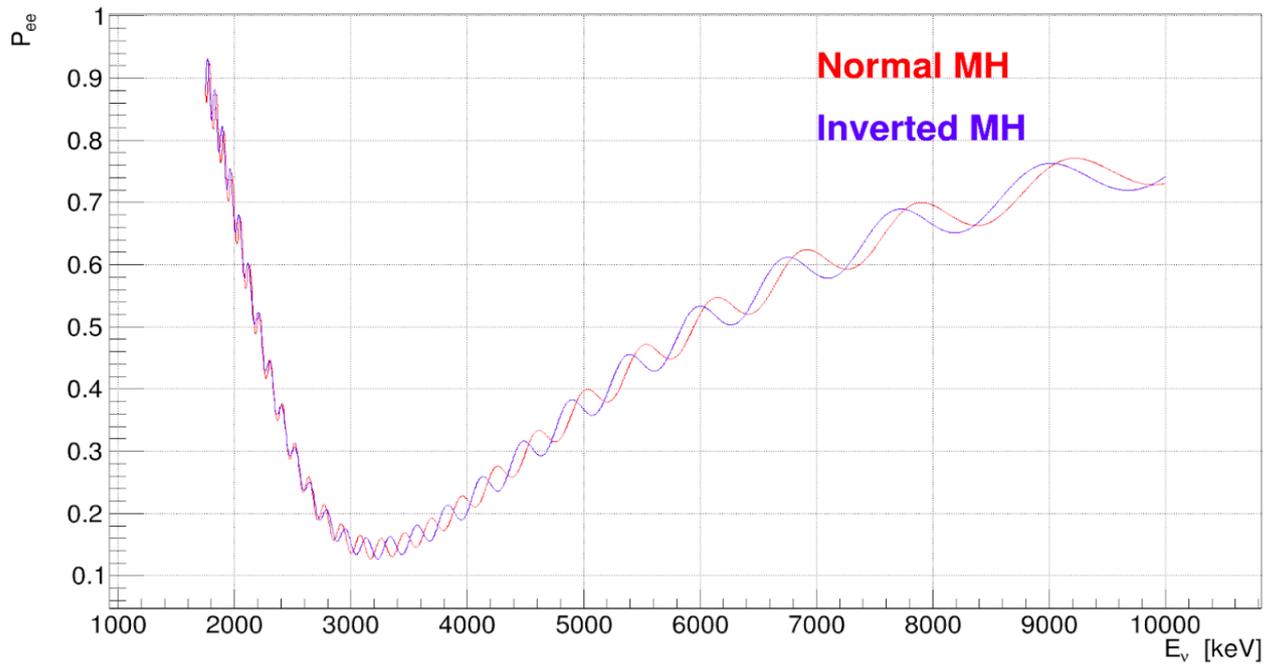


Рисунок 3 — Вероятность выживания как функция энергии нейтрино для прямой и обратной иерархий

2 Реакторные эксперименты. Эксперимент JUNO

Принцип работы ядерного реактора основан на управляемой, самоподдерживающейся цепной реакции деления тяжелых ядер (в частности, урана-235), которая сопровождается выделением энергии. При одном таком делении ядра урана образуются два осколка с избыточным числом нейтронов. Среднее число β -распадов, испытываемых обоими осколками, равно 6. На 200 МэВ (энергия, выделяемая при одном делении) рождается 6 электронных антинейтрино в диапазоне энергий от нуля до примерно 8 МэВ. В реакторе с мощностью ≈ 1 ГВт будет рождаться порядка 10^{20} электронных антинейтрино в секунду.

Впервые возможность использовать ядерные реакторы в качестве интенсивных и чистых источников для детектирования антинейтрино обсуждал Б.М. Понтекорво, а в 1956 году Ф.Райнесом и К.Коуэном в эксперименте на реакторе в Саванна-Ривер было сделано экспериментальное открытие антинейтрино. Для их регистрации была использована реакция обратного бета-распада



имеющая порог $E_\nu \approx 1.8$ МэВ и ставшая с тех пор классической.

Таким образом, история реакторных нейтринных экспериментов насчитывает уже 60 лет, в течение которых многочисленными экспериментами была развита методика детектирования антинейтрино и выполнены детальные измерения антинейтринных потоков. В 2003-2008 гг. в реакторном эксперименте KamLAND было проведено первое наблюдение исчезновения потока реакторных антинейтрино, согласующееся с гипотезой нейтринных осцилляций, получившей ранее подтверждение в экспериментах другого типа.

В реакторных экспериментах поиск осцилляций основан на регистрации исчезновения части электронных антинейтрино, образующихся от всех делящихся изотопов ядерного реактора. Исходные же спектры восстанавливаются двумя способами — методом прямого суммирования и конверсионным методом [9, 10, 11].

Метод суммирования — метод получения спектра антинейтрино от реактора на основе доступной информации о продуктах деления и отдель-

ных каналов бета-распада. Информация по каналам бета-распада получается либо из целенаправленных экспериментов, либо на основе численных вычислений, хранящихся в базах данных. Данный метод позволяет получить детализированный нейтринный спектр с маленьким шагом по энергии. Несмотря на хорошо проработанную теорию, использование метода суммирования подразумевает учёт вклада тысяч каналов бета-распада для каждого делящегося изотопа, что приводит к большим неопределенностям.

Метод конверсии состоит из трёх этапов: измерение в лаборатории бета-спектра от конкретного делящегося изотопа, описание полученного бета-спектра при помощи эмпирической модели состоящей из набора синтетических каналов бета-распада, параметры которых определяются методом подгонки, использование теоретической модели для получения спектра антинейтрино. В связи с систематическими погрешностями процедуры конверсии, данным методом можно получить спектр с более грубыми интервалами по энергии, чем измеренный бета-спектр. Этот метод, как и метод суммирования, имеет свои недостатки.

В общем случае спектры, полученные этими методами, имеют определенную микроструктуру, которую, как правило, не учитывают в практических задачах, и искусственным образом сглаживают.

На рисунке 4 представлены типичные спектры реакторных антинейтрино, рассчитанные в отделении физики нейтрино Курчатовского института, с которыми далее и проводится работа. Здесь и ниже под «Real Sp» подразумевается спектр, имеющий микроструктуру, а под «Smooth Sp» — искусственно сглаженный спектр.

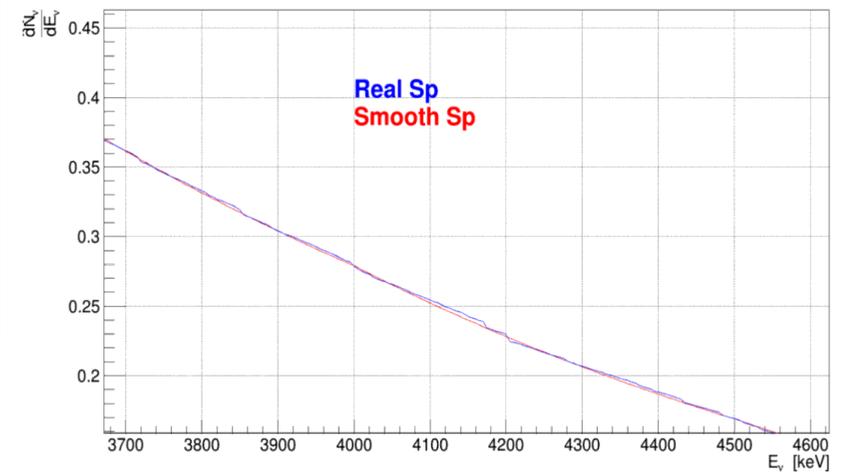
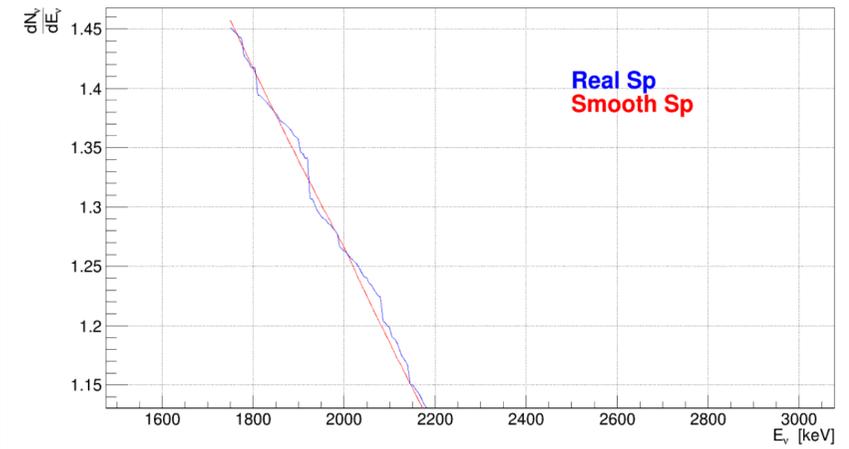
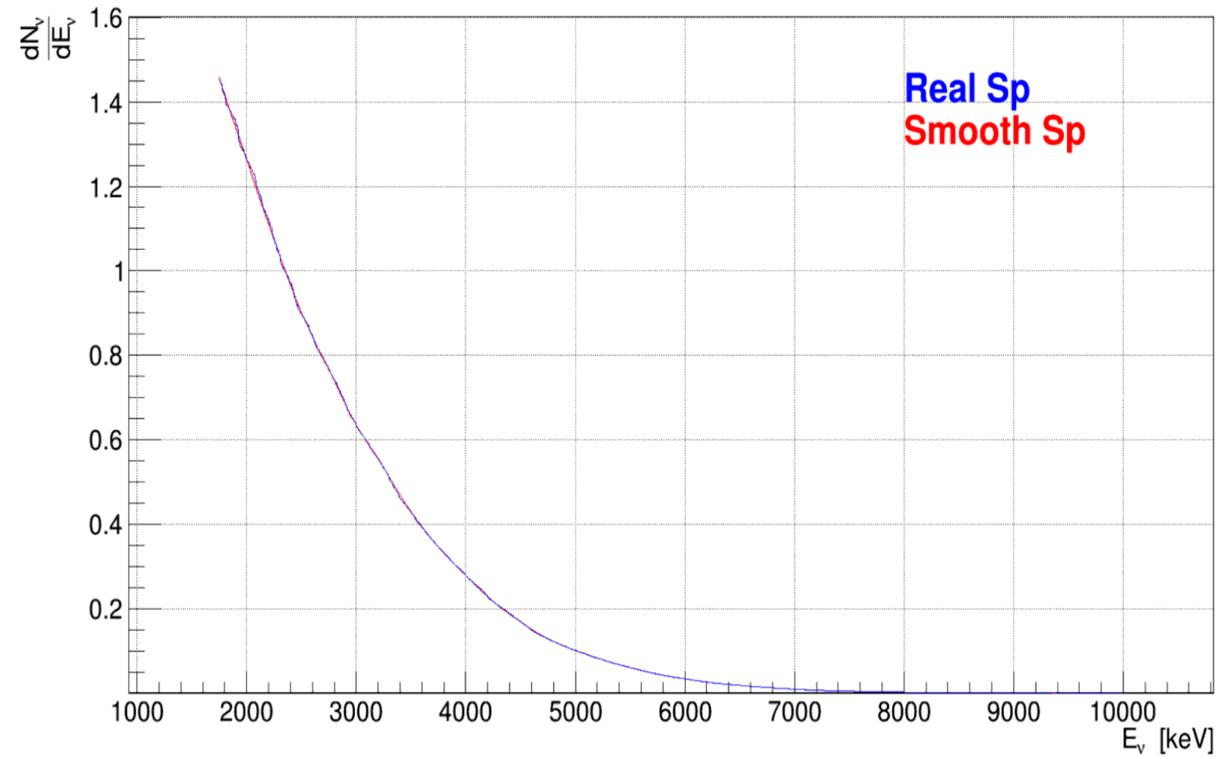


Рисунок 4 — Реакторные антинейтринные спектры

Эксперимент JUNO — планируемый реакторный эксперимент нового поколения, цель которого определить иерархию масс нейтрино и уточнить некоторые параметры матрицы смешивания PMNS.



Рисунок 5 — Эксперимент JUNO [2]

Детектор JUNO будет представлять собой 35-и метровую сферу заполненную 20 кт жидкого сцинтиллятора, свечение которого будет детектироваться 20-ю тысячами фотоэлектронных умножителей диаметром 50 см каждый (Рисунок 6). Максимальное геометрическое покрытие детектора фотоумножителями необходимо для увеличения светосбора. Это необходимо для достижения беспрецедентного энергетического разрешения детектора 3% для энергии 1 МэВ. Детектор будет расположен на расстоянии около 53 км от реакторов атомных электростанций Янцзян и Тайшань.

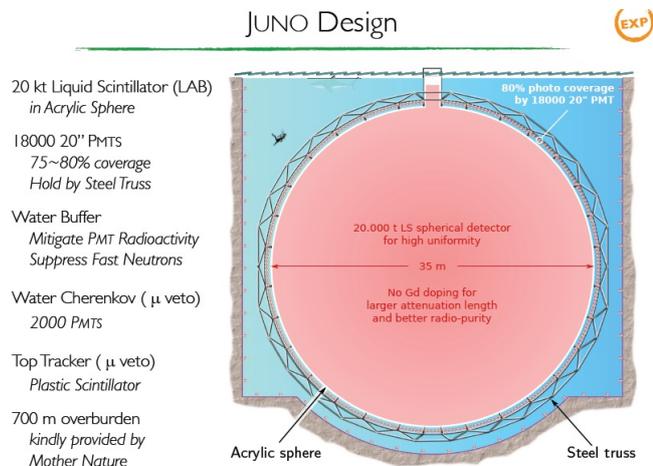


Рисунок 6 — Детектор JUNO [2]

При условии достижения энергетического разрешения в 3% искажения реакторных спектров за счет осцилляций позволят измерить Δm_{31}^2 и, в частности, определить его знак на уровне достоверности более трёх стандартных отклонений в течение 6 лет после начала набора данных в 2020 году. Определение знака Δm_{31}^2 эквивалентно определению иерархии масс нейтрино.

Значение разрешения 3% на 1 МэВ требуется из отношения $\frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2} \approx \frac{1}{30}$, дающего предел на чувствительность.

В данной работе проведен дополнительный анализ эксперимента JUNO — с использованием формулы (3), таблицы 1 и реакторных спектров (рисунк 4) проведена оценка влияния топливного состава и энергетического разрешения детектора.

3 Анализ чувствительности

3.1 Влияние осцилляций на спектр реакторных антинейтрино

Рассмотрим спектр реакторных антинейтрино и наложим на него эффект осцилляций для прямой и обратной иерархий (расстояние $L = 53$ км зафиксируем):

$$N_{\nu \text{ osc}}(E_{\nu}) = P_{ee} \left(\frac{L}{E_{\nu}} \right) N_{\nu}(E_{\nu}) \quad (5)$$

На рисунке 7 представлены исходный спектр $N_{\nu}(E_{\nu})$ и полученные по формуле (5).

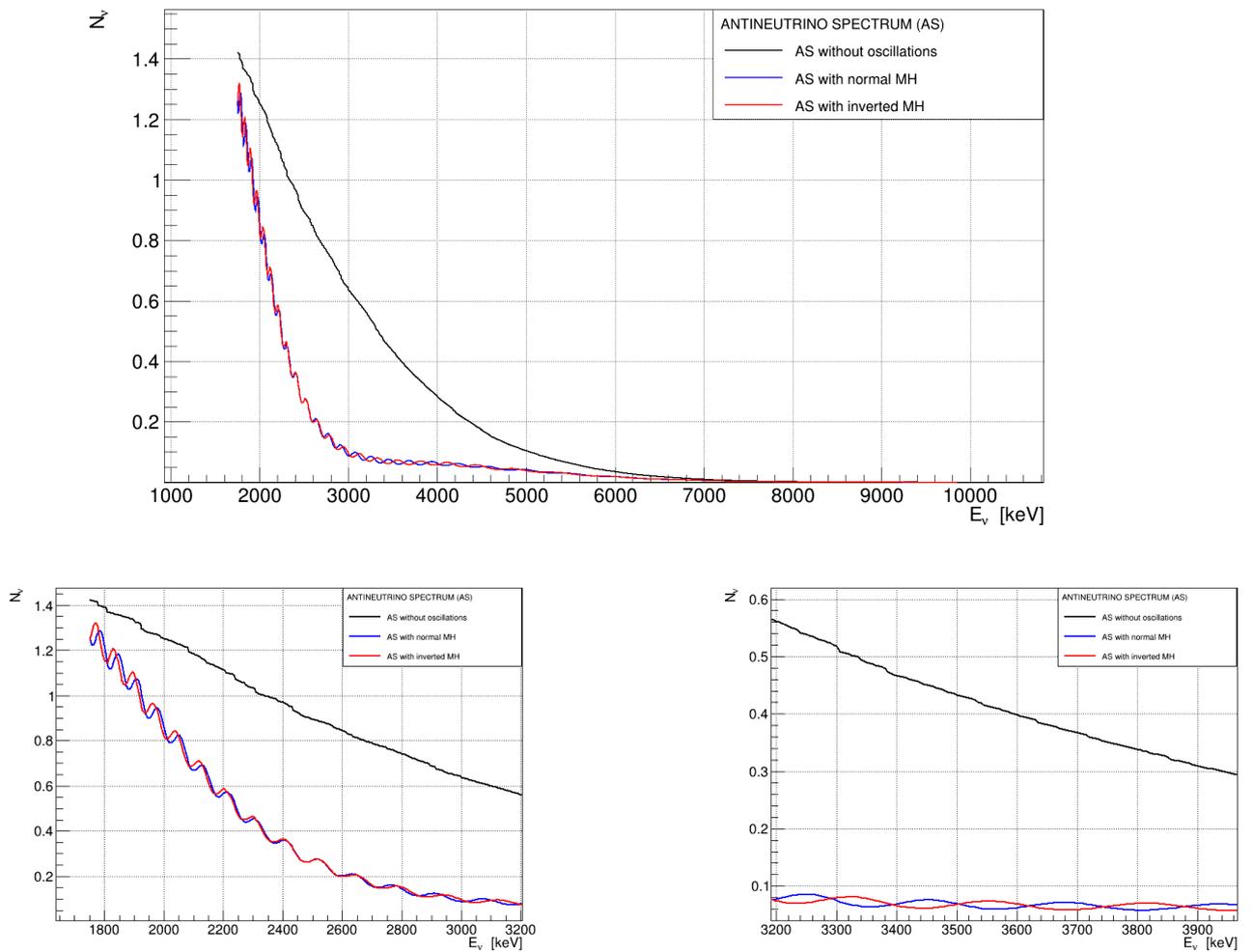


Рисунок 7 — Реакторные спектры антинейтрино с эффектом осцилляций для прямой и обратной иерархий

3.2 Влияние осцилляций на спектр обратного бета-распада

Антинейтрино регистрируется в сцинтилляционном детекторе при помощи реакции обратного бета-распада. Сечение этой реакции в нулевом приближении имеет следующий вид [12]:

$$\sigma_0(E_\nu) = \frac{2\pi^2 \ln 2}{m_e^5 f t} \sqrt{(E_\nu - \Delta)^2 - m_e^2} \cdot (E_\nu - \Delta), \quad (6)$$

где:

- $m_e = 0.511$ МэВ — масса электрона;
- $f = 1.7146$ — безразмерный фактор фазового пространства;
- $t = 611\text{с} = 9.2 \cdot 10^{20}$ кэВ — период полураспада нейтрона;
- $\Delta = m_n - m_p \approx 1.3$ МэВ — разность масс нейтрона и протона.

После рождения позитрона он некоторое время тормозится в рабочем веществе, претерпевая ионизационные потери, затем аннигилирует с электроном и рождает пару гамма-квантов, которые возбуждают центры свечения сцинтиллятора. Рожденные фотоны регистрируются в ФЭУ.

В общем случае спектр позитронов получается из спектра антинейтрино следующим образом [12]:

$$N_{e^+}(E_e^+) = \int N_\nu(E_\nu) \frac{d\sigma_0(E_\nu, E_e^+)}{dE_{e^+}} dE_\nu. \quad (7)$$

Это выражение можно упростить, используя тот факт, что при фиксированной энергии позитрона E_{e^+} интегрирование ведется фактически не по всему спектральному диапазону, а по узкому интервалу $\Delta E_\nu \approx 2p_{e^+}E_{e^+}/m_p$. В первом порядке по $1/m_p$ получаем [12]:

$$N_{e^+}(E_\nu) = N_\nu \left(E_\nu + \frac{2E_\nu(E_\nu - \Delta) + \Delta^2 - m_e^2}{2m_p} \right) \sigma_0(E_\nu). \quad (8)$$

Рассмотрим спектры от двух реакторов, находящихся от детектора на расстоянии 53 км. В данной ситуации потоки антинейтрино, регистрируемые детектором, совпадают с их спектром с точностью до нормировки. Результирующий спектр позитронов можно рассчитать по формуле (8) :

$$N_{e^+}(E_\nu) = \left[\frac{N_1}{N_1 + N_2} N_{\nu \text{ osc}}^{1\text{-st}}(E^*) + \frac{N_2}{N_1 + N_2} N_{\nu \text{ osc}}^{2\text{-nd}}(E^*) \right] \sigma_0(E_\nu), \quad (9)$$

где $E^* = E_\nu + \frac{2E_\nu(E_\nu - \Delta) + \Delta^2 - m_e^2}{2m_p}$.

На рисунке 8 представлены полученные спектры позитронов (так как $\frac{N_i}{N_1 + N_2} \approx \frac{1}{2}$, выражение (9) сводится к обычному усреднению).

На этом этапе вводится в рассмотрение топливный состав реактора. Для примера на рисунке 8 изображена ситуация, в которой первый реактор проработал около 1 дня, то есть в нем преобладает ^{235}U , а второй реактор проработал около 165 дней — часть ^{235}U распалась, но образовался ^{239}Pu [11]. Каждый изотоп вносит вклад в результирующий нейтринный спектр со своим определенным весом, что необходимо учитывать, например, при генерации псевдоэкспериментальных данных (набирать статистику в эксперименте JUNO планируется около 6 лет). Более интересной, однако, является обратная задача — определение топливного состава реактора по имеющимся спектрам ОБР.

В данной же работе до пункта 4.1. мы рассматриваем именно спектры, изображенные на рисунке 8.

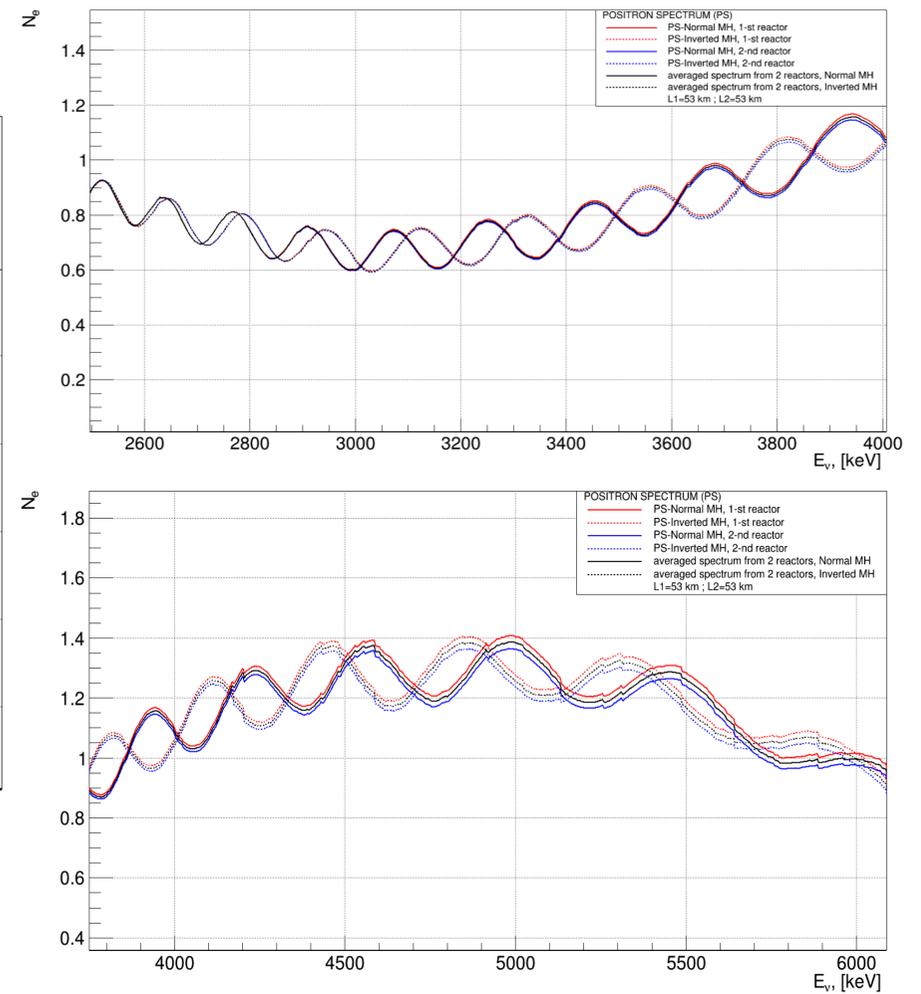
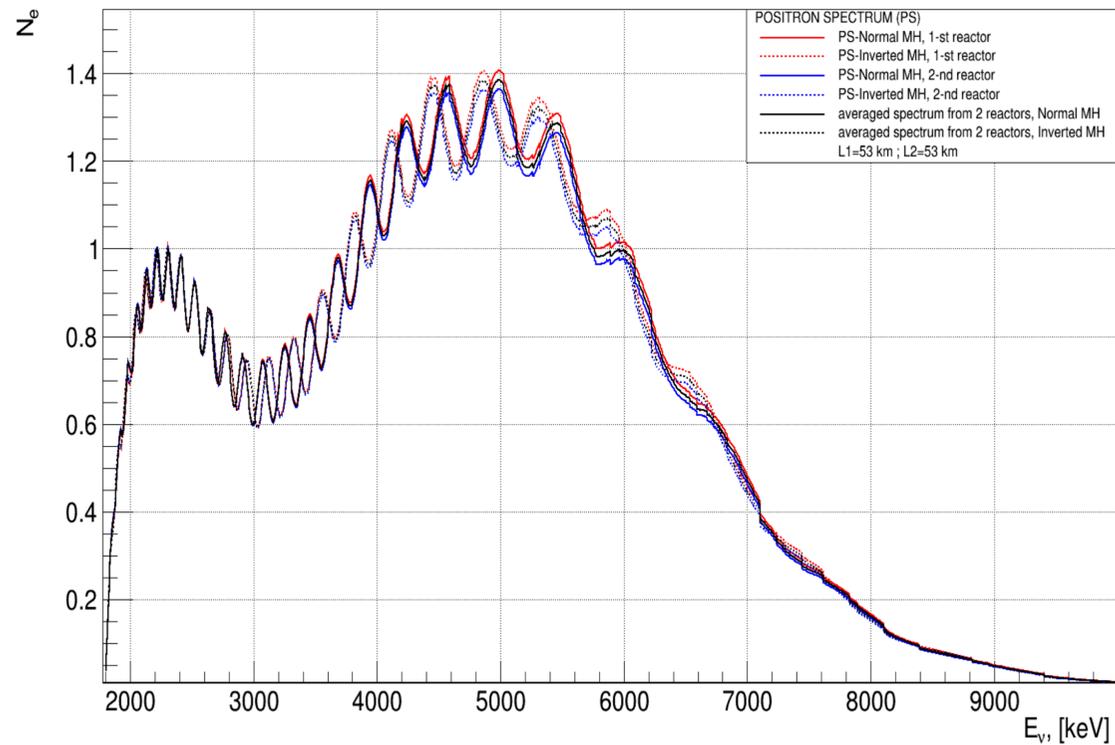


Рисунок 8 — Спектры позитронов для двух реакторов с эффектом осцилляций для прямой и обратной иерархий

3.3 Влияние функции отклика детектора

Значительное влияние на конечный спектр оказывает функция отклика детектора. Её точный аналитический вид неизвестен, поэтому будем использовать нормальное распределение Гаусса [2] как некоторое приближение, учитывая энергетическое разрешение детектора JUNO 3% для 1 МэВ в среднеквадратичном отклонении:

$$\rho(E_\nu, E'_\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(E'_\nu)} \cdot \exp\left(-\frac{(E_\nu - E'_\nu)^2}{2\sigma^2(E'_\nu)}\right), \quad (10)$$

где $\sigma(E'_\nu) = 3/100\sqrt{E'_\nu}$.

Итоговый позитронный спектр получается из следующего соотношения:

$$\text{Sp}_{e^+}(E_\nu) = \int_{E_{min}}^{E_{max}} N_{e^+}(E'_\nu)\rho(E_\nu, E'_\nu) dE'_\nu. \quad (11)$$

В качестве иллюстрации влияния энергетического разрешения приведем рисунки 9, 10 и 11 — на них изображены позитронные спектры, размытые разрешениями 3% для 1 МэВ, 5% для 1 МэВ и 7% для 1 МэВ соответственно.

Из рисунков видно, что при ухудшении энергетического разрешения эффект осцилляций пропадает (при 7% его уже практически нет).

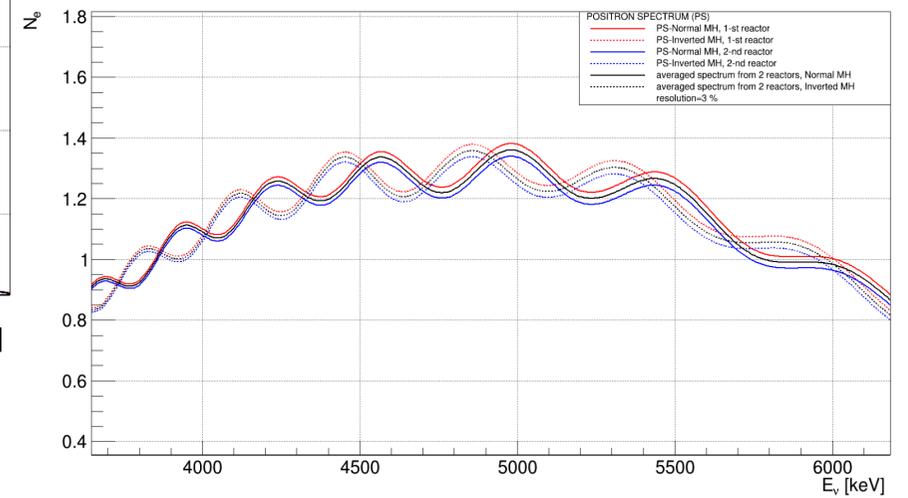
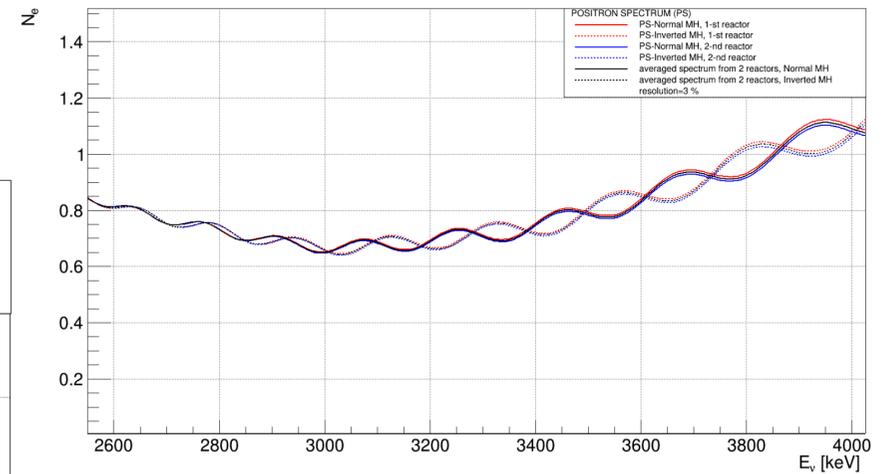
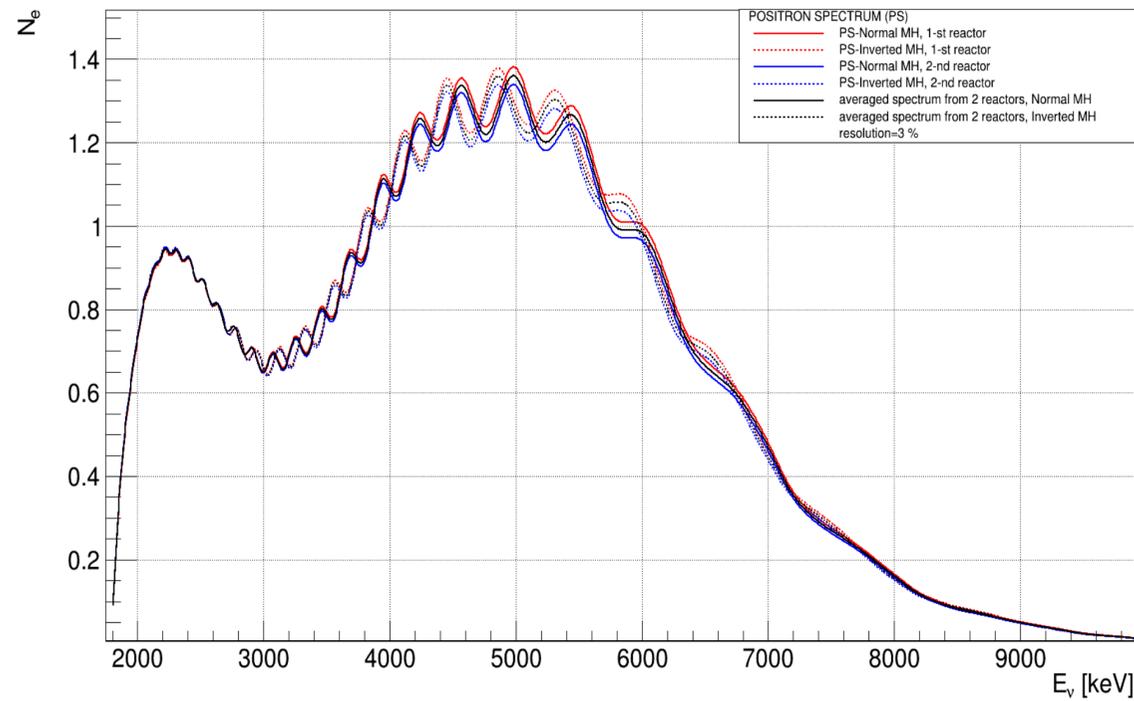


Рисунок 9 — Спектры позитронов с разрешением 3 % для 1 МэВ

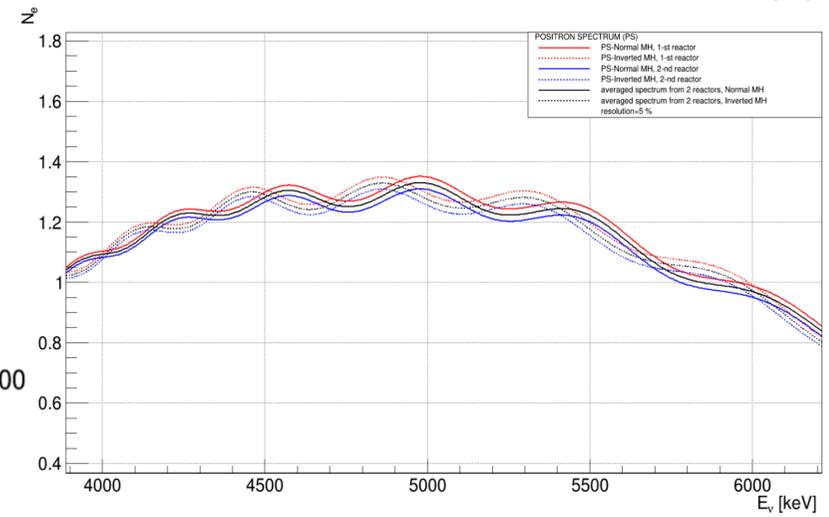
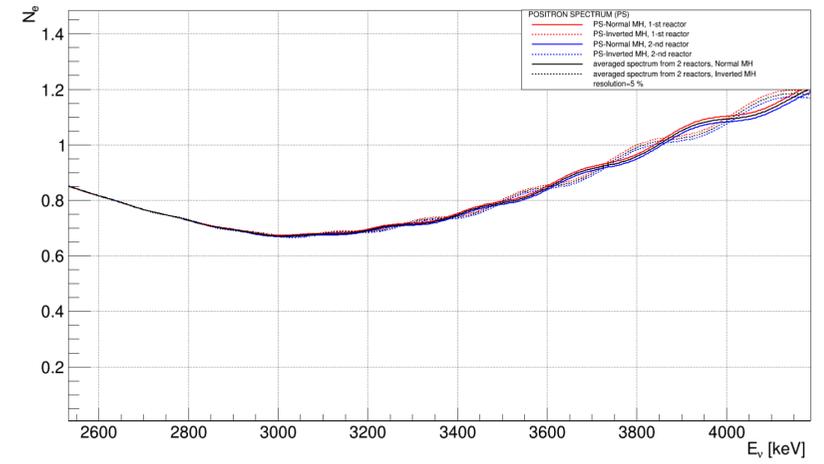
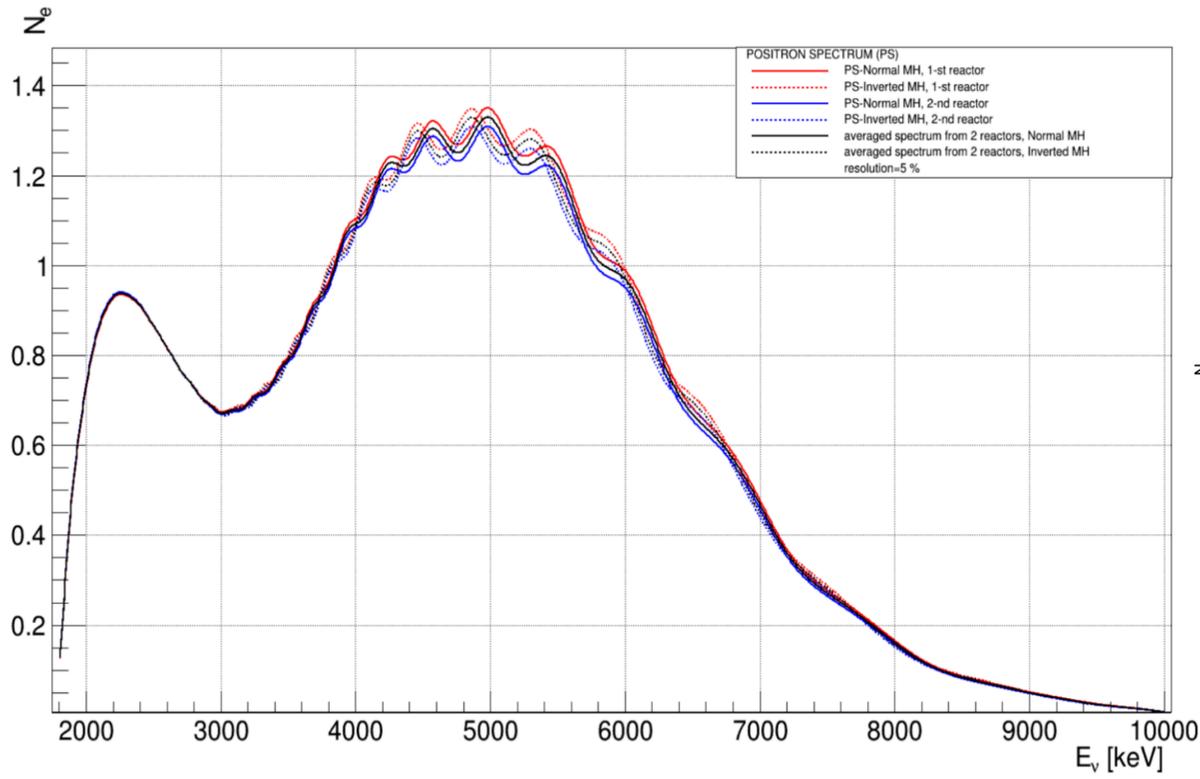


Рисунок 10 — Спектры позитронов с разрешением 5 % для 1 МэВ

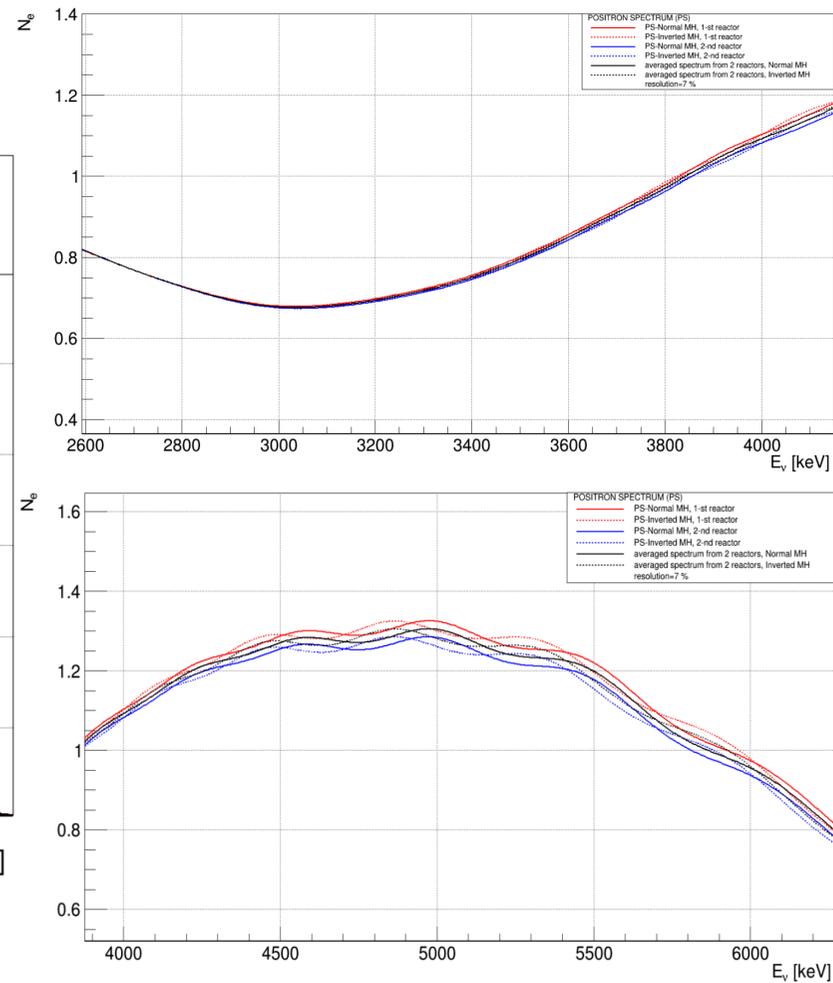
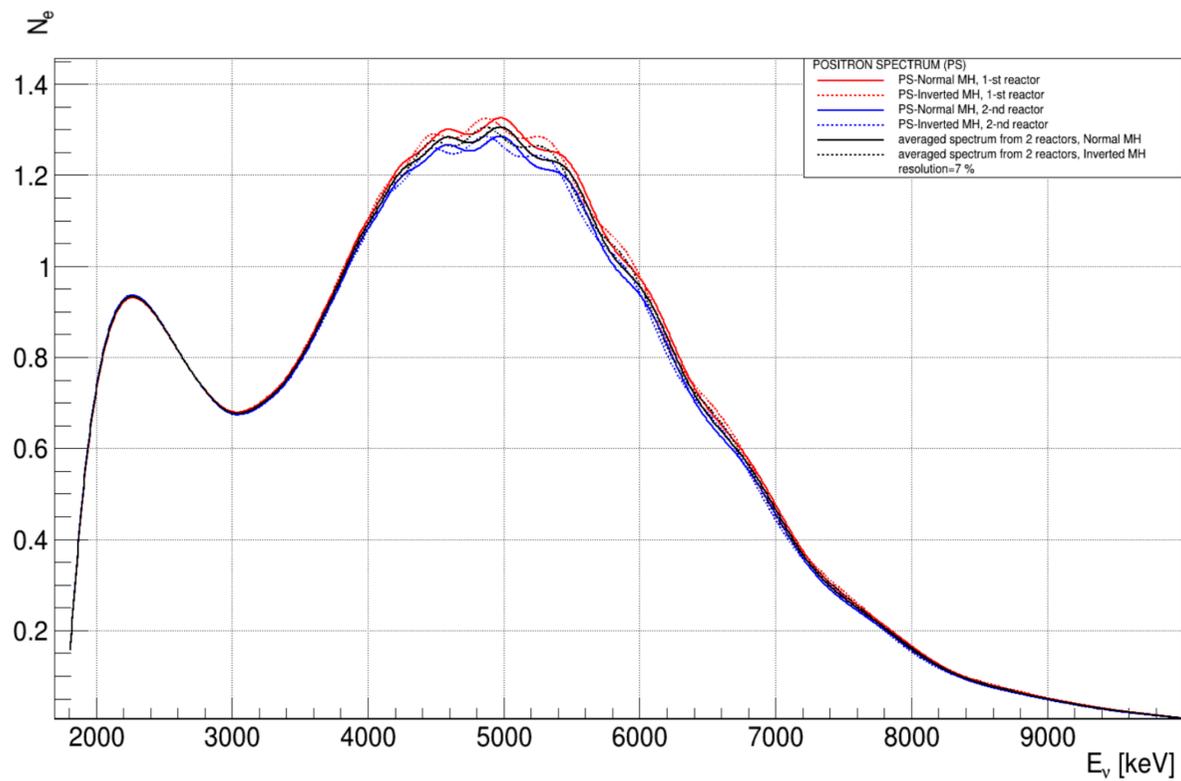


Рисунок 11 —Спектры позитронов с разрешением 7 % для 1 МэВ

3.4 Спектральный анализ: преобразование Фурье

В связи с тем, что эффект осцилляций является периодическим процессом, для определения иерархии из полученных позитронных спектров в работах [3, 13] предлагается использовать фурье-преобразование.

Возвращаясь к формуле (3) для вероятности выживания, введем следующие обозначения: $t = \frac{L}{E}$ и $\omega = 2.534\Delta m^2$. Разность квадратов масс массовых состояний будем считать переменной величиной.

Используем фурье-косинус и фурье-синус преобразования:

$$\text{FCT}(\omega) = \int_{t_{min}}^{t_{max}} \text{Sp}_{e^+}(t) \cos(\omega t) dt, \quad (12)$$

$$\text{FST}(\omega) = \int_{t_{min}}^{t_{max}} \text{Sp}_{e^+}(t) \sin(\omega t) dt, \quad (13)$$

На рисунке 12 представлены соответствующие фурье-синус и фурье-косинус образы итогового позитронного спектра (рисунок 9) от двух реакторов с разрешением 3%.

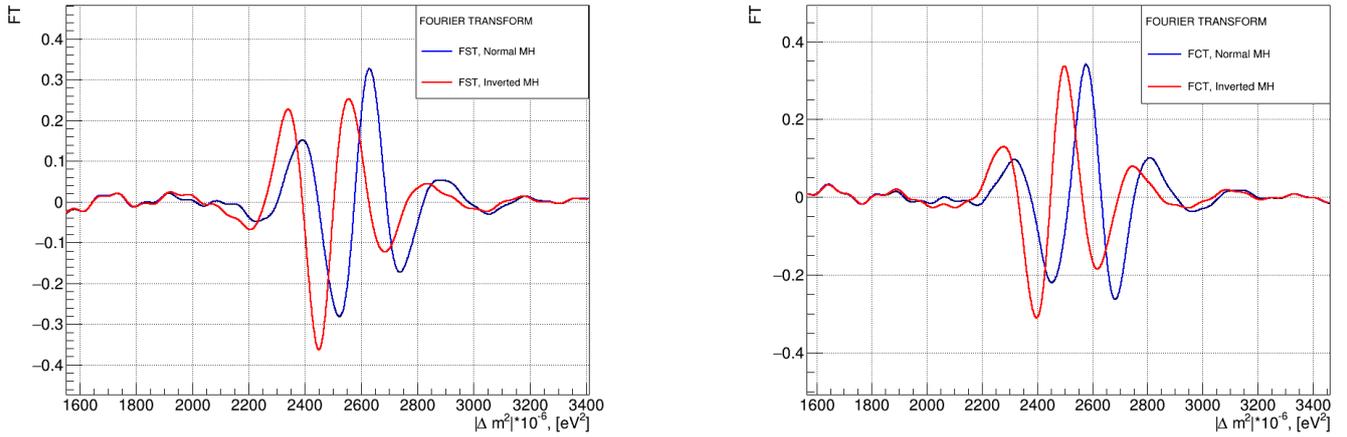


Рисунок 12 — Фурье-образы конечного позитронного спектра

Для определения иерархии используется следующий подход [3]. Вводятся параметры RV, LV, P, V, RL и PV , где: RV — амплитуда правой ямы FCT, LV — амплитуда левой ямы FCT, P — амплитуда пика FST, V — амплитуда ямы FST.

$$RL = \frac{RV - LV}{RV + LV}, \quad PV = \frac{P - V}{P + V}. \quad (14)$$

Знаки RL и PV определяют иерархию:

$RL > 0$ и $PV > 0 \Rightarrow$ Нормальная иерархия,

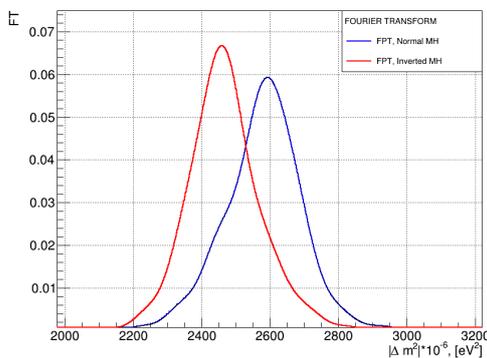
$RL < 0$ и $PV < 0 \Rightarrow$ Обратная иерархия.

Данное выше утверждение будем для простоты называть критерием Фурье.

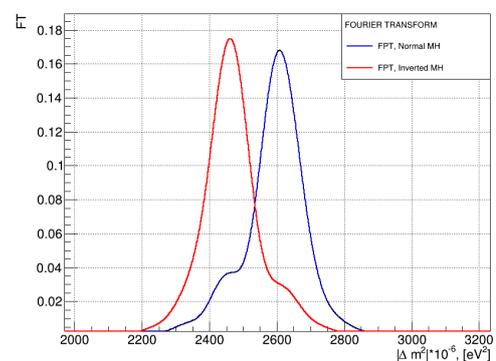
Для определения значения Δm_{31}^2 можно использовать спектральную плотность мощности Фурье-преобразования (FPT). Она представляет из себя среднее между суммой квадратов модулей FST и FCT:

$$FPT(\omega) = \frac{|FST(\omega)|^2 + |FCT(\omega)|^2}{2} \quad (15)$$

На рисунке 13 приведены спектральные плотности мощности для тех же спектров (рисунок 9) и для исходного спектра ОБР без свертки с функцией отклика:



(а) FPT-образы спектра ОБР с разрешением 3%



(б) FPT-образы "чистого" спектра ОБР

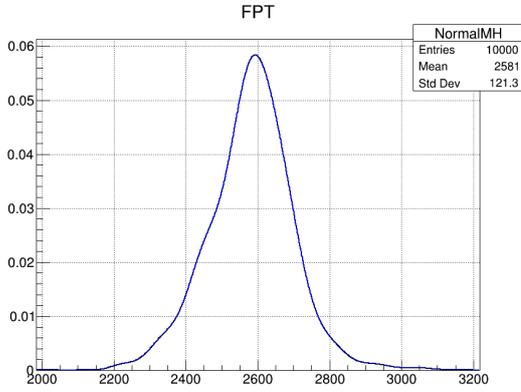
Рисунок 13 — Спектральные плотности мощности

Здесь определить иерархию можно, к примеру, посчитав коэффициент асимметрии γ спектра (как видно из рисунка 13 (б), для нормальной иерархии он отрицателен, для обратной положителен).

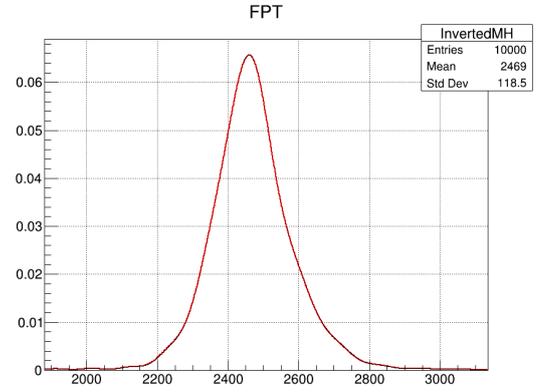
$$\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \quad (16)$$

где μ_3 — 3-ий центральный момент, σ — стандартное отклонение.

У метода FPT есть определенные недостатки, самый естественный из которых — потеря части информации вследствие возведения образов в квадрат. Несмотря на это, метод дает относительно неплохие численные результаты:



(а) FPT для прямой иерархии



(б) FPT для обратной иерархии

Рисунок 14 — Гистограммы спектральных плотностей мощностей

Из гистограмм на рисунке 14:

$$\begin{aligned} \Delta m_{31}^2 &= (2.58 \pm 0.12) \cdot 10^{-3} [\text{эВ}^2], & \Delta m_{31T}^2 &= 2.59 \cdot 10^{-3} [\text{эВ}^2], \\ \Delta m_{31}^2 &= (-2.47 \pm 0.12) \cdot 10^{-3} [\text{эВ}^2], & \Delta m_{31T}^2 &= -2.49 \cdot 10^{-3} [\text{эВ}^2], \end{aligned} \quad (17)$$

где Δm_{31T}^2 — значение, которое закладывалось при наложении эффекта осцилляций на спектры, согласно таблице 1.

4 Математическая модель

В параграфе 3 были изложены основные идеи, которые в дальнейшем реализуются с использованием численных методов, в том числе метода Монте-Карло. Для построения модели необходимо решить следующие задачи:

1. Получить явный вид реакторного спектра антинейтрино $\text{Sp}(E, t)$ в любой момент времени $t \in [0; 330]$.
2. Получить явный вид функции спектра позитронов (рисунок 8).
3. Используя метод Монте-Карло, получить гистограммы спектра позитронов для их дальнейшего рассмотрения.

4.1 Модель реакторного спектра

Необходимо найти функцию двух переменных $\text{Sp}(E_i, t_k)$, определенную на прямоугольнике $\{E_i \in [E_{min}, E_{max}], t_k \in [1; 330]\}$, используя условия $\text{Sp}(E_i, 1) = b(E_i)$, $\text{Sp}(E_i, 165) = m(E_i)$, $\text{Sp}(E_i, 330) = e(E_i)$.

Из физических соображений будем считать, что функция $\text{Sp}(E_i, t_k)$ непрерывна по своим аргументам. При фиксированной энергии для функции $\text{Sp}(E_i^*, t_k)$ (которая зависит уже только от времени) можно составить интерполяционный полином, имеющий вид параболы $A_i t_k^2 + B_i t_k + C_i$, где коэффициенты A_i , B_i и C_i различны для различных значений E_i .

Зная три временных условия $b(E_i)$, $m(E_i)$ и $e(E_i)$, коэффициенты интерполяционной параболы можно восстановить единственным образом. Тогда функцию $\widetilde{\text{Sp}}(E, t)$ можно представить в виде:

$$\widetilde{\text{Sp}}_b(E_i, t) = \frac{A_i t^2 + B_i t + C_i}{A_i + B_i + C_i} \cdot b(E_i), \quad (18)$$

которая при $t = 1$ будет удовлетворять условию $\widetilde{\text{Sp}}_b(E_i, 1) = b(E_i)$.

Аналогичным образом можно записать:

$$\widetilde{\text{Sp}}_m(E_i, t) = \frac{A_i t^2 + B_i t + C_i}{A_i 165^2 + B_i 165 + C_i} \cdot m(E_i). \quad (19)$$

$$\widetilde{\text{Sp}}_e(E_i, t) = \frac{A_i t^2 + B_i t + C_i}{A_i 330^2 + B_i 330 + C_i} \cdot e(E_i). \quad (20)$$

Окончательный вид функции можно задать следующим образом:

$$\widetilde{\text{Sp}}(E_i, t_k) = \begin{cases} \widetilde{\text{Sp}}_b(E_i, t_k), & t_k \in [1; 42] \\ \frac{1}{2} \left(\widetilde{\text{Sp}}_b(E_i, t_k) + \widetilde{\text{Sp}}_m(E_i, t_k) \right), & t_k \in [43; 124] \\ \widetilde{\text{Sp}}_m(E_i, t_k), & t_k \in [125; 207] \\ \frac{1}{2} \left(\widetilde{\text{Sp}}_m(E_i, t_k) + \widetilde{\text{Sp}}_e(E_i, t_k) \right), & t_k \in [208; 289] \\ \widetilde{\text{Sp}}_e(E_i, t_k), & t_k \in [290; 330] \end{cases} \quad (21)$$

Полученная функция $\widetilde{\text{Sp}}(E_i, t_k)$ может отличаться искомой $\text{Sp}(E_i, t_k)$ только нормировкой. Рассмотрим

$$N(1) = \int_{E_{min}}^{E_{max}} b(E) dE, \quad N(165) = \int_{E_{min}}^{E_{max}} m(E) dE, \quad N(330) = \int_{E_{min}}^{E_{max}} e(E) dE,$$

где $N(t)$ — число событий за день t ("правильная" нормировка). Для этой функции тоже можно построить интерполяционный полином $A_N t^2 + B_N t + C_N$, также имеющий вид параболы. Коэффициенты A_N , B_N и C_N определяются единственным образом по точкам $\{1; N(1)\}$, $\{165; N(165)\}$, $\{330; N(330)\}$.

В конечном итоге, искомую функцию $\text{Sp}(E_i, t)$ можно представить в виде:

$$\text{Sp}(E_i, t_k) = \widetilde{\text{Sp}}(E_i, t_k) \cdot \frac{A_N t_k^2 + B_N t_k + C_N}{\int_{E_{min}}^{E_{max}} \widetilde{\text{Sp}}(\varepsilon, t_k) d\varepsilon}, \quad (22)$$

где второй множитель отвечает за правильную нормировку.

Оценим погрешность интерполяции следующим образом. Рассмотрим функцию $\delta(E_i) = \frac{|\text{Sp}(E_i, 330) - e(E_i)|}{e(E_i)} \cdot 100\%$ (аналогично можно вместо $e(E_i)$ рассмотреть $m(E_i)$ или $b(E_i)$, результаты будут в среднем те же самые), график которой изображен на рисунке 15.

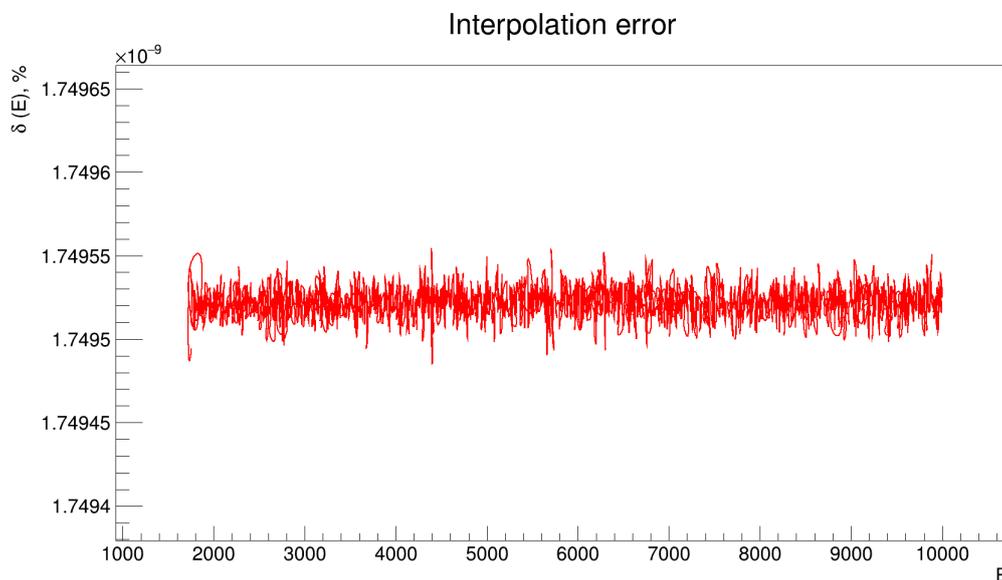


Рисунок 15 — Ошибка интерполяции реакторного спектра

Совершенно очевидно, что погрешностью $\delta \approx 10^{-9}\%$ можно пренебречь.

4.2 Модель позитронного спектра

Следующим шагом является получение явной функции спектра позитронов $\text{Sp}_{e^+}(E_i)$. Согласно формуле (8),

$$\widetilde{\text{Sp}}_{e^+}(E_i) = \text{Sp} \left(E_i + \frac{2E_i(E_i - \Delta) + \Delta^2 - m_e^2}{2m_p}, t_k \right) \cdot \sigma_0(E_i), \quad (23)$$

где под $\text{Sp}(E_i, t_k)$ здесь и в дальнейшем будем понимать спектр реакторных антинейтрино, свернутый с вероятностью выживания. Время t_k будем считать параметром.

Проблема выражения (23) заключается в том, что оно неявное и работать с ним достаточно сложно. Вместо этого разобьем отрезок $[E_{\min}, E_{\max}]$ на n достаточно малых отрезков $[E_{p-1}, E_p]$ и на каждом из них проинтерполируем часть функции $\text{Sp}_{e^+}(E_i)$:

$$\text{Sp}_{e^+}(E_i) = \begin{cases} P_3^{(1)}(E_i), & E_i \in [E_{\min}; E_1] \\ P_3^{(2)}(E_i), & E_i \in [E_1; E_2] \\ \dots & \dots \\ P_3^{(p)}(E_i), & E_i \in [E_{p-1}; E_p] \\ \dots & \dots \\ P_3^{(n)}(E_i), & E_i \in [E_{n-1}; E_{\max}] \end{cases}, \quad (24)$$

где $P_3(E_i)$ — полином третьей степени. Иными словами, исходная функция заменяется сплайном. Всюду в дальнейшем под спектром позитронов Sp_{e^+} будем понимать именно выражение (24), а под $\widetilde{\text{Sp}}_{e^+}$ — неявное выражение (23).

Совершенно аналогично, как в случае с реакторными спектрами, рассмотрим функцию ошибок $\delta(E_i) = \frac{|\text{Sp}_{e^+}(E_i) - \widetilde{\text{Sp}}_{e^+}(E_i)|}{\widetilde{\text{Sp}}_{e^+}(E_i)} \cdot 100\%$, график которой представлен на рисунке 16.

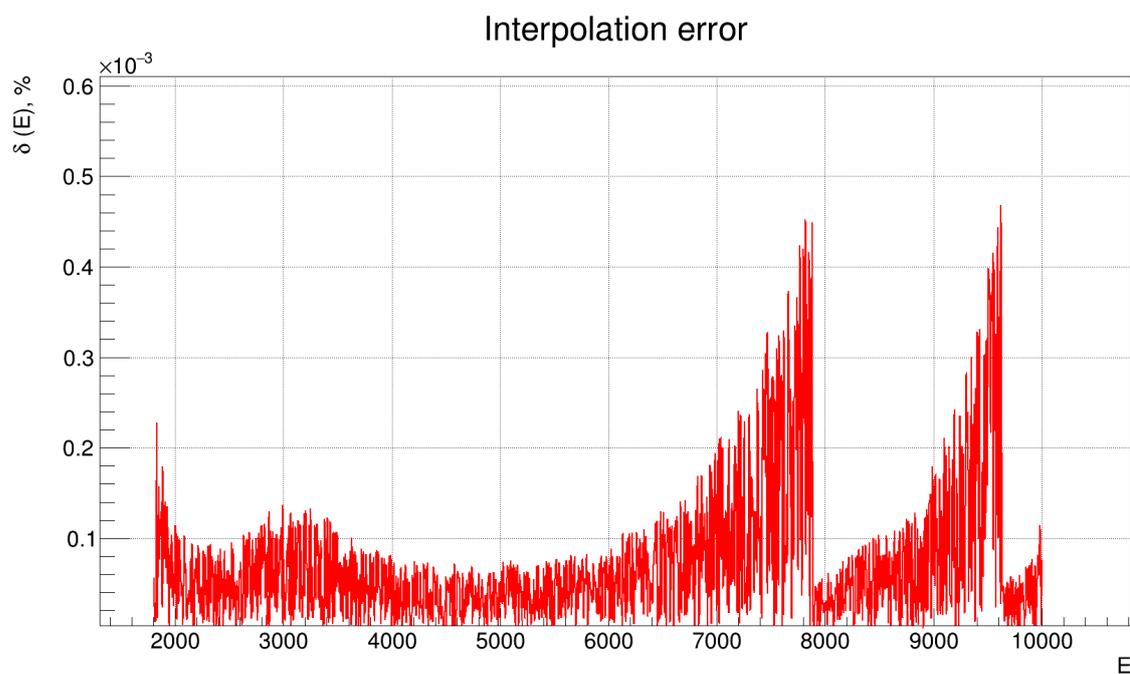


Рисунок 16 — Ошибка интерполяции спектра позитронов

Максимальное значение этой функции не превышает $5 \cdot 10^{-4}\%$. Данной погрешностью, как и погрешностью интерполяции реакторных спектров, по сравнению с энергетическим разрешением детектора $\delta E \approx 3\%$ будем пренебрегать.

4.3 Метод Монте-Карло

Зная явный вид спектра реакторных антинейтрино $\text{Sp}(E_i, t_k)$, спектра позитронов $\text{Sp}_{e^+}(E_i)$ и сечения обратного бета-распада, при помощи метода Монте-Карло можно смоделировать реакцию $\tilde{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$ в рабочем веществе детектора.

Для этого реализуем следующий алгоритм:

1. Генерируем два случайных, распределенных по равномерному закону числа t_1 и t_2 из отрезка $[1; 330]$, которые имеют смысл дней работы первого и второго реакторов на начало эксперимента.
2. Задаем Δm_{31}^2 и δE — разности квадратов масс массовых состояний и энергетического разрешения соответственно.
3. По $t_1, t_2, \Delta m_{31}^2$ и δE строим $\text{Sp}(E_i, t_1)$ и $\text{Sp}(E_i, t_2)$ (реакторные спектры антинейтрино, свернутые с вероятностью выживания $P_{ee}(\Delta m_{31}^2, E_i, L)$). По этим функциям, используя выражение (23), воссоздаем спектр позитронов $\widetilde{\text{Sp}}_{e^+}(E_i)$, который по формуле (24) заменяем сплайном $\text{Sp}_{e^+}(E_i)$, после чего сворачиваем его с функцией отклика детектора (10).
4. (а) Генерируем на единичном квадрате точку с координатами $\{e_1, e_2\}$, координаты $e_1, e_2 \in [0; 1]$ которой будут случайными величинами.
(б) Линейным преобразованием

$$\begin{cases} f_1 = E_{\min} + e_1 \cdot (E_{\max} - E_{\min}) \\ f_2 = \max[\text{Sp}_{e^+}(E_i)] \cdot e_2 \end{cases}$$

переведем $\{e_1, e_2\}$ в точку $\{f_1, f_2\}$, которая лежит на прямоугольнике $\{E_{\min} \leq f_1 \leq E_{\max} ; 0 \leq f_2 \leq \max[\text{Sp}_{e^+}(E_i)]\}$

- (с) Нанесем на этот прямоугольник функцию $\text{Sp}_{e^+}(E_i)$, которая будет полностью в него вложена.
- (д) Если точка $\{f_1, f_2\}$ лежит под графиком $\text{Sp}_{e^+}(E_i)$, то есть выполнено условие $f_2 < \text{Sp}_{e^+}(f_1)$, считаем, что реакция ОБР прошла и

учитываем соответствующие событие в гистограмме. Если же это условие не выполняется, будем считать, что нейтрино не провзаимодействовало с протоном. Рассеяние нейтрино и возможность взаимодействия с другим протоном в данной модели не учитываем.

(е) Повторяем пункты (а) —(е) для каждого реакторного антинейтрино, количество которых мы знаем из реакторных спектров (с учетом, разумеется, того, что реакция ОБР имеет порог и нейтрино с энергиями < 1.8 МэВ в рассмотрении не участвуют).

5. К значениям t_1 и t_2 прибавляем по 1, возвращаемся к 4 пункту и проделываем операцию ещё раз. При этом, если $t_1 = 331$ или $t_2 = 331$, ”перезапускаем” реактор с новым топливом, то есть присваиваем значения $t_1 = 1$ или $t_2 = 1$ соответственно.

Таким образом будут получены псевдоэкспериментальные данные эксперимента JUNO за 6 лет работы. На рисунках 18 — 19 представлена иллюстрация вышеизложенного алгоритма, а на рисунке 17 — конечный результат — спектр ОБР, полученный вышеизложенным методом.

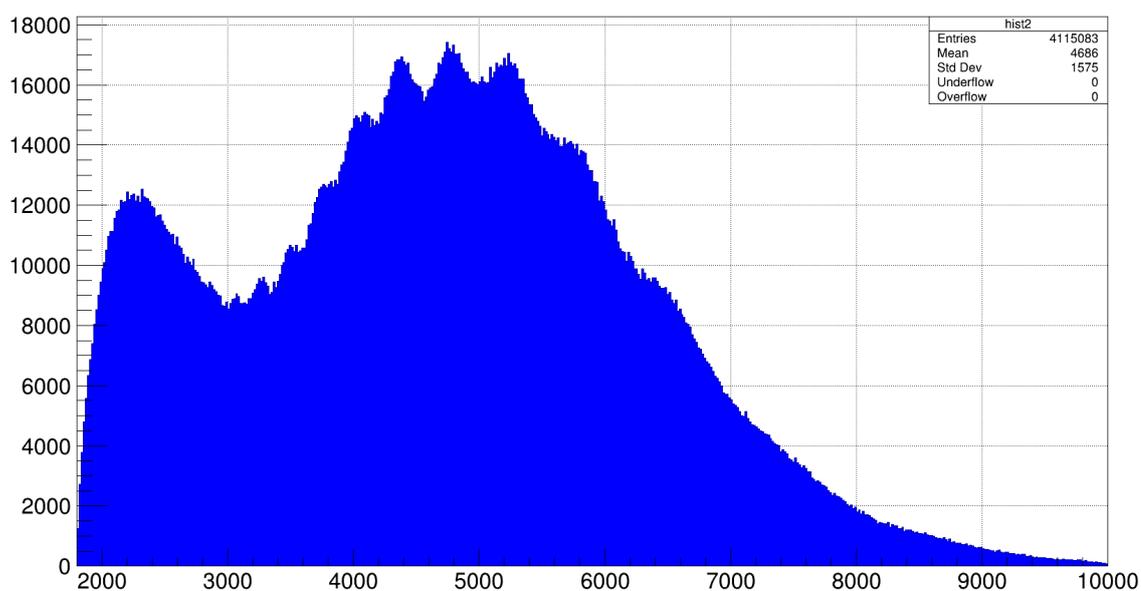


Рисунок 17 — Спектр ОБР, полученный методом Монте-Карло

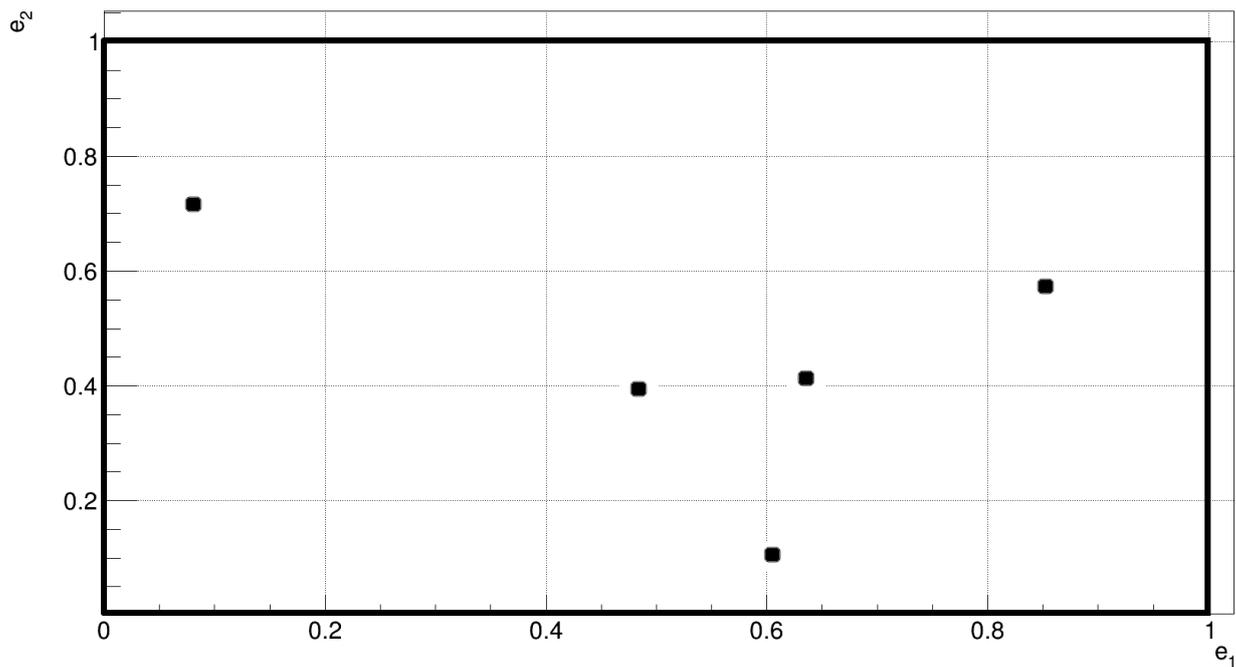


Рисунок 18 — Случайно сгенерированные точки на единичном квадрате

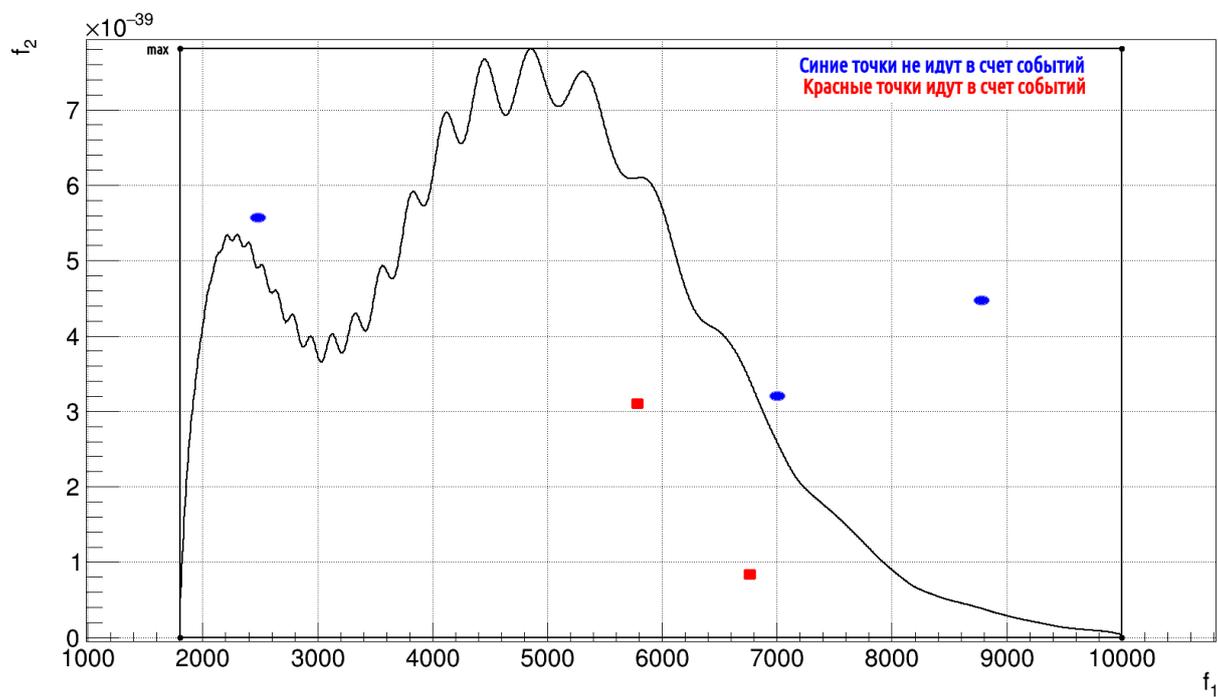


Рисунок 19 — Отбор событий

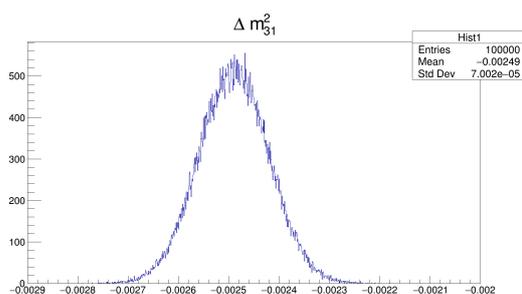
Используя критерий Фурье для гистограммы 17, получим следующие значения:

$$RL = -0.207526, \quad PV = -0.102034.$$

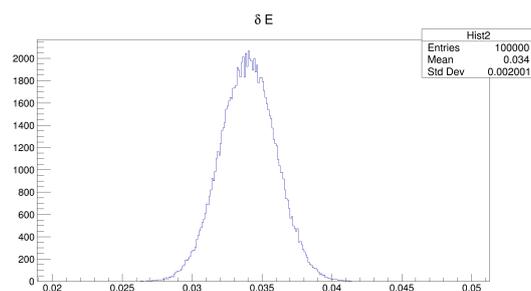
Так как оба значения меньше нуля, делаем вывод об обратной иерархии, что совпадает с тем, что было заложено при генерации.

Возникают естественные вопросы — с какой вероятностью можно утверждать о том, что гипотеза подтвердилась? Возможен ли такой подбор параметров, при котором критерий Фурье даст неверный результат?

Для решения воспользуемся вышеизложенным алгоритмом Монте-Карло следующим образом. Сгенерируем порядка 5000 вариантов эксперимента JUNO, варьируя независимо друг от друга разность квадратов масс массовых состояний Δm_{31}^2 и энергетическое разрешение δE , используя их распределения, представленные на рисунке 20.



(а) Распределение разности квадратов масс массовых состояний

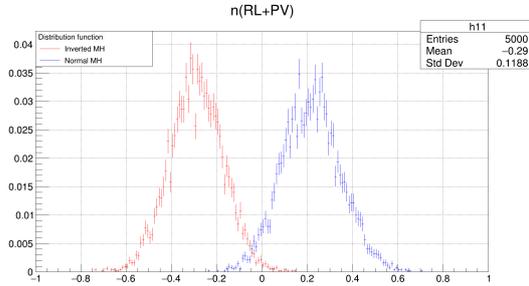


(б) Распределение энергетического разрешения

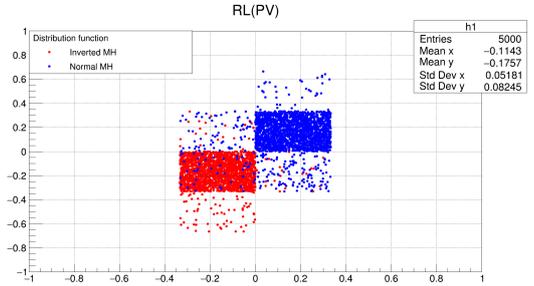
Рисунок 20 — Распределения внешних параметров

Оба распределения были выбраны нормальными, причем стандартное отклонение для распределения разности квадратов масс было выбрано равным её погрешности, согласно таблице 1 (здесь для иллюстрации приведен случай обратной иерархии, с нормальной все аналогично). Энергетическое разрешение же было построено таким образом, чтобы заведомо ухудшить результаты (“идеальное” 3%, как видно, является наименее вероятным значением). Более подробное влияние энергетического разрешения будет рассмотрено ниже.

Для каждого из 5000 экспериментов будем получать значения RL и PV и построим их функции распределения, которые не будут зависеть ни от абсолютного значения Δm_{31}^2 , ни от энергетического разрешения δE , как минимум в тех диапазонах, что представлены на рисунке 20.



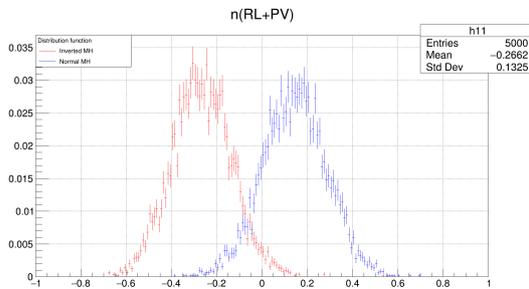
(а) Распределение вероятности от суммы $RL + PV$



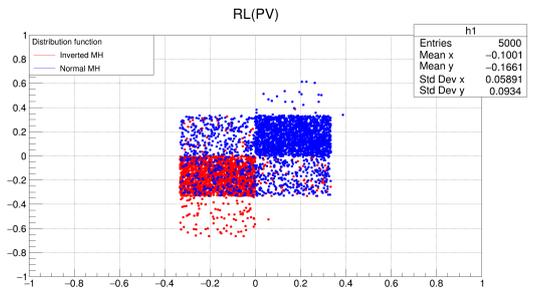
(б) Распределение RL как функции от PV

Рисунок 21 — Функции распределения критериев Фурье RL и PV в случае распределенных нормально значений Δm_{31}^2 и δE

Посмотрим, как сильно изменятся функции распределения, если зафиксировать энергетическое разрешение $\delta E = 4\%$:



(а) Распределение вероятности от суммы $RL + PV$



(б) Распределение RL как функции от PV

Рисунок 22 — Функции распределения критериев Фурье RL и PV в случае распределенного нормально значения Δm_{31}^2 и $\delta E = 4\%$

Из рисунка 22 (а) видно, что область перекрытия функций распределения увеличилась, что и требовалось ожидать. Чем хуже разрешение детектора, тем хуже проявляются осцилляционные эффекты (рисунки 9 — 11), тем хуже работает критерий Фурье. Очевидно, что чем меньше перекрываются функции распределения, тем более статистически значимым будет результат эксперимента.

Вернемся к рисунку 21 (а) как к наиболее общему и профитируем для дальнейшей работы полученные зависимости функцией распределения Гаусса:

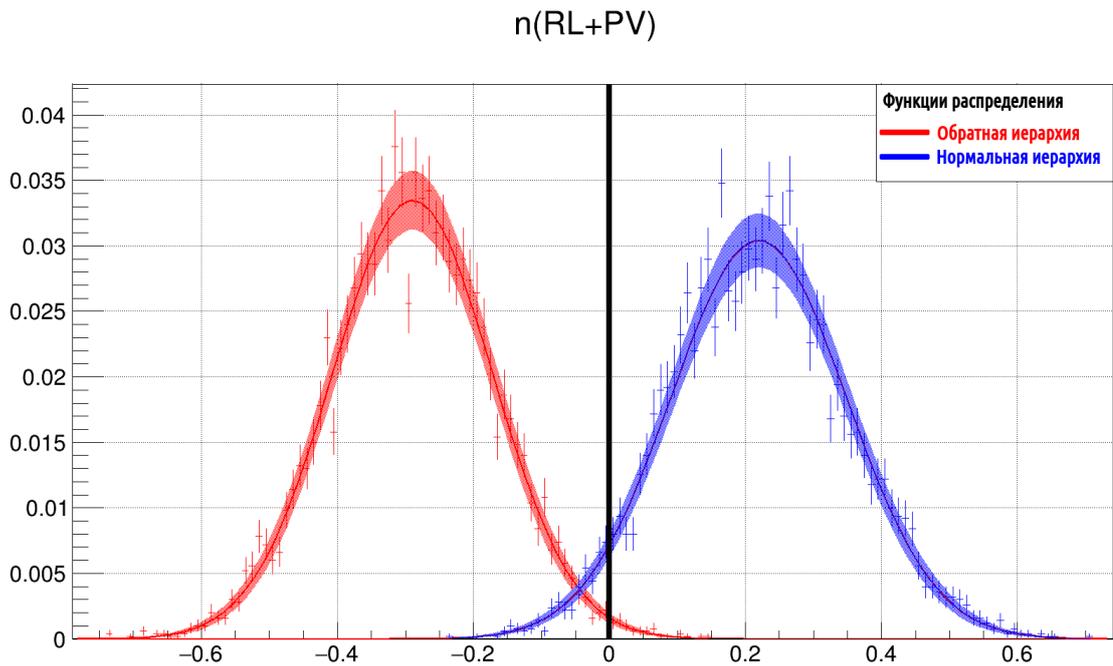


Рисунок 23 — Профитированные функции распределения

Результаты фита: $\chi_{\text{NMH}}^2 = 88$, $\chi_{\text{IMH}}^2 = 76$.

$\chi_{\text{крит}}^2 = 149$ для доверительной вероятности $\alpha = 0.995$.

Так как полученные значения χ^2 не превышают $\chi_{\text{крит}}^2$, можно считать, представленные функции действительно являются нормальными распределениями Гаусса с доверительной вероятностью $\alpha = 0.995$.

Теперь посчитаем вероятности ошибки второго рода (на основании критерия принимается неверная гипотеза) $P_{\text{NMH}}(RL + PV < 0)$ и $P_{\text{IMH}}(RL + PV > 0)$.

$$P_{\text{NMH}}(RL + PV < 0) = \int_{-\infty}^0 N(\mu_{\text{NMH}}, \sigma_{\text{NMH}}^2) dx = 0.044. \quad (25)$$

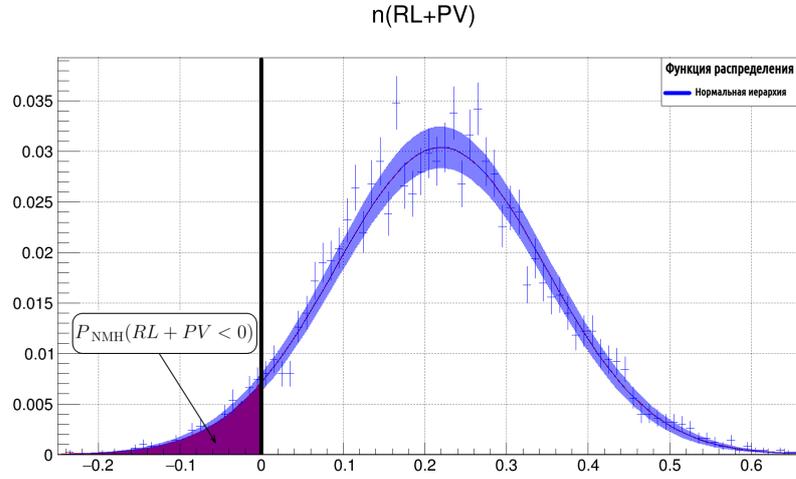


Рисунок 24 — Ошибка второго рода, нормальная иерархия

$$P_{\text{IMH}}(RL + PV > 0) = \int_0^{+\infty} N(\mu_{\text{IMH}}, \sigma_{\text{IMH}}^2) dx = 0.0067. \quad (26)$$

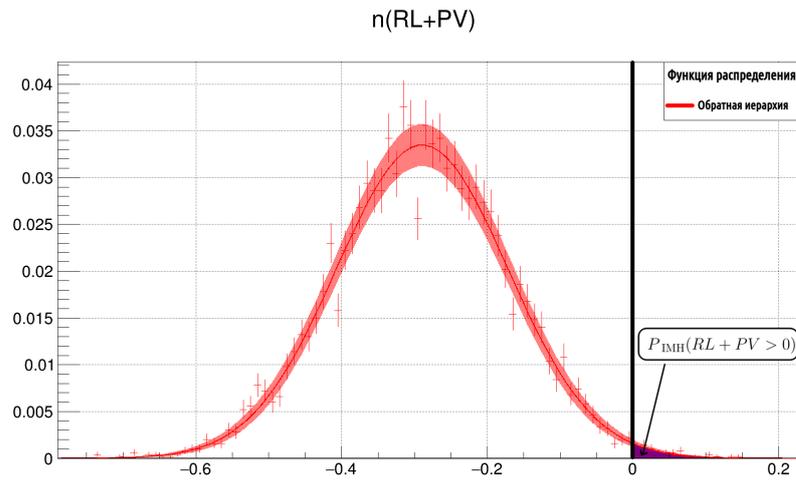


Рисунок 25 — Ошибка второго рода, обратная иерархия

В работе [2] утверждается, что знак Δm_{31}^2 (то есть иерархия масс) будет определен на уровне достоверности порядка 3σ . Полученный выше результат (с учетом целенаправленного ухудшения энергетического разрешения) с этим заявлением согласуется.

5 Заключение

В данной работе была построена математическая модель реакторного эксперимента JUNO с использованием метода Монте-Карло, построены ожидаемые гистограммы — результаты эксперимента, проведен анализ чувствительности к энергетическому разрешению детектора и топливному составу реактора в самом простом приближении, показана эффективность критерия Фурье для определения иерархии масс нейтрино.

Дальнейшая работа будет направлена на усовершенствование изложенной модели, а именно включение в рассмотрение геометрии детектора и его рабочего вещества, будет проведено сравнение критерия Фурье с периодограммным критерием Ломба-Скэргла для различных энергетических разрешений. Планируется более детальный разбор теоретической части по нейтринным осцилляциям и реакции обратного бета-распада, а также сравнение реакторных осцилляционных экспериментов с ускорительными.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] *G. Fantini, A. Gallo Rosso, F. Vissani, V. Zema* «The formalism of neutrino oscillations: an introduction» (2018), arXiv:1802.05781 [hep-ph]
- [2] Neutrino physics with JUNO (2016), arXiv:1507.05613 [physics.ins-det]
- [3] *L. Zhan, Y. Wang, J. Cao, L. Wen* «Determination of the neutrino mass hierarchy at an intermediate baseline» (2008), arXiv:0807.3203 [hep-ex]
- [4] *D. V. Forero, R. Hawkins, P. Huber* «The benefits of a near detector for JUNO» (2017), arXiv:1710.07378 [hep-ph]
- [5] *D. L. Danielson, A. C. Hayes, G. T. Garvey* «Reactor Neutrino Spectral Distortions Play Little Role in Mass Hierarchy Experiments» (2019), arXiv:1808.03276 [hep-ph]
- [6] *E. Akhmedov* «Quantum mechanics aspects and subtleties of neutrino oscillations» (2019), arXiv:1901.05232 [hep-ph]
- [7] *B. Roskovec* «Neutrino Physics with Reactors» (2018), arXiv:1812.03206 [hep-ex]
- [8] *PDG* Particle physics booklet (2018)
- [9] *A.C. Hayes, P. Vogel* «Reactor Neutrino Spectra» (2016), arXiv:1605.02047 [hep-ph]
- [10] *P. Huber* «On the determination of anti-neutrino spectra from nuclear reactors» (2011), arXiv:1106.0687 [hep-ph]
- [11] *A. Mueller et al.* «Improved predictions of reactor antineutrino spectra» (2011), arXiv:1101.2663 [hep-ex]
- [12] *С.А. Фаянс* «Радиационные поправки и эффекты отдачи в реакции $\tilde{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$ при низких энергиях» (М.: Ядерная физика, т. 42, вып. 4(10), 1985)
- [13] *J.H. Learned et al.* «Determination of Neutrino Mass Hierarchy and θ_{13} With a Remote Detector of Reactor Antineutrinos» (2008), arXiv:0612022