

Министерство науки и высшего образования Российской
Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования

Национальный исследовательский ядерный университет
«МИФИ»

Отчет о научно-исследовательской работе на тему:
Динамическая эволюция скопления первичных
черных дыр

Научный руководитель
к.ф.-м.н. доц. каф. 40

_____ А. А. Кириллов

Выполнил
студент группы М19-115

_____ В. Д. Стасенко

Москва 2020

СОДЕРЖАНИЕ

1 Введение	2
2 Основные уравнения	5
2.1 Приближение Фоккера-Планка	5
2.2 Усреднение по орбитам	6
2.3 Конус потерь	9
2.4 Начальные и граничные условия	12
3 Метод решения уравнений	15
4 Результаты	18
5 Заключение	21
Список использованных источников	22

1. ВВЕДЕНИЕ

Подробное изучение галактических ядер показало, что в большинстве из них в центре содержатся сверхмассивные черные дыры (далее СЧД), имеющие массы $10^6 \div 10^{10} M_{\odot}$ [1], с которыми связывают физическую природу активности галактического центра.

Одним из возможных сценариев образования таких СЧД может быть коллапс и последующие слияние большой совокупности звезд за счет их большой концентрации в центрах галактик. Однако есть основания полагать, что звездообразование и формирование галактических центров шло одновременно [1; 2], это может говорить об их дозвездном происхождении. Таким образом становится актуальным вопрос о происхождении таких черных дыр (ЧД).

В статьях [3; 4] был предложен механизм образования первичных черных дыр (ПЧД), связанный с квантовыми эффектами во время космологической инфляции. Эти модели предсказывают появление не только одиночных ЧД, а также целых скоплений в широком массовом диапазоне (в том числе маломассивных и сверхмассивных). В результате временной эволюции такого кластера как раз могут появиться СЧД. Подобные скопления ПЧД обладают рядом существенных преимуществ:

1. Образование СЧД в дозвездный период позволяет объяснить наличие квазаров на красных смещениях $z > 6$ [5].
2. Вклад в реионизацию Вселенной, которая имела место на $z \sim 8$, могут давать ПЧД. Это связано с взаимодействием излучения от маломассивных ПЧД с нейтральным газом [6–8].
3. Кластеры ПЧД могут составлять долю скрытой массы [9].
4. Параметры черных дыр, зарегистрированных при их слиянии гравитационным детектором LIGO, могут указывать на их кластерное происхождение [10; 11].

Таким образом, изучение динамической эволюции кластера ПЧД является важной и актуальной задачей для решения целого ряда проблем

современной астрофизики и космологии. Однако до сих пор вопрос эволюции скопления ПЧД не был хорошо изучен. В работе [12] рассматривался вопрос изменения маломассивной составляющей массового спектра кластера ПЧД за счет механизма испарения Хокинга. А существующие работы по шаровым звездным скоплениям (динамика которых схожа с динамикой кластеров ПЧД) не учитывают широкий массовый диапазон. Например, в работе [13] рассмотрена эволюция кластера компактных звезд с массой $M = 1.4M_{\odot}$ с учетом гравитационных слияний. Конечно, в результате слияний будет образовываться некоторый массовый спектр, однако он будет значительно уже, чем спектр в кластерах ПЧД, а нижняя граница спектра будет начальной масса звезд в кластере – $M = 1.4M_{\odot}$.

В [14] рассмотрен вопрос эволюции шарового скопления, в центре которого расположена массивная центральная ЧД (далее, ЦЧД), а в [15–17] учтен механизм захвата звезд ЦЧД. Однако представленные темпы поглощения малы для типичных шаровых скоплений. Недостаток указанных работ и им подобных состоит в том, что рассматривается скопление с узким (в сравнении с ПЧД) или же монохроматическим спектром масс и пренебрегается гравитационным потенциалом от распределения звезд (т.е. потенциал создается только ЦЧД). Однако в работах [18] и [19] учитывается потенциал от распределения звезд, но диапазон масс по-прежнему узкий.

Наличие широкого массового диапазона может приводить к тому, что маломассивная часть кластера будет «нагреваться» за счет стремления к термодинамическому равновесию с массивной составляющей. В результате чего легкие ЧД могут интенсивно вылетать из кластера [20; 21].

Можно выделить два способа решения задачи эволюции скопления ПЧД, которые обычно применяются для изучения эволюции шаровых звездных скоплений:

1. Численное интегрирование системы уравнений задачи N-тел. Однако существующие программные пакеты с вычислительной сложностью $\mathcal{O}(N^2)$ пригодны для типичных шаровых скоплений, т.е. с узким массовым диапазоном и не очень большим числом рассматриваемых частиц (в сравнении с кластерами ПЧД). Но несмотря на это метод позволяет отслеживать траекторию каждой частицы в отдельности

и учитывать двойные системы, тройные и прочей кратности сближения. Что является огромным плюсом, но увеличивает вычислительную сложность.

2. Решение кинетических уравнений с интегралом столкновений. Этот метод позволяет рассмотреть произвольный массовый диапазон и сколь угодно большое число частиц. К тому же требуемое вычислительное время составляет всего несколько минут, что является огромным преимуществом относительно N-BODY. Также к плюсам метода следует отметить то, что в кинетические уравнения можно включать много разнообразной физики.

В данной работе используется второй подход.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.1. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФОККЕРА-ПЛАНКА

Кинетическое уравнение, описывающее эволюцию функции распределения (далее, ФР), — это кинетического уравнение Больцманна:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial f}{\partial v_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c, \quad (1)$$

где $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c$ — это интеграл столкновений. Если учитывать только взаимодействия при которых скорости ЧД изменяются незначительно, то интеграл столкновений принимает форму Фоккера-Планка:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c = - \sum_i \frac{\partial}{\partial v_i} (f \langle \Delta v_i \rangle) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} (f \langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle), \quad (2)$$

где $\langle \Delta v_i \rangle$, $\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle$ — это диффузионные коэффициенты. Как было показано в работе [22], если между частицами действуют обратноквадратные силы (что, в частности, имеет место в случае гравитации), то выражения для коэффициентов примут вид:

$$\begin{aligned} \langle \Delta v_i \rangle &= -\Gamma \sum_b m_b (m + m_b) \frac{\partial h_b}{\partial v_i}, \quad h_b(\mathbf{v}) = \int \frac{f_b(\mathbf{v}_f)}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}_f|} d\mathbf{v}_f, \\ \langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle &= \Gamma \sum_b m_b^2 \frac{\partial^2 g_b}{\partial v_i \partial v_j}, \quad g_b = \int f_b(\mathbf{v}_f) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_f| d\mathbf{v}_f, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Gamma = 4\pi G^2 \ln \Lambda$ ($\ln \Lambda$ — Кулоновский логарифм, $\Lambda \sim N$) и подразумевается суммирование по всем типам сближающихся частиц (в нашем случае сумма по всем массам).

Инвариантная форма уравнения (2) имеет вид:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c = - (f T^i)_{;i} + \frac{1}{2} (f S^{ij})_{;ij}, \quad (4)$$

где коэффициенты даются следующими формулами [22; 23]:

$$\begin{aligned} T^i &= \Gamma a^{ij} \frac{\partial H}{\partial v^j}, \\ S^{ij} &= \Gamma \left[a^{ik} a^{jl} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial v^k \partial v^l} - \Gamma_{kl}^m \frac{\partial G}{\partial v^m} \right) \right], \\ H &= \sum_b m_b (m + m_b) h_b(\mathbf{v}), \quad G = \sum_b m_b^2 g_b(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (5)$$

После некоторых преобразований можно упростить уравнение (4):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c = -\frac{1}{\sqrt{a}} (\sqrt{a} f \langle \Delta v^i \rangle)_{,i} + \frac{1}{2\sqrt{a}} (\sqrt{a} f \langle \Delta v^i \Delta v^j \rangle)_{ij}, \quad (6)$$

где вместо ковариантного дифференцирования используется уже обычное, а коэффициенты даются следующими выражениями:

$$\langle \Delta v^i \rangle = T^i - \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^i S^{jk}, \quad \langle \Delta v^i \Delta v^j \rangle = S^{ij}. \quad (7)$$

Легко показать, что они обладают следующими трансформационными свойствами при переходе к другой системе координат:

$$\begin{aligned} \langle \Delta V^\lambda \rangle &= \frac{\partial V^\lambda}{\partial v^i} T^i(v) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V^\lambda}{\partial v^i \partial v^j} - \frac{\partial V^\lambda}{\partial v^k} \Gamma_{ij}^k(v) \right) S^{ij}(v), \\ \langle \Delta V^\mu \Delta V^\nu \rangle &= \frac{\partial V^\mu}{\partial v^i} \frac{\partial V^\nu}{\partial v^j} S^{ij}(v). \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, если новые переменные V — некоторая функция переменных v , то используя (8) можно получить обобщенные диффузионные коэффициенты $\langle \Delta V^\lambda \rangle$ и $\langle \Delta V^\mu \Delta V^\nu \rangle$ в зависимости от координат v с помощью формул (5). Подробно все вычисления представлены в книге [23].

2.2. УСРЕДНЕНИЕ ПО ОРБИТАМ

Полученная форма (6) для столкновительного члена уравнения Больцмана имеет т.н. локальную форму, т.е. зависит от координаты физического пространства. Это легко понять, т.к. интегралы в диффузионных коэффициентах берутся вдоль скорости, а она ограничена сверху в данной точке пространства значением $v_e = \sqrt{-2\phi(r)}$ в гравитационно связанной систе-

ме.

В большинстве приложений уравнения ФП прибегают к приближению, что время релаксации велико в сравнении с орбитальным периодом. Это означает то, что характерные изменения в ФР происходят на масштабах времен больших, чем орбитальный период. В этом случае функция распределения f удовлетворяет теореме Джинса: $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = f(E, I_2, \dots)$, где E, I_2, \dots — это интегралы движения. Последнее легко понять, если решить стационарное кинетическое уравнения Больцманна (1) без правой части методом характеристик. В качестве характеристик мы получим как раз уравнения движения частицы в потенциале $\phi(r)$, интегралы которого будут интегралы движения.

Таким образом, если ФР медленно эволюционирует, то можно проинтегрировать уравнение (1) вдоль невозмущенного движения (вдоль орбиты), тем самым исключив из уравнения зависимость от координат физического пространства \mathbf{x} . Сделать это, однако, удастся, если мы выразим столкновительный член в переменных интегралов движения. Ведь только в этом случае $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = f(E, I_2, \dots)$ можно будет вынести из под знака интегрирования вдоль орбиты (т.к. вдоль невозмущенной траектории ФР постоянна).

Для того, чтобы осуществить это удобно выбрать в качестве переменных

$$\mathcal{E} = -E = -\frac{v^2}{2} + \psi(r), \quad \mathcal{R} = \frac{L^2}{L_c^2(\mathcal{E})}, \quad (9)$$

где $\psi(r) = -\varphi(r)$, а $L_c(\mathcal{E})$ — максимальный угловой момент орбиты с энергией \mathcal{E} , т.е. угловой момент круговой орбиты:

$$L_c^2(\mathcal{E}) = -r_c^3 \left. \frac{d\psi}{dr} \right|_{r_c}. \quad (10)$$

Пользуясь соотношениями (5) и (8) и уравнением (6) можно получить уравнение ФП в переменных \mathcal{E} и \mathcal{R} и затем проинтегрировать вдоль орбит:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}}(N \langle \Delta \mathcal{E} \rangle_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{E}^2}(N \langle (\Delta \mathcal{E})^2 \rangle_t) - \frac{\partial}{\partial \mathcal{R}}(N \langle \Delta \mathcal{R} \rangle_t) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{R}^2}(N \langle (\Delta \mathcal{R})^2 \rangle_t) + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{E} \partial \mathcal{R}}(N \langle \Delta \mathcal{E} \Delta \mathcal{R} \rangle_t), \end{aligned} \quad (11)$$

где N — это концентрация в пространстве $(\mathcal{E}, \mathcal{R})$, которая связана с ФР

следующим образом:

$$N(\mathcal{E}, \mathcal{R})d\mathcal{E}d\mathcal{R} = 4\pi^2 P(\mathcal{E}, \mathcal{R})L_c^2(\mathcal{E})f(\mathcal{E}, \mathcal{R})d\mathcal{E}d\mathcal{R}, \quad (12)$$

$P(\mathcal{E}, \mathcal{R})$ – орбитальный период, а индекс t означает интегрирование вдоль орбиты, например

$$\langle \Delta\mathcal{E} \rangle_t = \frac{2}{P} \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{v_r} \langle \Delta\mathcal{E} \rangle, \quad (13)$$

где v_r – радиальная скорость, а r_- , r_+ – точки поворота (корни уравнения $v_r = 0$).

Выражения для коэффициентов, входящих в уравнение (11), довольно громоздки и приведены в [17; 23]. Кроме того, результаты численного интегрирования показывают, что зависимость ФР от \mathcal{R} изотропная [24] или же слабая, в присутствии ЦЧД [17] (оно и понятно, ведь ЦЧД будет поглощать частицы с маленьким моментом импульса). Поэтому, для упрощения вычислений, проинтегрируем уравнение (11) по \mathcal{R} от 0 до 1 и запишем полученное уравнение в форме уравнения неразрывности:

$$4\pi^2 p(\mathcal{E}) \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} \left(D_{\mathcal{E}\mathcal{E}} \frac{\partial f}{\partial \mathcal{E}} + m D_{\mathcal{E}} f \right), \quad (14)$$

где коэффициенты даются следующими формулами:

$$D_{\mathcal{E}} = -16\pi^3 \Gamma \int_{\mathcal{E}}^{\psi(0)} d\mathcal{E}' \nu(\mathcal{E}') p(\mathcal{E}'), \quad (15)$$

$$D_{\mathcal{E}\mathcal{E}} = 16\pi^3 \Gamma \left(q(\mathcal{E}) \int_0^{\mathcal{E}} \mu(\mathcal{E}') d\mathcal{E}' + \int_{\mathcal{E}}^{\psi(0)} q(\mathcal{E}') \mu(\mathcal{E}') d\mathcal{E}' \right), \quad (16)$$

$$p(\mathcal{E}) = 4 \int_0^{\psi^{-1}(\mathcal{E})} dr r^2 \sqrt{2(\psi(r) - \mathcal{E})}, \quad (17)$$

$$q(\mathcal{E}) = \frac{4}{3} \int_0^{\psi^{-1}(\mathcal{E})} dr r^2 (2(\psi(r) - \mathcal{E}))^{3/2}, \quad (18)$$

где $\psi^{-1}(\mathcal{E})$ – корень уравнения $\psi(r) = \mathcal{E}$, а $\nu(\mathcal{E})$ и $\mu(\mathcal{E})$ – это первый и второй моменты масс:

$$\nu(\mathcal{E}) = \int f(\mathcal{E}, m) m dm, \quad (19)$$

$$\mu(\mathcal{E}) = \int f(\mathcal{E}, m) m^2 dm. \quad (20)$$

В случае дискретного спектра масс (что обычно и происходит) интегралы (19) и (20) переходят в сумму вида $\sum m_i f_i(\mathcal{E})$, а уравнение (14) в систему уравнений. Каждое уравнение будет описывать эволюцию ФР какого-то сорта частиц за счет взаимодействия с этим же сортом и всеми остальными, что учитывается в коэффициентах (15) и (16). Также отметим, что в присутствии ЦЧД предел интегрирования $\psi(0)$ заменяется на \mathcal{E}_{crit} из-за того, что потенциал в нуле в этом случае сингулярен. А предел 0 заменяется всегда на некоторое $\mathcal{E}_{tidal} > 0$ из-за расходимости коэффициентов (17) и (18) при $\mathcal{E} \rightarrow 0$.

2.3. КОНУС ПОТЕРЬ

Если в центре шарового скопления расположена ЦЧД, то она будет поглощать частицы на низких моментах импульса, формируя в пространстве $(\mathcal{E}, \mathcal{R})$ так называемый конус потерь. Залетая в эту область частица может поглощаться ЦЧД за один орбитальный период — режим пустого конуса потерь. Однако поглощение может и не произойти, если в результате взаимодействия с другими черными дырами частица приобретет момент импульса отличный от критического и вылетит из конуса потерь за один орбитальный период — это режим «точечного стока» (pinhole) или полный конус потерь [15]. В последнем случае поглощение будет происходить только в момент прохождения некоторой критической точки R_{crit} в окрестности ЦЧД, на которой происходит захват.

Временные масштабы вблизи конуса потерь на которых \mathcal{R} меняется существенным образом много меньше, чем для \mathcal{E} . Это связано с тем, что на временах, где существенно меняется \mathcal{E} характерные изменения в моменте импульса будут $\sim L_c(\mathcal{E})$, а мы интересуемся случаем $\delta L \ll L_c(\mathcal{E})$. Кроме того, градиенты в коэффициентах уравнения (11) по \mathcal{R} при малых \mathcal{R} много больше, чем по \mathcal{E} . Таким образом, можно пренебречь частью, связанной с диффузией по координате \mathcal{E} , и считать ее параметром в уравнении (11):

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathcal{R}}(N \langle \Delta \mathcal{R} \rangle_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{R}^2}(N \langle (\Delta \mathcal{R})^2 \rangle_t). \quad (21)$$

При $\mathcal{R} \ll 1$ выражения для коэффициентов в локальной форме в уравнении (21) примут вид:

$$\langle \Delta \mathcal{R} \rangle = \frac{r^2}{L_c^2(\mathcal{E})} \langle \Delta v_\perp^2 \rangle + \mathcal{O}(\mathcal{R}), \quad (22)$$

$$\langle (\Delta \mathcal{R})^2 \rangle = \frac{2r^2}{L_c^2(\mathcal{E})} \mathcal{R} \langle \Delta v_\perp^2 \rangle + \mathcal{O}(\mathcal{R}^2), \quad (23)$$

где

$$\langle \Delta v_\perp^2 \rangle = 4\pi m^2 \Gamma \left(\frac{4}{3} I_0 + 2J_{1/2} - \frac{2}{3} J_{3/2} \right), \quad (24)$$

$$I_0(\mathcal{E}) = \int_0^\mathcal{E} f(\mathcal{E}') d\mathcal{E}', \quad (25)$$

$$J_n(\mathcal{E}, r) = \int_\mathcal{E}^{\psi(r)} d\mathcal{E}' f(\mathcal{E}') \left(\frac{\psi(r) - \mathcal{E}'}{\psi(r) - \mathcal{E}} \right)^n, \quad (26)$$

в появившихся интегралах f является функцией только энергии. Это связано с тем, что диффузионные коэффициенты значительно проще вычислить от изотропный ФР. Для получения изотропной врсии ФР формально необходимо проинтегрировать её по \mathcal{R} . Конкретный способ интегрирования не так важен, т.к. в дальнейшем мы будем работать только с ФР, независимой от \mathcal{R} . Видно, что в рассматриваемом приближении справедливо следующее:

$$\langle \Delta \mathcal{R} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathcal{R}} \langle (\Delta \mathcal{R})^2 \rangle. \quad (27)$$

если ввести коэффициент:

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \lim_{\mathcal{R} \rightarrow 0} \frac{\langle (\Delta \mathcal{R})^2 \rangle_t}{2\mathcal{R}}, \quad (28)$$

то уравнение примет следующий простой вид

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \mathcal{D}(\mathcal{E}) \frac{\partial}{\partial \mathcal{R}} \left(\mathcal{R} \frac{\partial N}{\partial \mathcal{R}} \right), \quad (29)$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \frac{2}{L_c^2(\mathcal{E}) P(\mathcal{E})} \int_0^{\psi^{-1}(\mathcal{E})} \frac{\langle \Delta v_\perp^2 \rangle r^2 dr}{v_r}, \quad (30)$$

где $P(\mathcal{E}) = P(\mathcal{E}, \mathcal{R})_{\mathcal{R} \rightarrow 0}$ — период радиальной орбиты.

Поясним смысл выражения (28). Пусть $\langle (\Delta v)^2 \rangle$ является диффузион-

ным коэффициентом, т.е. показывает среднее изменение квадрата скорости в единицу времени в приближении малых рассеиваний, а v — начальная скорость частицы. Определим время релаксации: $t_r \langle (\Delta v)^2 \rangle \sim v^2$. Видно, что это время — время, требуемое для того, чтобы многократные взаимодействия с малыми изменениями скоростей, привели к суммарному эффекту сравнимому с v . Для оценок обычно считают $v \sim \sigma$. Ясно, что \mathcal{D}^{-1} имеет смысл времени релаксации, усредненного по орбите.

Найдем стационарное решение уравнения (29) с дополнительными условиями:

$$N(\mathcal{R}_{lc}) = 0, \quad \bar{N}(\mathcal{E}) = \int_{\mathcal{R}_{lc}}^1 N(\mathcal{E}, \mathcal{R}) d\mathcal{R}, \quad (31)$$

слева — условие поглощающей границы при \mathcal{R}_{lc} (захват частиц ЦЧД), справа — требование того, что при интегрировании по \mathcal{R} мы должны получить изотропную версию ФР,

$$f(\mathcal{E}) \approx \frac{\bar{N}\mathcal{E}}{4\pi^2 L_c^2(\mathcal{E}) P(\mathcal{E})}. \quad (32)$$

В результате получим:

$$N(\mathcal{R}, \mathcal{E}) = \frac{\ln(\mathcal{R}/\mathcal{R}_{lc})}{\ln(1/\mathcal{R}_{lc}) + \mathcal{R}_{lc} - 1} \bar{N}(\mathcal{E}). \quad (33)$$

Пусть $F(\mathcal{E})d\mathcal{E}$ — поток частиц в точке \mathcal{E} в интервале $d\mathcal{E}$ в конус потерь:

$$F(\mathcal{E})d\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathcal{R}_{lc}}^1 N(\mathcal{E}, \mathcal{R}) d\mathcal{R} \right) d\mathcal{E}, \quad (34)$$

если записать уравнение (21) в форме уравнения непрерывности, то станет ясно, что этот интеграл есть просто разность значений потока в пространстве \mathcal{R} в точке $\mathcal{R} = 1$ и \mathcal{R}_{lc} . Ясно, что на верхнем пределе будет ноль, т.к. противное физически невозможно. На нижнем же пределе можно воспользоваться выражением для потока из уравнения (29), тогда получим

$$F(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(\mathcal{E}) \mathcal{R}_{lc} \left(\frac{\partial N}{\partial R} \right)_{\mathcal{R}_{lc}} \approx \frac{q}{\ln(1/\mathcal{R}_{lc})} \frac{\bar{N} \mathcal{R}_{lc}}{P}. \quad (35)$$

где

$$q(\mathcal{E}) = \frac{P(\mathcal{E})\mathcal{D}(\mathcal{E})}{\mathcal{R}_{lc}(\mathcal{E})}, \quad (36)$$

смысл последней величины в том, что она показывает какую часть составляет изменение момента импульса за один орбитальный период относительно L_{lc} $q \approx (\delta L/L_{lc})^2$. Поскольку $\delta L \approx \sqrt{P/t_r}L_c$ и $t_r \approx \mathcal{D}^{-1}$, то собирая все вместе получим выражение (36). Ясно, что (35) справедливо при $q \ll 1$, т.к. в противном случае изменения в моменте импульса стали бы сравнимы или выше, чем L_{lc} за один орбитальный период и условие поглощающей границы при \mathcal{R}_{lc} было бы нарушено (был бы поток как внутрь конуса потерь, так и наружу).

Если рассматриваемые процессы происходят на временах порядка орбитального периода, то усредненным по орбитатам уравнением ФП (21) пользоваться уже нельзя. В работе [17] было полученное стационарное выражение для N вблизи конуса потерь в этом случае:

$$N(\mathcal{E}, \mathcal{R}) = \frac{\ln(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0)}{\ln(1/\mathcal{R}_0) + \mathcal{R}_0 - 1} \bar{N}(\mathcal{E}), \quad (37)$$

где $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}[q(\mathcal{E})]$. Видно, что полученный результат совпадает по форме с (33). Поскольку в [17] уравнение Больцманна решалось численно, то здесь приведем аналитическое выражение для $R_0(q)$ [25]:

$$\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_{lc} e^{-q/\xi(q)}, \quad \xi(q) \approx \frac{q}{(q^2 + q^4)^{1/4}}. \quad (38)$$

Поток частиц на ЦЧД в этом случае будет даваться выражением:

$$F(\mathcal{E}) \approx \frac{q}{\ln(1/\mathcal{R}_0)} \frac{\bar{N}\mathcal{R}_{lc}}{P}. \quad (39)$$

2.4. НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Будем использовать для начального профиля плотности следующую параметризацию:

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\gamma} \left[1 + \left(\frac{r}{r_0} \right)^\alpha \right]^{(\gamma-\beta)/\alpha}, \quad (40)$$

Если известна ФР $f(\mathcal{E})$, то концентрация будет даваться выражением

$$n(r) = 4\pi \int_0^{\psi(r)} f(\mathcal{E}) \sqrt{2(\psi(r) - \mathcal{E})} d\mathcal{E}, \quad (41)$$

на это можно посмотреть как на интегральное уравнение Абеля относительно $f(\mathcal{E})$ с решением

$$f(\mathcal{E}) = \frac{\sqrt{2}}{4\pi^2} \frac{d}{d\mathcal{E}} \int_0^{\mathcal{E}} \frac{d\psi}{\sqrt{\mathcal{E} - \psi}} \frac{dn}{d\psi}, \quad (42)$$

полученное соотношение известно как формула Эдингтона. Таким образом, зная начальную плотность, легко получить начальную ФР с помощью соотношения (42).

Спектр масс возьмем в степенном виде:

$$\frac{dN}{dM} \propto \frac{1}{M_\odot} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^s. \quad (43)$$

В качестве граничных условий для уравнения (14) выберем условия нулевого потока на границах, где выражение для потока

$$F(\mathcal{E}) = D_{\mathcal{E}\mathcal{E}} \frac{\partial f}{\partial \mathcal{E}} + m D_{\mathcal{E}} f, \quad (44)$$

такой выбор граничных условий сразу вызывает вопросы.

Ясно, что верхняя граница по \mathcal{E} — это энергия последней устойчивой круговой орбиты вокруг ЦЧД и, очевидно, что там должно быть условие поглощающей границы $f(\mathcal{E}_{max}) = 0$. Однако как показано в [14] поток частиц на ЦЧД в энергетическом пространстве практически нулевой. А поглощение частиц происходит на малосвязанных орбитах с помощью механизма конуса потерь [15; 16; 18; 25]. Кроме того, использование изотропной версии уравнения ФП вплоть до энергий последней устойчивой круговой орбиты не может быть обосновано, т.к. там ФР существенно анизотропна в пространстве моментов импульсов. Поэтому, пренебрегая несущественными краевыми эффектами, используем условие нулевого потока на каком-нибудь достаточно высоком значении \mathcal{E} .

Условие нулевого потока на нижней границе тоже ничем необосновано.

Энергия гравитационно связанной системы может спокойно изменяться до нуля, однако в этом случае будут расходиться коэффициенты $q(\mathcal{E})$ и $p(\mathcal{E})$ (18) и (17). $q(\mathcal{E})$ пропорционален объему фазового пространства с энергией меньшей, чем \mathcal{E} , $p(\mathcal{E}) = -\frac{dq}{d\mathcal{E}}$ будет пропорционален площади гиперповерхности, ограничивающей этот объем. Ясно, что из-за того, что $\mathcal{E} = 0$ в физически пространстве находится на бесконечности, то и коэффициенты эти будут бесконечными. Поэтому следует выбрать некоторое \mathcal{E}_{min} отличное от нуля.

Условие $F(\mathcal{E}_{min}) = 0$ физически означает, что слабосвязанные с кластером ЧД не захватываются какими-нибудь статическими гравитационными центрами. Что оправдано в случае ранней Вселенной. Например, в [26] рассмотрено влияние приливных сил от галактического центра на шаровое скопление звезд в гало Галактики, где использовалось условие поглощающей границы $f(\mathcal{E}_{min}) = 0$.

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Для исследования динамической эволюции самогравитирующей системы необходимо совместно решать уравнения Пуассона и Фоккера-Планка (14). Следуя [8], выберем в качестве независимой переменной q . Тогда основные уравнения примут вид:

$$\frac{\partial f_a(q, t)}{\partial t} = -\frac{\partial F_a(q, t)}{\partial q} - \nu(q, t)f(q, t), \quad (45)$$

последнее выражение представляет собой сток ЧД на ЦЧД, индекс a относится к a -му сорту частиц (сорта различаются по массе), а выражение для потока дается в виде:

$$-F_a = m_a B f_a + C \frac{\partial f_a}{\partial q}, \quad (46)$$

выражения для коэффициентов даются следующими соотношениями

$$C = \Gamma \sum_i m_i^2 \left(\int_0^q dq' \frac{q'}{p(q')} f_i(q') + q \int_q^\infty dq' \frac{f_i(q')}{p(q')} \right), \quad (47)$$

$$B = \Gamma \sum_i m_i \int_0^q dq' f_i(q'). \quad (48)$$

Выражение для плотности будет

$$\rho(r) = 4\pi^2 \sum_i m_i \int_{\phi(r)}^0 f_i(E) \sqrt{2(E - \phi(r))} dE, \quad (49)$$

где используется уже классическое определение для энергии $E = \frac{v^2}{2} + \phi(r)$. Выражение для гравитационного потенциала будет

$$\phi(r) = 4\pi G \left(\frac{1}{r} \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') + \int_r^\infty dr' r' \rho(r') \right). \quad (50)$$

Процедура совместного решения уравнений (45) и (50) подробно описана в работе [24] для случая уравнения в двух пространственных переменных и затем в [27] для рассматриваемого случая. Решение состоит из двух этапов. На первом на шаг Δt продвигается ФР с помощью уравнения (45) с

помощью разностной схемы Ченга-Купера [28]. Затем решается уравнение Пуассона (50) итерациями.

В исходном методе необходимо на втором шаге выражать ФР через q (например, с помощью кубического сплайна $\ln f, \ln q$) и после каждой итерации пересчитывать q для нового потенциала, затем получать значения $f(E)$ отвечающие новым $q(E)$, считать плотность и гравитационный потенциал и так далее. Здесь же нет необходимости в интерполировании ФР сплайном, поскольку она изначально является функцией от q . Конечно, нам по-прежнему придется находить соответствия между q и E , однако это менее затратная процедура. В многомассовом случае преимущества совсем очевидны, поскольку пришлось бы много ФР интерполировать сплайнами на втором шаге.

Также преимущества переменной q состоят в том, что удобно перейти к квазиравномерной сетке с помощью замены $x = \ln q$. К примеру в работе [13], где в качестве независимой переменной используется E , этот переход значительно сложнее.

Пользуясь (39) дадим выражение для ν в уравнении (45):

$$F(\mathcal{E}) \approx \frac{q}{\ln(1/\mathcal{R}_0)} \frac{\bar{N}\mathcal{R}_{lc}}{P} = \frac{\mathcal{D}(\mathcal{E})}{\ln(1/\mathcal{R}_{lc}) + (q^2 + q^4)^{1/4}} 4\pi^2 L_c^2(\mathcal{E}) P(\mathcal{E}) f(\mathcal{E}). \quad (51)$$

Можно показать, что

$$p(E) = \int_0^{L_c^2(E)} P(E, L) dL^2, \quad P(E, L) = 2 \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{v_r}, \quad (52)$$

где $P(E, L)$ – радиальный период. Обычно $P(E, L)$ очень слабо зависит от L , тогда справедливо будет следующее

$$p(E) \approx P(E) L_c^2(E). \quad (53)$$

Подставляя (51) с учетом (53) в уравнение (14) и переходя к переменной q получим для ν в уравнении (45) следующее выражение

$$\nu(E) = \frac{\mathcal{D}(E)}{\alpha + \ln(1/\mathcal{R}_{lc})}, \quad \alpha = (q^2 + q^4)^{1/4}, \quad (54)$$

где

$$q(E) = \frac{\mathcal{D}(E) P(E)}{\mathcal{R}_{lc}}, \quad (55)$$

$$\mathcal{D}(E) = \frac{2}{p(E)} \int_0^{\phi^{-1}(E)} \frac{\langle \Delta v_{\perp}^2 \rangle r^2 dr}{\sqrt{2(E - \phi(r))}}, \quad (56)$$

$$\langle \Delta v_{\perp}^2 \rangle = \Gamma \sum_i m_i^2 \left(\frac{4}{3} I_{0,i} + 2 J_{1/2,i} - \frac{2}{3} J_{3/2,i} \right), \quad (57)$$

$$I_{0,i}(E) = \int_E^0 f_i(E') dE', \quad (58)$$

$$J_{n,i}(E, r) = \int_{\phi(r)}^E dE' f_i(E') \left(\frac{E' - \phi(r)}{E - \phi(r)} \right)^n. \quad (59)$$

Известно, что Шварцшильдская ЧД поглощает частицы момент импульса которых меньше критического значения $L_{lc} = 2cr_g$, где r_g — радиус Шварцшильда. В Ньютоновском пределе этот момент импульса будут соответствовать орбите перецентр которой будет $r_{lc} = 4r_g$:

$$L_{lc}^2 = 2r_{lc}^2 \left(E + \frac{GM_{bh}}{r_{lc}} \right), \quad (60)$$

поскольку мы не рассматриваем сильносвязанные с ЦЧД частицы (т.к. их крайне мало и там не работает изотропная форма уравнения ФП), то будет справедливо

$$L_{lc}^2 \approx 8r_g GM_{bh}, \quad \mathcal{R}_{lc}(E) = \frac{L_{lc}^2(E)}{L_c^2(E)} = \frac{8r_g GM_{bh}}{L_c^2(E)}. \quad (61)$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим типичный пример кластера ПЧД со следующими параметрами профиля (40) $\gamma = 1$, $\alpha = 2$, $\beta = 5$, $r_0 = 1$ пк. Параметр спектра (43) $s = -2$, пределы изменения масс от $10^{-4} M_\odot$ до $10 M_\odot$. Полная масса кластера $M_{tot} = 5.4 \cdot 10^4 M_\odot$ и масса центральной черной дыры $M_{cbh} = 10^3 M_\odot$.

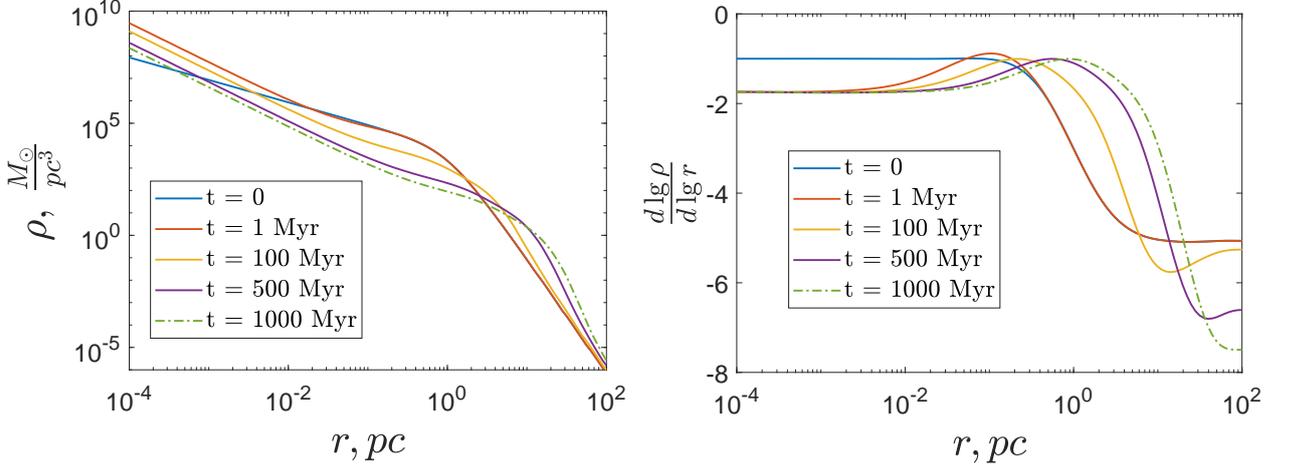


Рисунок 1 – Профиль плотности (слева) и наклон (справа) для разных моментов

На рисунке (1) представлен график профиля плотности и наклон профиля для разных моментов времени. Видно, что за очень короткий промежуток времени ~ 1 млн. лет (в сравнении с полным временем эволюции) начальный касп $\rho \propto r^{-1}$ претерпевает сильные изменения в центральной области и приобретает наклон $\rho \propto r^{-1.74}$ (Касп Бокала-Вольфа $\rho \propto r^{-1.75}$ [14]), который затем простирается к большим r . При больших r наклон тоже меняется, однако на много меньших временных масштабах и из начального $\rho \propto r^{-5}$ к 1 млрд. лет становится $\rho \propto r^{-7.5}$.

Рисунок (2) показывает зависимость массы кластера от радиуса. В начальный момент времени под 1 пк сосредоточено $\sim 0.5 \cdot M_{tot}$ массы, а к конечному момент времени остается только $\sim 0.01 \cdot M_{tot}$. Также в начальный момент $\sim 0.9 \cdot M_{tot}$ находится под 3 пк, к конечному моменту такая же доля остается под ~ 23 пк. Таким образом, можно сделать вывод о том, что размер кластера за 1 млрд. лет увеличился примерно в 10 раз.

Справа на рисунке (2) изображена доля полной массы каждой компоненты в зависимости от радиуса в конечный момент времени. Пунктирной линией изображена начальная зависимость, которая одинаковая для всех

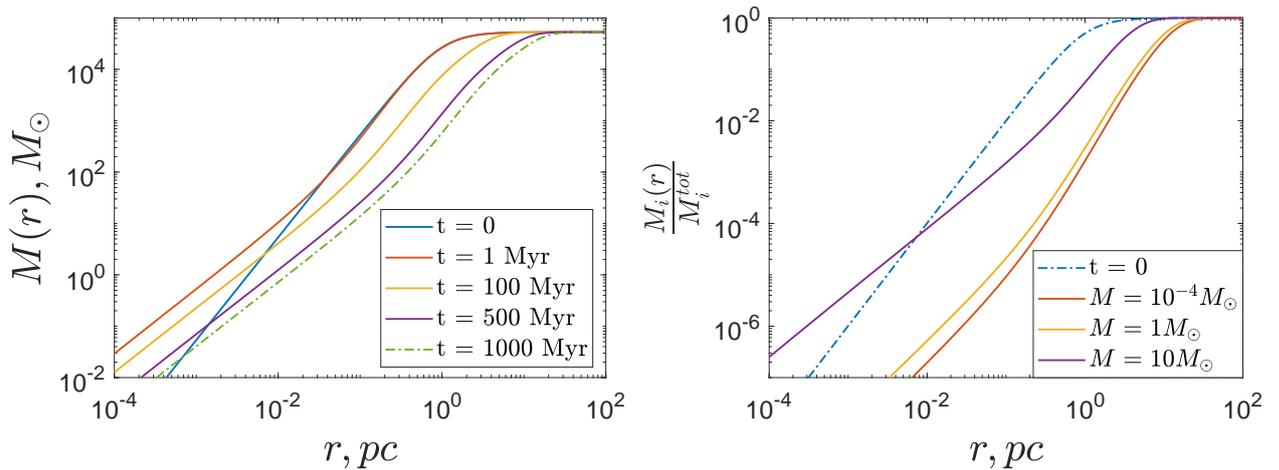


Рисунок 2 – Зависимость массы кластера от радиуса. Слева — полная масса кластера. Справа — масса компонент по отношению к полной массе каждой компоненты. Пунктирная линия — в начальный момент времени, сплошные — в конечный момент времени для разных компонент

компонент, т.к. начальный профиль плотности у всех одинаковый. К конечному моменту времени ~ 0.9 от массы самой тяжелой компоненты оказывается под ~ 7 пк. В то время как для компоненты $1M_\odot$ масса под 7 пк составляет ~ 0.25 от полной, а для $10^{-4}M_\odot$ — ~ 0.18 . Значение в ~ 0.9 приходится на ~ 20 пк для компоненты весом M_\odot и на ~ 25 пк для самой легкой. Происходит массовая сегрегация, в результате которой в кластере самая тяжелая компонента обособливается в центральной области, а вокруг располагаются более легкие черные дыры.

Дальнейшая эволюция, скорее всего, будет происходить отдельно для центра с тяжелыми ЧД и снаружи. Где под «отдельностью» подразумеваются разные временные масштабы для характерных изменений. Например, в [29] для простой термодинамической модели шарового скопления показан подобный ход развития событий. А в работе [27] в результате расчета получено, что начиная с некоторого момента времени, кор скопления и гало эволюционируют отдельно на существенно разных временных масштабах, т.н. явление коллапса кора. Однако эти работы не предполагают наличие центральной черной дыры и не учитывают массовый диапазон. В [18] было рассмотрено возмущенное решение Бокала-Вольфа и показано, что ЦЧД может вести себя подобно тепловому источнику, «накачивая» пространство вокруг себя энергией, вызывая тем самым отток вещества к периферии. Что происходит и в рамках данной работы.

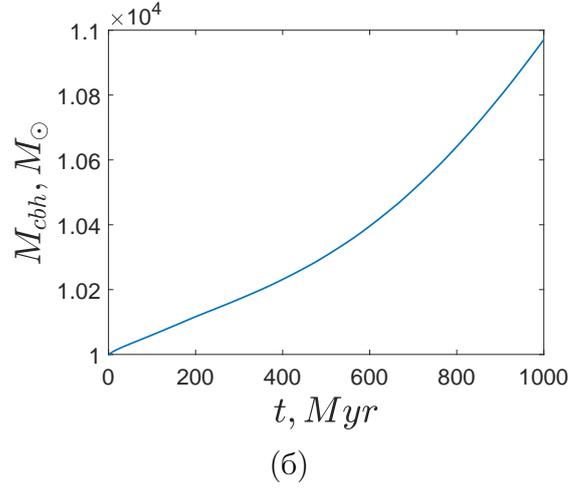
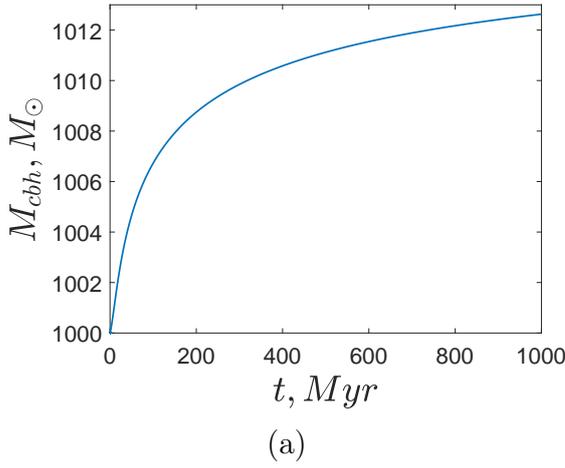


Рисунок 3 – Зависимость массы центральной черной дыры от времени. (а) — Для рассматриваемого в этой работе кластера. (б) — Для кластера с параметрами $r_0 = 5$ пк, $M_{tot} \sim 5.4 \cdot 10^6 M_\odot$, $M_{cbh} = 10^4 M_\odot$

Рисунок (3) показывает рост массы ЦЧД за счет механизма конуса потерь. На рисунке слева видно, что темпы роста практически нулевые: за 1 млрд лет масса ЦЧД нарастает всего лишь на $\sim 0.01 \cdot M_{cbh}$. Но нужно отметить, что в этом подходе никак не учитывается аккрекция обычного вещества, которая будет давать вклад в рост массы ЦЧД. И, если этот вклад будет значительным, то это может сказываться на эволюции скопления в целом. Также отметим, что в этой работе считается, что захват происходит для ЧД, перицентр которых $4r_g$. Эта величина может быть увеличена с помощью учета излучения гравитационных волн при пролете черных дыр вокруг центральной, что влияет на темпы поглощения. Также на темпы поглощения могут влиять начальные параметры кластера. Для примера был произведен расчет для скопления с параметрами профиля (40) $\gamma = 1$, $\alpha = 2$, $\beta = 5$ (т.е. такими же параметрами наклонов, как и выше), $r_0 = 5$ пк. Спектр масс (43) брался таким же, но начальная масса кластера $M_{tot} \sim 5.4 \cdot 10^6 M_\odot$ и масса ЦЧД $M_{cbh} = 10^4 M_\odot$. На рисунке (3б) представлены результаты. Видно, что к 1 млрд. лет масса ЦЧД увлечивается на ~ 0.1 от начальной.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе данной работы была изучена динамическая эволюция скопления первичных черных дыр с помощью кинетического уравнения Больцманна с интегралом столкновений в форме Фоккера-Планка. Был получен профиль плотности для разных моментов времени и установлено его поведение для центральной и внешней части скопления. За время ~ 1 млн. лет профиль приобретает форму, которая затем медленно эволюционирует во времени. В ходе эволюции кластер расширяется примерно в 10 раз и происходит массовая сегрегация, в результате которой тяжелые компоненты располагаются в его центральной области, а легкие уходят на периферию.

Темпы роста центральной черной дыры за счет механизма конуса потерь в рассмотренном кластере довольно малы. Однако, если учесть аккрецию обычного вещества, то картина может измениться. Если масса ЦЧД будет расти значительно, то расстояние до которого установится касп профиля плотности $\rho \propto r^{-7/4}$ будет увеличиваться.

В данной работе также не учтены излучение гравитационных волн, слияния ЧД друг с другом и вылет их из скопления. Можно ожидать, что учет последних явлений может привести к незначительному изменению временной эволюции профиля плотности для рассмотренного кластера ПЧД.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Rosenberg D. E., Rollino J.* Galaxy Formation: Was There A Big Bang Shell? // arXiv e-prints. — 2000. — astro-ph/0012023. — arXiv: astro-ph/0012023 [astro-ph].
2. *Merrifield M. R., Forbes D. A., Terlevich A. I.* The black hole mass-galaxy age relation // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2000. — Vol. 313, no. 2. — P. L29–L32. — eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/313/2/L29/3789287/313-2-L29.pdf>.
3. *Rubin S. G., Sakharov A. S., Khlopov M. Y.* The Formation of Primary Galactic Nuclei during Phase Transitions in the Early Universe // Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2001. — Vol. 92, no. 6. — P. 921–929. — arXiv: hep-ph/0106187 [hep-ph].
4. *Khlopov M. Y., Rubin S. G., Sakharov A. S.* Primordial structure of massive black hole clusters // Astroparticle Physics. — 2005. — Vol. 23, no. 2. — P. 265–277. — arXiv: astro-ph/0401532 [astro-ph].
5. The Final SDSS High-redshift Quasar Sample of 52 Quasars at $z > 5.7$ / L. Jiang [et al.] // Astrophys. J. — 2016. — Vol. 833, no. 2. — P. 222. — arXiv: 1610.05369 [astro-ph.GA].
6. *Belotsky K. M., Kirillov A. A.* Primordial black holes with mass 10^{16} – 10^{17} g and reionization of the Universe // J. Cosmol. Astropart. Phys. — 2015. — Vol. 2015, no. 1. — P. 041. — arXiv: 1409.8601 [astro-ph.CO].
7. *Belotsky K. M., Kirillov A. A., Rubin S. G.* Clusters of primordial black holes and reionization problem // Physics of Atomic Nuclei. — 2015. — Vol. 78, no. 3. — P. 387–393.
8. Reionization effect enhancement due to primordial black holes / K. M. Belotsky [et al.] // International Journal of Modern Physics D. — 2017. — Vol. 26, no. 9. — P. 1750102. — arXiv: 1702.06338 [astro-ph.CO].

9. *Carr B., Kühnel F., Sandstad M.* Primordial black holes as dark matter // *Phys. Rev. D.* — 2016. — Vol. 94, no. 8. — P. 083504. — arXiv: 1607.06077 [astro-ph.CO].
10. GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence / B. P. Abbott [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2016. — Vol. 116, issue 24. — P. 241103.
11. GW170104: Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2 / B. P. Abbott [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2017. — Vol. 118, issue 22. — P. 221101.
12. Signatures of primordial black hole dark matter / K. M. Belotsky [et al.] // *Modern Physics Letters A.* — 2014. — Vol. 29, no. 37. — P. 1440005. — arXiv: 1410.0203 [astro-ph.CO].
13. *Quinlan G. D., Shapiro S. L.* The Dynamical Evolution of Dense Star Clusters in Galactic Nuclei // *Astrophys. J.* — 1990. — Vol. 356. — P. 483.
14. *Bahcall J. N., Wolf R. A.* Star distribution around a massive black hole in a globular cluster. // *Astrophys. J.* — 1976. — Vol. 209. — P. 214–232.
15. *Lightman A. P., Shapiro S. L.* The distribution and consumption rate of stars around a massive, collapsed object. // *Astrophys. J.* — 1977. — Vol. 211. — P. 244–262.
16. *Bahcall J. N., Wolf R. A.* The star distribution around a massive black hole in a globular cluster. II. Unequal star masses. // *Astrophys. J.* — 1977. — Vol. 216. — P. 883–907.
17. *Cohn H., Kulsrud R. M.* The stellar distribution around a black hole: numerical integration of the Fokker-Planck equation. // *Astrophys. J.* — 1978. — Vol. 226. — P. 1087–1108.
18. *Vasiliev E.* A New Fokker-Planck Approach for the Relaxation-driven Evolution of Galactic Nuclei // *Astrophys. J.* — 2017. — Vol. 848, no. 1. — P. 10. — arXiv: 1709.04467 [astro-ph.GA].

19. *Murphy B. W., Cohn H. N., Durisen R. H.* Dynamical and Luminosity Evolution of Active Galactic Nuclei: Models with a Mass Spectrum // *Astrophys. J.* — 1991. — Vol. 370. — P. 60.
20. *Spitzer Lyman J., Harm R.* Evaporation of Stars from Isolated Clusters. // *Astrophys. J.* — 1958. — Vol. 127. — P. 544.
21. *King I.* The escape of stars from clusters. V. The basic escape rate // *Astron. J.* — 1960. — Vol. 65. — P. 122.
22. *Rosenbluth M. N., MacDonald W. M., Judd D. L.* Fokker-Planck Equation for an Inverse-Square Force // *Phys. Rev.* — 1957. — Vol. 107, issue 1. — P. 1–6.
23. *Merritt D.* Dynamics and Evolution of Galactic Nuclei. — 2013.
24. *Cohn H.* Numerical integration of the Fokker-Planck equation and the evolution of star clusters // *Astrophys. J.* — 1979. — Vol. 234. — P. 1036–1053.
25. *Merritt D.* Loss-cone dynamics // *Classical and Quantum Gravity.* — 2013. — Vol. 30, no. 24. — P. 244005. — arXiv: 1307.3268 [astro-ph.GA].
26. *Chernoff D. F., Weinberg M. D.* Evolution of Globular Clusters in the Galaxy // *Astrophys. J.* — 1990. — Vol. 351. — P. 121.
27. *Cohn H.* Late core collapse in star clusters and the gravothermal instability // *Astrophys. J.* — 1980. — Vol. 242. — P. 765–771.
28. *Chang J. S., Cooper G.* A Practical Difference Scheme for Fokker-Planck Equations // *Journal of Computational Physics.* — 1970. — Vol. 6, no. 1. — P. 1–16.
29. *Lynden-Bell D., Wood R.* The gravo-thermal catastrophe in isothermal spheres and the onset of red-giant structure for stellar systems // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 1968. — Vol. 138. — P. 495.