Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

УДК 53.01

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТА

КЛАССИЧЕСКОЕ СЕЧЕНИЕ РЕКОМБИНАЦИИ ЧАСТИЦЫ В КУЛОНОВСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ ПРИТЯЖЕНИЯ

Научный руководитель ______________ К. М. Белоцкий

Выполнил ______________ Д. С. Калашников

Москва 2020

Содержание

Введение

В настоящей работе проводилось исследование сечения рекомбинации электронов в поле кулоновского потенциала притяжения ядра. В дипольном приближении для расчета сечения рекомбинации используются две формулы: основанная на классической физике (1) и квантовой (2). Необходимо четко определить пределы применимости данных формул, а также определить, как квантовая формула переходит в классический случай, исходя из принципа соответствия.

$$\sigma_{\mathtt{cl}} = (4\pi)^{2/5}\pi\frac{\alpha_y^2}{\mu^2}\frac{1}{v^{14/5}}, \tag{1}$$

$$\sigma_{\mathtt{q}} = \frac{32\pi}{3\sqrt{3}}\frac{\alpha_y^3}{\mu^2}\frac{\ln(v^{-1})}{v^2}. \tag{2}$$

Работа была разбита на следующие задачи:

1. Ознакомление со статьей [1], в которой было получено ограничение на начальную относительную скорость движения частиц, при котором применима классическая формула: $v \ll \alpha_y^{\frac{5}{2}}$.

2. Ознакомление с выводом классической формулы (1), полученным в статье [3] Елютиным. Получение условий, при которых применима данная формула.

3. Ознакомление с выводом классической формулы (1), полученным в учебнике по Теории поля Ландау и Лифшица [5]. Получение условий, при которых этот вывод применим.

4. Оценка пределов применимости формулы классического сечения рекомбинации.

5. Ознакомление с выводом формулы для квантового приближения (2), полученным в статье Крамерса [2]. Определение пределов ее применимости с учетом вывода.

6. Нахождение условий, при которых выполняется принцип соответствия.

1 Формула для классического сечения рекомбинации

1.1 Вывод классического сечения в статье Елютина

Чтобы определить пределы применимости классического сечения рекомбинации, необходимо понимать физические приближения, использованные при его выводе. Первоначально был рассмотрен вывод классического сечения рекомбинации, произведенный в работе [3].

В выводе активно используется понятие дипольного излучения: в данной модели условием падения является переход кинетической энергии налетающей частицы в дипольное излучение за время ее движения. Для дипольного излучения использовалась формула Лармора (3):

$$I = \frac{2e^2}{3c^3}(\ddot{r})^2. \tag{3}$$

Это представление применимо при характерном размере системы много меньше длинны излучаемой волны и скорости много меньшей скорости света:

1. $\lambda \ll r$,
2. $v \ll 1$.

Иначе это условие можно охарактеризовать так: излучаемый свет может быть рассмотрен как плоская волна.

Также при вычислении интеграла (4), соответствующего потере энергии на излучение, было произведено пренебрежение изменением траектории частицы от параболической.

$$E_{-} = -\beta^2\gamma \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{r^4(t)}. \tag{4}$$

Условие на скорость выполняется как для классического, так и для квантового сечения рекомбинации, скорость налета частиц много меньше скорости света. По этому условию классическая формула сечения рекомбинации будет применима тогда же, когда и формула для квантового приближения. Из данных выкладок можно сделать вывод: применимость классической формулы (1) будет зависеть от характерного размера системы зарядов, а также от длинны волны излучаемого света.

1.2 Вывод классической формулы в теории поля Ландау

Классическую формулу (1) также можно получить исходя из рассуждений, представленных в [5]. Для проверки представленных выше выкладок, необходимо провести оценку условий применимости этих рассуждений.

Рассматривается поле системы зарядов на расстояниях, далеких от самой системы. $\mathbf{R} \approx R_0 - \mathbf{nr}$. Для этого необходимо выполнение двух условий: $a_0 \ll r, \quad \lambda \ll r$ Поле, создаваемое движущимися зарядами, может быть описано с помощью формул для запаздывающих потенциалов:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{R_0}\int \rho_{t-R_0/c+\mathbf{rn}/c} dV \\ \mathbf{A} &= \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t-R_0/c+\mathbf{rn}/c} dV \end{aligned} \tag{5}$$

Также пренебрежем временем $\dfrac{\mathbf{rn}}{c}$ в подынтегральном выражении. Это можно сделать, если характерные размеры системы будут меньше длинны излучаемого света. Это условие можно представить иначе: $v \ll c$. Данное приближение называется *дипольным* и для него характерна простая форма записи магнитного поля:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}] = \frac{1}{c^2 R_0}\frac{d}{dt}\int \rho_{t-R_0/c}\mathbf{v} dV = \frac{1}{c^2 R_0}\frac{d}{dt}\sum e\mathbf{v} = \frac{1}{c^2 R_0}[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}] \tag{6}$$

В этом приближении находят вектор Пойнтинга в плоской волне $\mathbf{S} = c\frac{H^2}{4\pi}\mathbf{n}$. Интенсивность излучения dI на элемент телесного угла do определяется как количество энергии, проходящей через элемент шаровой поверхности $df = R_0^2 do$ с центром в начале координат и радиуса R_0. То есть интенсивность:

$$dI = c\frac{H^2}{4\pi}R_0^2 do. \tag{7}$$

Далее в полученную формулу подставляем поле и векторный потенциал (6) нашей системы зарядов, интегрируем по телесному углу:

$$I = \frac{2}{3c^3}\ddot{\vec{d}}^2. \tag{8}$$

Ограничения на эти выкладки такие же, как в статье [3]. Скорость меньше скорости света. Также присутствует условие на измерение поля в волновой зоне, которому в данной работе применения найдено не было.

Данные выкладки показывают, что применимость данной формулы сильно ограничена: не учитываются поправки в излучение, связанные магнитным моментом, квадрупольным моментом, которые при близких расстояниях будут играть важную роль. Также не позволит использовать формулу (1) для релятивистских частиц ограничение на скорость налетающих частиц.

1.3 Оценка характерного размера системы

Чтобы рассмотреть первое условие, определим характерный размер системы. Будем рассматривать нашу систему как диполь, тогда ее характерный размер a_0 — расстояние между частицами l, когда поле притяжения оказывает влияние на частицу соизмеримое с кинетической энергией $E_k \sim \alpha_y / r$. Из закона сохранения энергии и этого соотношения получаем оценку для размера системы:

$$a_0 = \frac{2\alpha}{mv^2}. \tag{9}$$

Данный характерный размер системы является размерным коэффициентом в формуле Резерфорда.

2 Формула для квантового приближения

2.1 Вывод формулы из статьи Крамерса

Вывод в статье Крамерса основан на классической формуле потерь энергии свободного электрона, падающего на положительно заряженное ядро. Для эллиптической траектории рассчитываются компоненты ускорения электрона при падении, эти компоненты подставляются в формулу для дипольного излучения (8). Далее полагается, что потеря энергии электрона происходит посредством выброса кванта монохроматического света $h\nu$. Электрон при этом либо продолжит свободное движение, либо перейдет в связанное с ядром состояние, описанное теорией Бора. Полагается, что определенные интервалы частот в излученном свете в классической формуле соотносятся с процессами, в которых электрон переходит в определенное стационарное состояние. Определяется разность частот между двумя близкими состояниями:

$$\Delta\nu \sim \frac{2\pi^2 N^2 e^4 m}{h^3}\Big(\frac{1}{(n-1/2)^2} - \frac{1}{(n+1/2)^2}\Big) \sim \frac{4\pi^2 N^2 e^4 m}{n^3 h^3} \tag{10}$$

В статье Крамерса [2] не дается формула (2) в таком виде. В статье можно найти выкладки для расчета сечения эффективного сечения β, вид которого не похож на приведенную формулу. В статье приведены положения, которые могут быть использованы для получения искомой формулы. Исходя из выражения для σ_n – сечение рекомбинации определенным уровнем (на определенный уровень) [3]:

$$\sigma_n = \frac{32\pi\alpha^3 a_0^2}{3\sqrt{3}} \frac{\omega_0}{\omega(\omega - \omega_0 n^{-2})} \frac{1}{n^3} \tag{11}$$

Просуммировав по n от 1 до $+\infty$ можно получить полное сечение рекомбинации. В данной формуле ω – частота фотона, выпущенного при рекомбинации, а ω_0 – деленная на $\hbar$, – энергия связи основного состояния. Повторить данную выкладку не удалось, неясно, как были определены частоты выпущенного фотона.

$$\sigma_q = \frac{32\pi}{3\sqrt{3}} \cdot \alpha r_0^2 Z^2 c^2 \cdot \frac{\ln \dfrac{Zc\alpha}{v}}{v^2} \tag{12}$$

Вывод в статье Крамерса не был до конца понят, в связи с чем не получилось вывести какие-либо ограничения применимости для данной формулы. В статье указаны следующие условия: отклонение момента частицы от классической траектории должно быть мало, скорость налетающего электрона много меньше скорости света. Также в статье указано, что частота излучаемого света должна соответствовать частоте перехода между связанными состояниям, это условие может быть нарушено в периодической системе.

2.2 Излучение в кулоновском поле в книге А. Мессии

После выкладок в статье Крамерса была предпринята попытка получения сечения рекомбинации из решения уравнения Шредингера для атома водорода. Предполагалось, что гамильтониан системы представляет собой гамильтониан атома водорода и потенциал притяжения кулона. А пси-функция, должна иметь асимптотический вид:

$$\Psi = e^{ikz} + f(r, \phi) e^{i\mathbf{kr}} \tag{13}$$

Первое слагаемое соответствовало налетающему потоку электронов, второе – рассеянной на потенциале волне.

В уравнении на Ψ можно избавиться от зависимости от углов, если искать решение в виде $\Psi = R_{nl}(r) Y_{lm}(\phi, \theta)$, где Y – сферическая функция. Тогда для R_{kl} получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} R_{kl} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2} U(r)\right] R_{kl} = 0 \tag{14}$$

В поисках решения этого нетривиального уравнения, была обнаружена полезная информация о рассмотрении излучения частиц в центрально-симметричном потенциале. В книге Альберта Мессиа [6] описан метод расчета эффективного сечения в центрально-симметричном потенциале. Первичный подход очень похож на приведенный мною выше: рассматривается уравнение Шредингера, содержащее возмущающий потенциал (15)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(r)\right]\Psi = E\Psi. \tag{15}$$

На бесконечности берется асимптотика, где первое слагаемое соответствует налетающей частице, а второе потоку рассеянных частиц:

$$e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{i\mathbf{kr}} \tag{16}$$

Из такой интерпретации можно найти число частиц, рассеянное в элемент телесного угла: $\frac{\hbar k}{m} |f(\theta)|^2 do$. Поделив это выражение на величину первоначального потока, получим эффективное сечение: $d\sigma = |f(\theta)|^2 do$

Решение уравнения Шредингера в центрально-симметричном поле, не зависящем от угла, ϕ представляется в виде ряда $\Psi = \sum A_l P_l(\cos\theta) R_{kl}(r)$, где R_{kl} радиальная функция, удовлетворяющая уравнению (14). Нет необходимости решать уравнение во всей области, нужно лишь получить его асимптотический вид. Асимптотический вид для радиальных функций от потенциала $U(r) \sim 1/r^n$, где n>1, может быть дан следующим образом:

$$R_{kl} \approx \frac{2}{r} \sin(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l), \text{ где } \delta_l \text{— фазовый сдвиг функции } R_{kl} \tag{17}$$

Используя асимптотическую форму на бесконечности, можно определить константу $A_l = \frac{1}{2k}(2l+1) i^l \exp(2i\delta_l)$. Вывод не привожу. Исходя из вида Ψ, находим выражение для функции f(θ)

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum (2l+1)(e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos\phi). \tag{18}$$

Тогда эффективное сечение:

$$\sigma = 2\pi \int\limits_0^\pi |f(\theta)|^2 \sin\theta d\theta = 2\pi \int\limits_0^\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)^2}{2k^2} (\sin\delta_l)^2 P_l^2(\cos\theta) \sin\theta d\theta, \tag{19}$$

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l.$$

Под суммой находится парциальное сечение – шанс рекомбинации частицы с определенным моментом l. Для этого парциального сечения в книге [4] получен предельный переход к классическим сечениям. Рассмотрим сумму данных парциальных сечений для интервала квантового числа Δl, при достаточно больших значениях l:

$$\sum_{\Delta l} \sigma_l \approx \frac{\pi}{k^2} \cdot 2l\Delta l \;\; = \;\; 2\pi \frac{l\hbar^2}{p^2} \Delta l \; \cdot \tag{20}$$

Если заменить в этом выражении момент $M = \hbar l$ классической формулой ρp, где ρ— прицельный параметр, то получится классическое выражение $\Delta\sigma = 2\pi\rho\Delta\rho$. Данную выкладку можно трактовать как переход к классическому движению частицы при достаточно больших значениях момента l.

Данная формула имеет ограниченную применимость: только для потенциалов убывающих на бесконечность быстрее чем 1/r. Возникает вопрос применения этих формул для потенциала Кулона.

2.3 Асимптотические выражения радиальных функций для потенциала Кулона

При использовании потенциала 1/r асимптотические выражения для радиальных функций отличаются. В книге [4] рассмотрен вывод асимптотики радиальных функций в таком потенциале:

$$\begin{gathered} R_{nl} \sim \tfrac{2}{r} \sin(kr + \tfrac{1}{k} \ln 2kr - \tfrac{l\pi}{2} + \delta_l), \\ \delta_l = arg\Gamma\left(l + 1 - \frac{i}{k}\right), \quad \text{или} \quad \exp 2i\delta_l = \frac{\Gamma(l+1-i/k)}{\Gamma(l+1+i/k)}. \end{gathered} \tag{21}$$

Член с натуральным логарифмом связан с тем, что потенциал 1/r искажает плоскую волну даже на больших расстояниях. Исходя из данных выкладок и формулы (18), несложно получить амплитуду рассеяния:

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum (2l+1) \Big(\frac{\Gamma(l+1-i/k)}{\Gamma(l+1+i/k)} - 1 \Big) P_l(\cos\phi). \tag{22}$$

В дальнейшем исходя из этого метода, необходимо будет найти эффективное сечение, проинтегрировав квадрат модуля данной амплитуды по телесному углу. Также данные выкладки никак не используют дипольное приближение, а значит будут отличаться от формулы (2).

3 Заключение

В работе было получено ограничение на пределы применимости классической формулы для сечения рекомбинации. Однако, параметром в пределе применимости выступает длина волны излучаемого света. В дальнейшем необходимо получить ограничения, зависящие только от характеристик налетающего потока частиц.

$$v \ll c \quad \lambda \ll r \quad \frac{2\alpha}{mv^2} \ll r. \tag{23}$$

Были изучены источники, посвященные выводу формул в квантовом приближении (2). Изложенный в нем вывод формулы (2) сжат и не наводит на какие–либо пределы применимости данной формулы. В дальнейшем необходимо найти источник с конкретными формулировками вывода данной формулы.

Были изучены источники [4] и [6], в которых рассматривается излучение заряженных частиц на водородоподобном атоме в квантовой механике. В них используется асимптотический вид радиальных функций на бесконечности для получения сечения рассеяния частиц. В дальнейшем необходимо применить методы, изложенные в данных источниках, в дипольном приближении. Исходя из выкладок (20), условие использования классической формулы – достаточно большая величина момента. Неясным остается вопрос: почему классическая формула не должна работать при малой величине момента l.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Belotsky K. M.*, *Esipova E. A.*, *Kirillov A. A.* On the classical description of the recombination of dark matter particles with a Coulomb-like interaction // Phys. Lett. — 2016. — Vol. B761. — P. 81–86.
2. *Kramers H. A.* XCIII. On the theory of X-ray absorption and of the continuous X-ray spectrum // Philosophical Magazine Series 6. — 1923. — т. 46,
3. *Елютин П. В.* Классическое сечение рекомбинации // Теоретическая и математическая физика. — Москва, 1978. — т. 34, — с. 180—184.
4. *Ландау Л.*, *Лифшиц Е.* Квантовая механика (нерелятивистская теория). — М. : Физматлит, 2004.
5. *Ландау Л.*, *Лифшиц Е.* Теория поля. — М. : Физматлит, 2012.
6. *Мессиа А.* Квантовая механика. — Наука, 1978.