ОТЧЕТ О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТА

КЛАССИЧЕСКОЕ СЕЧЕНИЕ РЕКОМБИНАЦИИ ЧАСТИЦЫ В КУЛОНОВСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ ПРИТЯЖЕНИЯ

Научный руководитель К. М. Белоцкий

Выполнил Д. С. Калашников

Москва 2020

Введение

Рекомбинация - процесс падения одной частицы на другую, с дальнейшим изменением их состава.

$$v \ll \alpha_y^{\frac{5}{2}}$$

$$\sigma_{cl} = (4\pi)^{\frac{2}{5}} \pi \frac{\alpha_y^2}{\mu^2} \frac{1}{v^{\frac{14}{5}}}, \tag{1}$$

$$\sigma_{qu} = \frac{32\pi}{3\sqrt{3}} \frac{\alpha_y^3}{\mu^2} \frac{\ln(v^{-1})}{v^2}. \tag{2}$$

Цель — исследовать пределы применимости классической и квантовой формулы, найти пределы, в которых выполняется принцип соответствия.

Задачи

1. Ознакомление со статьей [1], в которой было получено ограничение на начальную относительную скорость движения частиц, при котором применима классическая формула: $v \ll \alpha_{\gamma}^{\frac{5}{2}}$.
2. Ознакомление с выводом классической формулы (1), полученным в статье [3] Елютиным. Получение условий, при которых применима данная формула.
3. Ознакомление с выводом формулы для дипольного излучения (1), полученной в учебнике по Теории поля Ландау и Лифшица [5]. Получение условий, при которых этот вывод применим.

Задачи

4. Оценка пределов применимости формулы классического сечения рекомбинации.
5. Ознакомление с выводом формулы для квантового приближения (2), полученным в статье Крамерса [2]. Определение пределов ее применимости с учетом вывода.
6. Нахождение условий, при которых выполняется принцип соответствия.

Вывод классической формулы по Елютину

$$I = \frac{2e^2}{3c^3}(\ddot{r})^2. \tag{3}$$

В выводе были использованы приближения, которые накладывают следующие ограничения:

1. $M \gg \hbar$
2. $v \ll c$, начальная относительная скорость движения частиц много меньше скорости света.

Пределы применимости дипольного излучения во 2 томе Ландау

Излучаемую волну можно представить как плоскую, а также скорость частиц, должна быть меньше скорости света $\lambda \ll r$ и $a_0 \ll r$, характерный размер системы и длинны излучаемой волны много меньше расстояний, на которых измеряется поле (то есть волновая зона).
Применимость классической формулы сильно ограничена: не учитываются поправки в излучение, связанные магнитным моментом, квадрупольным моментом, которые при близких расстояниях будут играть важную роль. Также не позволит использовать формулу (1) для релятивистских частиц ограничение на скорость налетающих частиц.

Оценка характерного размера

Закон сохранения энергии (4):

$$\frac{\mu v'^2}{2} + \frac{\alpha}{a_0} = \frac{\mu v^2}{2}. \tag{4}$$

Условие нахождение характерного размера системы (5):

$$\frac{\mu v'^2}{2} \sim \frac{2\alpha}{a_0}. \tag{5}$$

Получим оценку на a_0 подставив (5) в (4):

$$a_0 \sim \frac{\alpha}{\mu v^2}. \tag{6}$$

Вывод формулы в квантовом приближении. Изучение статьи Крамерса.

Вывод в статье Крамерса основан на классической формуле потерь энергии свободного электрона, падающего на положительно заряженное ядро. Полагается, что потеря энергии электрона происходит посредством выброса кванта монохроматического света $h\nu$. Электрон при этом либо продолжит свободное движение, либо перейдет в связанное с ядром состояние, описанное теорией Бора.

Вывод формулы в квантовом приближении. Изучение статьи Крамерса.

В статье Крамерса [2] не дается формула (2) в таком виде. В статье можно найти выкладки для расчета сечения эффективного сечения β, вид которого не похож на приведенную формулу.

$$\beta = \frac{128\pi^4 N^4 e^{10}}{3\sqrt{3}c^3 m h^4 v^2 n^3 \nu} \tag{7}$$

В связи с этим возникает вопрос, как иначе вывести формулу

Излучение в кулоновском поле в книге А. Мессии

Задача рассеяния в кулоновском поле в квантовой механике может быть разрешена исходя из решения соответствующего уравнения Шредингера. Решение данного уравнения на бесконечности должно иметь асимптотический вид, где первое слагаемое соответствует плоской налетающей волне, а второе рассеянной на потенциале сферической волне.

$$e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{i\mathrm{kr}} \tag{8}$$

$f(\theta)$– называют амплитуду рассеяния, через нее можно получить выражения для эффективного сечения:

$$dP = v\frac{|f(\theta)|^2}{r^2}dS = v|f(\theta)|^2 do \Rightarrow d\sigma = |f(\theta)|^2 do \tag{9}$$

Излучение в кулоновском поле в книге А. Мессии

Задача о нахождении сечения сводится к задаче нахождения вида функции $f(\theta)$ или определения асимптотического поведения решения уравнения Шредингера на бесконечности. Данный метод работает лишь при достаточно быстром убывании потенциала к бесконечности(быстрее чем 1/r). В третьем томе Ландау и Лифшица [4] были найдены необходимые преобразования, с помощью которых можно расширить данную теорию на потенциал Кулона: в показатели падающей и рассеянной волны добавляется слагаемое, связанное с влиянием потенциала на волну даже на больших расстояниях.

$$e^{i(kz+ln(2kr)/k)} + \frac{f(\theta)}{r} e^{i(\mathrm{kr}+ln(2kr)/k)} \tag{10}$$

Фазовые сдвиги радиальной составляющей решения

Ψ-функция, решение задачи в центрально симметричном поле, может быть представлена в виде $\Psi = \sum A_l R_{kl}(r) P_l(\theta)$. Функция R_{kl} подчиняется уравнению для радиальной составляющей:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}R_{kl} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m\alpha}{\hbar^2 r}\right]R_{kl} = 0 \qquad (11)$$

Решение этого уравнения – гипергеометрическая функция. Но нас интересует лишь ее асимптотическое поведение на бесконечности:

$$R_{nl} \sim \tfrac{2}{r}\sin(kr + \tfrac{1}{k}\ln 2kr - \tfrac{l\pi}{2} + \delta_l),$$
$$\delta_l = arg\Gamma\left(l + 1 - \frac{i}{k}\right), \quad \text{или} \quad \exp 2i\delta_l = \frac{\Gamma(l+1-i/k)}{\Gamma(l+1+i/k)}. \qquad (12)$$

Фазовые сдвиги радиальной составляющей решения

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum (2l+1) \left(\frac{\Gamma(l+1-i/k)}{\Gamma(l+1+i/k)} - 1 \right) P_l(\cos\phi). \qquad (13)$$

В дальнейшем исходя из этого метода, необходимо будет найти эффективное сечение, проинтегрировав квадрат модуля данной амплитуды по телесному углу. Также данные выкладки никак не используют дипольное приближение, а значит будут отличаться от формулы (2).

Заключение

1. ограничение на пределы применимости классической формулы для сечения рекомбинации

$$v \ll c \quad \lambda \ll r \quad \frac{2\alpha}{mv^2} \ll r. \tag{14}$$

   В дальнейшем необходимо получить ограничения, зависящие только от характеристик налетающего потока частиц.

2. Изучена работа Крамерса [2]. Изложенный в нем вывод формулы (2) сжат и не наводит на какие–либо пределы применимости данной формулы. В дальнейшем необходимо найти источник с конкретными формулировками вывода данной формулы.

Заключение

3. Были изучены источники [4] и [6]. В дальнейшем необходимо применить методы, изложенные в данных источниках, в дипольном приближении.

Спасибо за внимание!