

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

УДК 539.123

**ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К БАКАЛАВРСКОЙ ДИПЛОМНОЙ РАБОТЕ
АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ
РЕАКТОРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ СО СРЕДНЕЙ БАЗОЙ
К ИЕРАРХИИ МАСС НЕЙТРИНО**

Студент _____ Д. В. Попов

Научный руководитель,
к.ф.-м.н. _____ О. А. Титов

Москва 2020

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

**АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ
РЕАКТОРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ СО СРЕДНЕЙ БАЗОЙ
К ИЕРАРХИИ МАСС НЕЙТРИНО**

Студент _____ Д. В. Попов

Научный руководитель,
к.ф.-м.н. _____ О. А. Титов

Рецензент _____ А. Ю. Оралбаев

Секретарь ГЭК,
к.ф.-м.н. _____ А. А. Кириллов

Зав. каф. №40,
д.ф.-м.н., проф. _____ М. Д. Скорохватов

РЕФЕРАТ

Отчет 67 с., 1 кн., 34 рис., 7 табл., 22 источн., 1 прил.

АНТИНЕЙТРИНО, ФИЗИКА НЕЙТРИНО, ИЕРАРХИЯ МАСС НЕЙТРИНО,
ОСЦИЛЛЯЦИИ НЕЙТРИНО, ЭКСПЕРИМЕНТ JUNO, РЕАКТОРНЫЕ
НЕЙТРИННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Объектом исследования является осцилляционный реакторный нейтринный эксперимент.

Цель работы — анализ чувствительности реакторного эксперимента к эволюции топливного состава реактора, энергетическому разрешению детектора, спектральным искажениям, иерархии масс нейтрино.

Использованные методы и инструментарий — методы статистического анализа данных на основе критерия χ^2 , численные методы, метод Монте–Карло, пакет объектно-ориентированных программ и библиотек ROOT.

В результате исследования было создано программное обеспечение, моделирующее реакторный эксперимент в простейшем приближении, были описаны и предложены методики определения иерархии масс нейтрино, проведено сравнение их эффективностей.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1 Масса нейтрино и осцилляции	6
2 Реакторные эксперименты	13
2.1 Реакторные антинейтрино и их регистрация	13
2.2 Эксперимент JUNO	19
3 Анализ чувствительности эксперимента JUNO к иерархии масс	21
3.1 Влияние осцилляций на спектр реакторных антинейтрино .	21
3.2 Влияние осцилляций на спектр ОБР	23
3.3 Влияние функции отклика детектора	26
4 Спектральный анализ	30
4.1 Преобразование Фурье	30
4.2 Преобразование Ломба–Скэргла	33
4.3 Влияние спектральных искажений	35
5 Математическое моделирование	40
5.1 Модель реакторного спектра	40
5.2 Модель позитронного спектра	43
5.3 Метод Монте–Карло	45
6 Статистический анализ	47
Заключение	57
Список использованных источников	59
Приложение А. Вычисление сечения ОБР в ”наивном” приближении	62

ВВЕДЕНИЕ

Явление нейтринных осцилляций — перехода нейтрино одного сорта (электронного, мюонного или тау-нейтрино) в нейтрино других сортов — активно исследовалось в последние два десятилетия и неоднократно наблюдалось в различных экспериментах. Особое внимание к осцилляциям вызвано тем, что они напрямую свидетельствуют о наличии у нейтрино ненулевой массы, а также тесно связаны с возможным CP-нарушением в лептонном секторе Стандартной модели (далее — СМ).

На данный момент измерены основные параметры осцилляций: углы смешивания и разности квадратов масс. Открытым, однако, остаётся вопрос иерархии: тяжелее или легче одно из массовых состояний, чем два других? Решение этой проблемы важно по следующим причинам:

- 1) Нейтрино являются единственными известными фундаментальными частицами, чьи массы до сих пор не определены;
- 2) СМ по своему построению не описывает наличие у нейтрино массы, что является дополнительным аргументом в пользу необходимости её расширения;
- 3) Как было отмечено выше, большой интерес представляет проблема возможного CP-нарушения в лептонном секторе [1, 2, 3] — изучение нейтринных осцилляций может позволить её разрешить, так как одним из параметров теоретической модели осцилляций является так называемая дираковская CP-фаза, неравенство нулю которой приводит к CP-нарушению;
- 4) Нейтрино в силу своей высокой проникающей способности переносит информацию от удаленных объектов практически без искажения, что является достаточно мощным инструментом для астрофизики и космологии [2]. К примеру, процессы, происходящие в ядрах сверхновых во время взрыва, достаточно мало изучены. Рожденные в них нейтрино уносят большую часть энергии, чем фотоны в наблюдаемом диапазоне, и долетают до Земли быстрее последних. Эффект осцил-

лящий играет здесь значимую роль, так как явным образом зависит от энергии нейтрино и пройденного им расстояния;

Иерархию масс планируется определить в экспериментах нового поколения, в частности, в реакторном эксперименте JUNO с расстоянием до детектора порядка 50 км [3, 4, 5]. Регистрация антинейтрино от реактора осуществляется по реакции обратного бета-распада (далее – ОБР). Энергетическое разрешение детектора JUNO 3% для энергии 1 МэВ позволит определить иерархию с достаточным уровнем статистической значимости, однако даже незначительное отклонение разрешения от заявленного может существенно ухудшить результаты 6-летней работы.

Особую роль в реакторном эксперименте играет эволюция топливно-го состава реактора, и, как следствие, реакторных антинейтринных спектров со временем [6, 7, 8, 9]. Данный процесс вместе с функцией отклика детектора будет искажать экспериментальные данные, что в свою очередь может отразиться на достоверности полученных результатов.

В недавних работах [5, 10] обсуждалось влияние неопределенностей спектров реакторных антинейтрино на чувствительность реакторных экспериментов — эффекты, связанные с кулоновским взаимодействием β -электронов приводят к определенным ”пилообразным” особенностям антинейтринного спектра, масштаб которых сопоставим с масштабом осцилляций. Это явление также может вносить вклад в определение иерархии.

Целью работы является анализ чувствительности реакторного эксперимента JUNO к энергетическому разрешению детектора, топливному составу реактора и спектральным искажениям реакторных антинейтринных спектров. Важной задачей является рассмотрение эффективности уже имеющихся способов обработки экспериментальных данных и предложение новых, сравнение их между собой. Помимо этого, в работе обсуждаются теоретические модели масс нейтрино и их непосредственная взаимосвязь с осцилляциями, дополнительное внимание уделено реакции обратного бета-распада — ключевому процессу реакторного нейтринного эксперимента.

1. МАССА НЕЙТРИНО И ОСЦИЛЛЯЦИИ

В СМ $U_Y(1) \otimes SU_L(2) \otimes SU(3)$ генерация масс фермионов описывается юкавским взаимодействием фермионных полей со скалярным полем Хиггса. Массы нейтрино в данной электрослабой теории равны нулю по ее построению, основанному на эмпирических соображениях – майорановская масса противоречит эмпирическому закону сохранения лептонного числа, наличие же дираковской массы ограничено отсутствием наблюдаемых правых нейтрино и левых антинейтрино на эксперименте. Несмотря на это, открытые экспериментально нейтринные осцилляции могут возникать лишь при ненулевых массах нейтрино, что будет показано ниже.

Рассмотрим лептонный сектор СМ $U_Y(1) \otimes SU_L(2)$. В теорию можно ввести дираковскую массу [2]

$$\mathcal{L}_m^{(D)} = \bar{\nu}_L \mathcal{M}_D \nu_R + \text{h.c.}, \quad (1.1)$$

где h.c. означает эрмитовски сопряженное, $\nu_L = (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)_L$, \mathcal{M}_D – матрица 3×3 дираковских масс. Возникновение такого слагаемого нарушает инвариантность лагранжиана относительно киральных преобразований – в свободной эволюции нейтрино становятся возможны переходы со сменой киральности, что, как было отмечено выше, противоречит наблюдениям.

Другой способ – введение майорановских масс [2]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m^{(MR)} &= -\frac{1}{2} (\bar{\nu}_R^C \mathcal{M}_{MR} \nu_R) + \text{h.c.}, \\ \mathcal{L}_m^{(ML)} &= -\frac{1}{2} (\bar{\nu}_L^C \mathcal{M}_{ML} \nu_L) + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\nu_{L,R}^C = \mathbf{C} \nu_{L,R}$, \mathbf{C} – оператор зарядового сопряжения. ν_L^C при этом имеет правую спиральность, ν_R^C – левую. В майорановском случае нейтрино являются истинно нейтральными частицами, киральность сохраняется, но

возможны переходы с несохранением лептонного числа, появляются новые реакции, например, двойной безнейтринный бета-распад.

В наиболее общем виде введем массу нейтрино в теорию как сумму дираковского и майорановских слагаемых:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_m &= -\bar{\nu}_L \mathcal{M}_D \nu_R - \frac{1}{2} (\bar{\nu}_R^C \mathcal{M}_{MR} \nu_R) - \frac{1}{2} (\bar{\nu}_L^C \mathcal{M}_{ML} \nu_L) + \text{h.c.} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{\nu}_R^C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{LM} & \mathcal{M}_D \\ \mathcal{M}_D^T & \mathcal{M}_{RM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^C \\ \nu_R \end{pmatrix} + \text{h.c.} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{\nu}_R^C \end{pmatrix} \mathcal{M} \begin{pmatrix} \nu_L^C \\ \nu_R \end{pmatrix} + \text{h.c.}, \tag{1.3}
\end{aligned}$$

где \mathcal{M}_D – матрица 3×3 дираковских масс, $\mathcal{M}_{LM, RM}$ – матрица 3×3 левых (правых) майорановских масс. В общем случае 6×6 матрица \mathcal{M} не является диагональной – состояния смешиваются, в лагранжиане появляются новые слагаемые, например, $-m_{e\mu}(\bar{\nu}_{eL}\nu_{\mu L}^C + \bar{\nu}_{\mu L}^C\nu_{eL})$ – возможны переходы нейтрино одного флейвора в нейтрино другого, то есть осцилляции. По той же причине недиагональности матрицы у нейтрино с определенным флейвором нет определенной массы.

Матрицу \mathcal{M} можно привести к диагональному виду преобразованием следующего вида [2]

$$\begin{pmatrix} U & R \\ S & V \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{LM} & \mathcal{M}_D \\ \mathcal{M}_D^T & \mathcal{M}_{RM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & R \\ S & V \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_L & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_R \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

где $\mathcal{M}_L = \text{diag}(m_1, m_2, m_3)$, $\mathcal{M}_R = \text{diag}(M_1, M_2, M_3)$. Матрицы U, R, S, V должны подчиняться следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
U U^\dagger + R R^\dagger &= S S^\dagger + V V^\dagger = 1, \\
U^\dagger U + S^\dagger S &= R^\dagger R + V^\dagger V = 1, \\
U S^\dagger + R V^\dagger &= U^\dagger R + S^\dagger V = 0. \tag{1.5}
\end{aligned}$$

После диагонализации лагранжиан (1.3) примет вид

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}'_L & \bar{\nu}'_R^C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{M}_L & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu'_L{}^C \\ \nu'_R \end{pmatrix} + \text{h.c.}, \tag{1.6}$$

где $\nu'_L = U^\dagger \nu_L + S^\dagger \nu_R^C$ и $\nu'_R = R^T \nu_L^C + V^T \nu_R$.

Вводя поле

$$\nu' = \begin{pmatrix} \nu'_L \\ \nu'_R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu'_L^C \\ \nu'_R^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \\ \nu_{3L} \\ \nu_{1R} \\ \nu_{2R} \\ \nu_{3R} \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

представим лагранжиан (1.6) следующим образом:

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2} \bar{\nu}' \begin{pmatrix} \mathcal{M}_L & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_R \end{pmatrix} \nu' = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (m_i \bar{\nu}_{iL} \nu_{iL} + M_i \bar{\nu}_{iR} \nu_{iR}). \quad (1.8)$$

Состояния ν_{iL} (ν_{iR}) являются собственными состояниями массовой матрицы, обладают определенной массой m_i (M_i), не имеют определенного флейвора и, так как матрица \mathcal{M} эрмитова, образуют полный базис пространства состояний. Переход от одного представления к другому осуществляется при помощи матриц U , R , S , V :

$$\begin{cases} \nu'_L = U^\dagger \nu_L + S^\dagger \nu_R^C \\ \nu'_R = R^T \nu_L^C + V^T \nu_R \end{cases}, \quad \begin{cases} \nu_L = U \nu'_L + R \nu_R^C \\ \nu_R = S^* \nu_L^C + V^* \nu'_R \end{cases}. \quad (1.9)$$

Правые нейтрино и левые антинейтрино на экспериментах не наблюдаются, что позволяет эффективно упростить вышеизложенную теоретическую модель. Из $\nu_R = 0$ немедленно следует, что $\nu_R^C = 0$. Размерность пространства состояний уменьшается в два раза – от ”двумерного”, описываемого базисом (ν_L, ν_R) , к ”одномерному” с одним базисным вектором ν_L .

Ввиду этого в (1.9) останется лишь

$$\nu'_L = U^\dagger \nu_L, \quad \nu_L = U \nu'_L, \quad (1.10)$$

где $U^\dagger U = 1$, то есть матрица U становится унитарной.

Матрица $U \equiv U_{\text{PMNS}}$ перехода от одного базиса к другому называется матрицей смешивания Понтекорво–Маки–Накагава–Саката. Один из стандартных видов её параметризации [1]:

$$U_{\text{PMNS}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{23} & \sin \theta_{23} \\ 0 & -\sin \theta_{23} & \cos \theta_{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \theta_{13} & 0 & \sin \theta_{13} \cdot e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_{13} \cdot e^{-i\delta} & 0 & \cos \theta_{13} \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} & \sin \theta_{12} & 0 \\ -\sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{i\rho} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Здесь введены шесть параметров – три угла смешивания $\theta_{ij} \in [0; \pi/2]$, комплексная фаза Дирака $\delta \in [0; 2\pi]$ (в случае, если нейтрино – дираковские частицы) и комплексные фазы Майораны $\rho, \sigma \in [0; 2\pi]$ (в случае, если нейтрино – майорановские частицы). Неравенство нулю комплексных фаз приводит к CP-нарушению в лептонном секторе. Майорановские фазы на осцилляции не влияют, что будет показано ниже, поэтому в дальнейшем мы не будем учитывать последний матричный множитель в (1.11) [11].

У углов смешивания θ_{ij} простой геометрический смысл, представленный на рисунке 1.1.

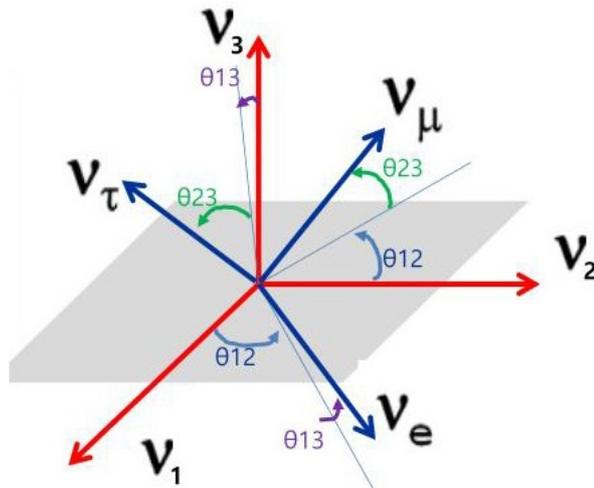


Рисунок 1.1 — Геометрическая интерпретация смешивания нейтринных состояний

Пусть в пространственно-временной точке $x = 0$ родилось электронное нейтрино ν_e с энергией E , то есть $|\psi(0)\rangle = |\nu_e\rangle$. Представим флейворное состояние через массовые, используя матрицу смешивания (1.11): $|\nu_e\rangle = \sum_{j=1}^3 U_{ej} |\nu_j\rangle$. В свободной эволюции состояния $|\nu_j\rangle$ являются квази-стационарными и имеют определенный импульс при определенной массе $p_j = \sqrt{E^2 - m_j^2}$ [11]. Тогда волновую функцию в точке x можно записать как

$$|\psi(x)\rangle = \sum_{j=1}^3 U_{ej} |\nu_j\rangle \cdot e^{-ip_j x}. \quad (1.12)$$

Вероятность того, что детектор в точке x зарегистрирует электронное нейтрино ν_e (обычно её называют вероятностью выживания) есть:

$$P_{ee} = |\mathcal{A}_{ee}|^2 = |\langle \nu_e | \psi(x) \rangle|^2. \quad (1.13)$$

Используя разложения флейворных состояний через массовые с учетом ортогональности последних $\langle \nu_k | \nu_j \rangle = \delta_{kj}$, получим [11]

$$\mathcal{A}_{ee} = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 U_{ek}^* U_{ej} \langle \nu_k | \nu_j \rangle e^{-ip_j x} = \sum_{j=1}^3 |U_{ej}|^2 e^{-ip_j x}. \quad (1.14)$$

Заметим, что в выражение (1.14) входит квадрат модуля элемента матрицы смешивания – дираковская и майорановские фазы конкретно в эту амплитуду не вносят никакого вклада. Подставляя (1.14) в (1.13), используя малость $m_j \ll E$ и полагая скорость распространения нейтрино равной скорости света, получим окончательный ответ [1, 11]:

$$P_{ee} = 1 - \sin^2 2\theta_{13} (\cos^2 \theta_{12} \sin^2 \Delta_{31} + \sin^2 \theta_{12} \sin^2 \Delta_{32}) - \cos^4 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \Delta_{21}, \quad (1.15)$$

где $\Delta_{ij} = 1.267 \cdot \Delta m_{ij}^2 \frac{L}{E}$, $i, j = 1, 2, 3$; $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$ – разность квадратов масс массовых состояний [эВ²]; L – пройденный путь (расстояние от источника до детектора) [км]; E – энергия нейтрино [МэВ].

Поскольку осцилляции не зависят от шкалы масс, неизвестно, в каком соотношении находятся друг к другу сами массы. Гипотезы $m_1, m_2 \ll m_3$ и $m_3 \ll m_1, m_2$ называют нормальной и обратной иерархиями соответственно. Иллюстрация представлена на [рисунке 1.2](#).

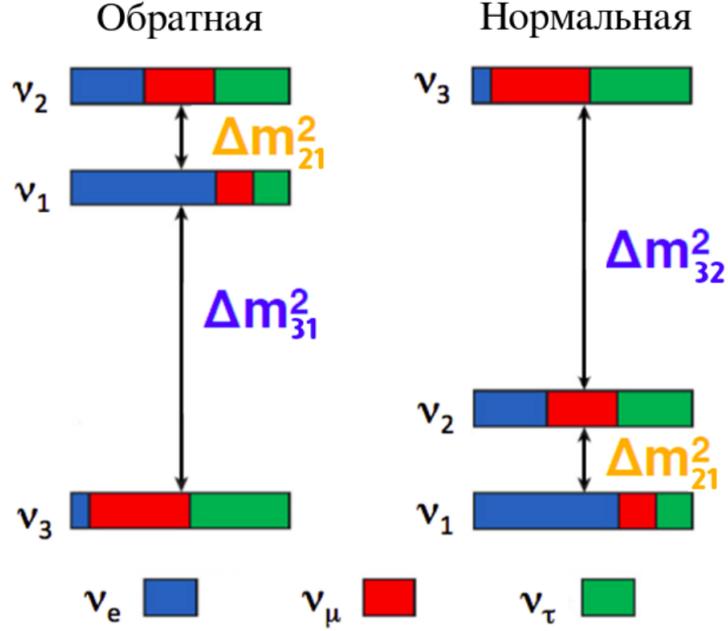


Рисунок 1.2 — Иллюстрация гипотез нормальной и обратной иерархий масс нейтрино

Измеренные на данный момент параметры осцилляций представлены в [таблице 1](#).

Таблица 1 — Параметры осцилляций по данным PDG 2018 [\[12\]](#)

	Нормальная иерархия	Обратная иерархия
$\sin^2 \theta_{12}$	0.307 ± 0.013	
$\sin^2 \theta_{13}$	$(2.12 \pm 0.08) \cdot 10^{-2}$	
$\sin^2 \theta_{23}$	0.417 ± 0.028	0.421 ± 0.033
$\Delta m_{21}^2, \text{эВ}^2$	$(7.53 \pm 0.18) \cdot 10^{-5}$	
$\Delta m_{31}^2, \text{эВ}^2$	$(2.59 \pm 0.08) \cdot 10^{-3}$	$(-2.49 \pm 0.07) \cdot 10^{-3}$
$\Delta m_{32}^2, \text{эВ}^2$	$(2.51 \pm 0.05) \cdot 10^{-3}$	$(-2.56 \pm 0.04) \cdot 10^{-3}$

На [рисунке 1.3](#) представлен график зависимости вероятности выживания от энергии антинейтрино при фиксированном расстоянии от источника до детектора $L = 53$ километра.

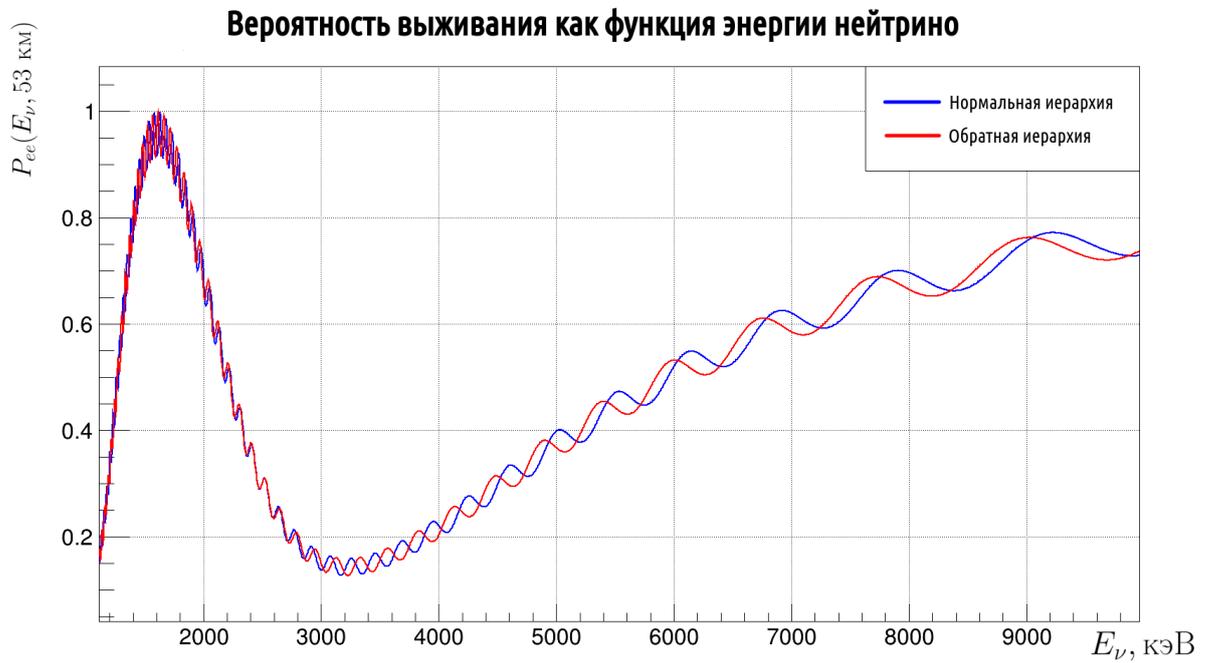


Рисунок 1.3 — Вероятность выживания как функция энергии нейтрино для прямой и обратной иерархий

2. РЕАКТОРНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

2.1. РЕАКТОРНЫЕ АНТИНЕЙТРИНО И ИХ РЕГИСТРАЦИЯ

Впервые возможность использовать ядерные реакторы в качестве чистых и интенсивных источников антинейтрино обсуждал Б.М. Понтекорво. Принцип работы реактора основан на управляемой, самоподдерживающейся цепной реакции деления тяжелых ядер, которая сопровождается выделением энергии. При одном таком делении образуется 2 (бывает и больше) нестабильных осколков с избыточным числом нейтронов, которые претерпевают серию β -распадов для возвращения в долину стабильности. Среднее число β -распадов, испытываемых обоими осколками, равно 6. На 200 МэВ (энергия, выделяемая при одном делении) рождается 6 электронных антинейтрино в диапазоне энергий от 0 до примерно 8 МэВ. В реакторе с тепловой мощностью ≈ 1 ГВт будет рождаться порядка 10^{20} электронных антинейтрино в секунду [13, 14].

Восстановление исходных реакторных спектров антинейтрино является достаточно сложной задачей. Полный спектр представляется как [6, 7, 8, 9]

$$\text{Sp}_\nu(E_\nu) = \sum_i f_i \text{Sp}_i(E_\nu), \quad (2.1)$$

где f_i — число делений i -ого изотопа, а $\text{Sp}_i(E_\nu)$ — соответствующий спектр антинейтрино, нормированный на одно деление.

Тепловая мощность реактора W_{th} связана с параметрами f_i :

$$W_{th} = \sum_i f_i (E_i - E_\nu + E_n), \quad (2.2)$$

где E_i — энергия, выделяющаяся при делении i -ого изотопа, E_ν — энергия нейтрино, E_n — энергия, обусловленная захватами нейтронов в материалах реактора. Величину $(E_i - E_\nu + E_n)$, которую мы будем обозначать ε_i ,

обычно называют эффективной тепловой энергией. Под i -тыми изотопами будем понимать ^{235}U , ^{238}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu , так как распады именно этих элементов вносят основной вклад (более 99%) в тепловую мощность реактора. Величины ε_i для них рассчитаны с хорошей точностью [6].

Спектр антинейтрино i -ого изотопа $\text{Sp}_i(E_\nu)$ может быть восстановлен двумя способами [6, 8, 15] — методом прямого суммирования (в литературе его часто называют методом *ab initio* – вычислением из первых принципов) и методом конверсии.

Метод суммирования основан на доступной информации о продуктах деления и отдельных каналах бета-распада, которая получается либо из целенаправленных экспериментов, либо на основе численных вычислений, хранящихся в базах данных. Спектр антинейтрино Sp_i представляется суммой по всем делениям i -ого изотопа [8]:

$$\text{Sp}_i = \sum_{f=1}^{N_f} A_f(t) S_f(E_\nu), \quad (2.3)$$

где $A_f(t)$ — активность f -ого продукта деления в момент времени t , нормированная на распад i -ого изотопа. $S_f(E_\nu)$ в свою очередь является суммой по всем модам (ветвям), связывающим основное состояние родительского ядра с различными возбужденными состояниями дочерних ядер [8]:

$$S_f(E_\nu) = \sum_{b=1}^{N_b} \text{BR}_f^b S_f^b(Z_f, A_f, E_{0f}^b, E_\nu), \quad (2.4)$$

где BR_f^b — коэффициент ветвления (branching) — доля f -ых ядер, распадающихся по данной b -ой ветви относительно всех f -ых ядер, E_{0f}^b — энергия конечной точки b -ой ветви f -ого продукта деления ($E_{0f}^b = E_\nu + E_e$), Z_f и A_f — заряд и атомный номер f -ого ядра соответственно. S_f^b имеет вид [8]

$$S_f^b = \underbrace{N_f^b}_{\text{норм.}} \cdot \underbrace{\mathcal{F}(Z_f, A_f, E_e)}_{\text{ф-ция Ферми}} \cdot \underbrace{p_e E_e (E_e - E_{0f}^b)^2}_{\text{фактор фазового пр-ва}} \cdot \underbrace{C_f^b(E_e)}_{\text{фактор формы}} \cdot \underbrace{(1 + \delta_f^b(Z_f, A_f, E_e))}_{\text{поправки}}. \quad (2.5)$$

В поправочный множитель входят радиационные поправки КЭД, поправки, связанные с неточечностью и несферичностью ядра, отдачей, экранированием, перестройкой электронной оболочки, слабым магнетизмом.

Величина $C_f^b(E_e)$ является поправкой к фактору фазового объема и включает в себе ядерный матричный элемент, а также зависит от запрещенности перехода (в случае разрешенных переходов $C_f^b(E_e) = 1$) [7, 8].

Функция Ферми $\mathcal{F}(Z_f, A_f, E_e)$ описывает кулоновское взаимодействие дочернего ядра с β -электроном, которое приводит к тому, что электронный спектр начинается с ненулевого значения при нулевой энергии, что приводит к резкому обрыву спектра антинейтрино (иллюстрация дана на рисунке 2.1). На суммарном реакторном спектре $\text{Sp}_\nu(E_\nu)$ это проявляется в виде определенных ”пилообразных” особенностей, представленных на рисунке 2.2, вклад которых будет далее обсуждаться дополнительно.

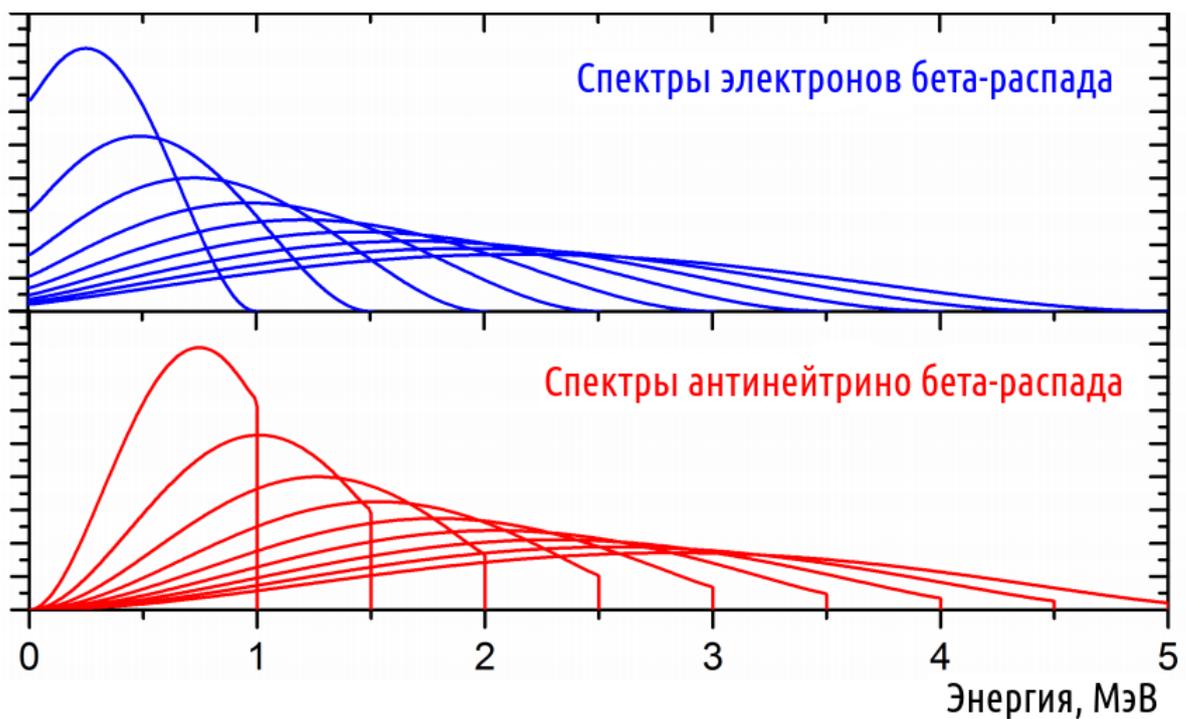


Рисунок 2.1 — Спектры электронов и антинейтрино β -распада [16]

Несмотря на хорошо проработанную теорию, использование метода суммирования подразумевает учёт вклада тысяч каналов бета-распада для каждого делящегося изотопа, что приводит к большим неопределенностям и плохому согласованию с экспериментальными данными. Альтернативный метод, метод конверсии, позволяет обойти ограничения метода *ab initio* [7, 15]. В нем выделяют три этапа: измерение в лаборатории электрон-

ного β -спектра от конкретного делящегося изотопа, описание полученного бета-спектра при помощи эмпирической модели, состоящей из набора синтетических каналов бета-распада, параметры которых определяются методом подгонки, использование теоретической модели для получения спектра антинейтрино.

Как уже отмечалось выше, в общем случае спектры, полученные этими методами, имеют определенную пилообразную микроструктуру, которую, как правило, не учитывают в практических задачах, и искусственным образом сглаживают. На [рисунке 2.2](#) приведены типичные реакторные спектры $\text{Sp}_\nu(E_\nu)$, рассчитанные в отделении физики нейтрино Курчатовского института, с которыми далее и проводится работа.

Следующим шагом является переход от реакторных спектров к потокам антинейтрино, которые будут регистрироваться в детекторе. Связь реакторного антинейтринного спектра $\text{Sp}_\nu(E_\nu)$ (который, напомним, нормирован на один распад) с потоком антинейтрино $\Phi_\nu(E_\nu)$ с энергией E_ν на расстоянии L от реактора выражается формулой

$$\Phi_\nu(E_\nu) = \frac{W_{th}}{\bar{\epsilon}} \frac{\text{Sp}_\nu(E_\nu)}{4\pi L^2}, \quad (2.6)$$

где W_{th} — тепловая мощность реактора, о которой речь шла выше, $\bar{\epsilon}$ — средняя энергия, выделяемая при одном распаде тяжелого элемента ($\bar{\epsilon} \approx 200$ МэВ).

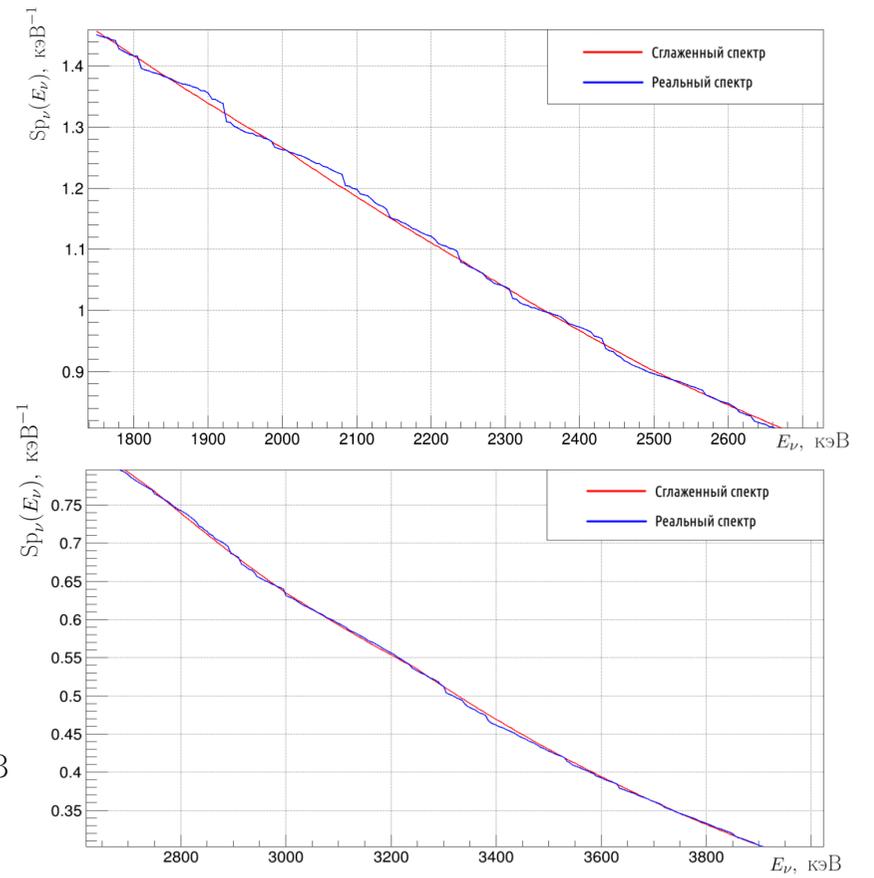
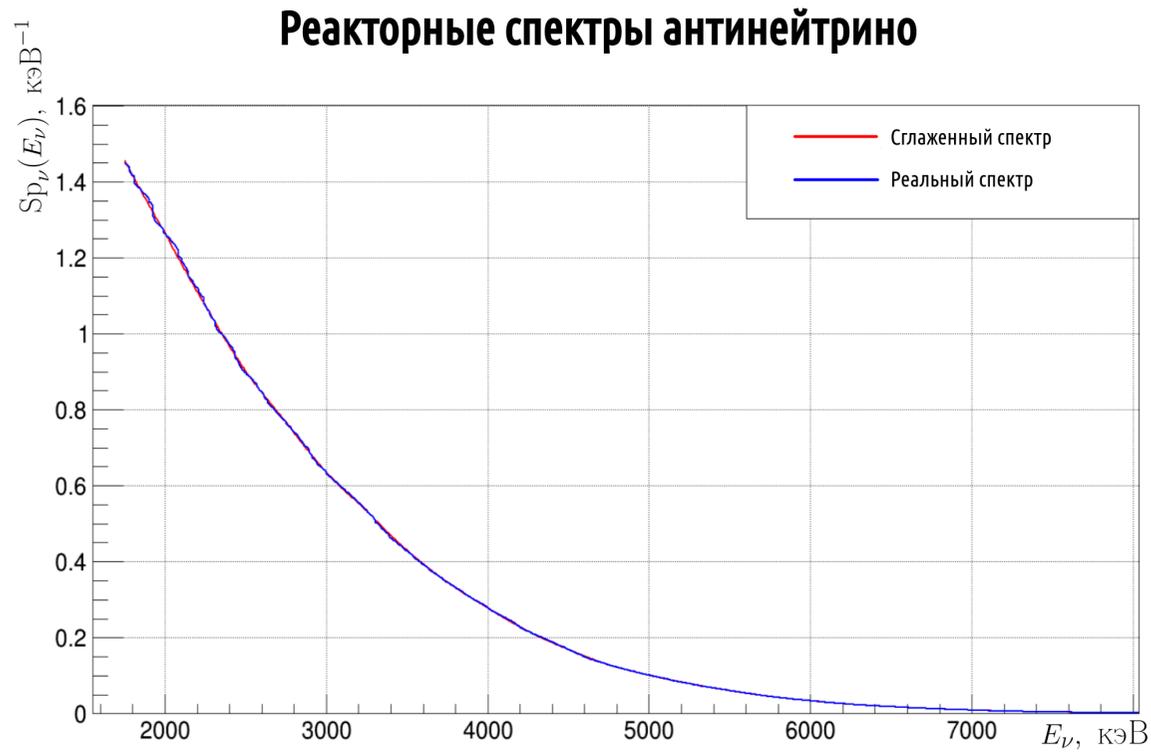


Рисунок 2.2 — Реакторные антинейтринные спектры

Для регистрации антинейтрино в основном используется реакция ОБР [13, 14]:

$$\tilde{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+, \quad (2.7)$$

имеющая порог $E_\nu \approx m_n - m_p + m_e \approx 1.8$ МэВ, где m_n, m_p и m_e — массы нейтрона, протона и электрона соответственно. С её помощью в 1956 году Ф.Райнесом и К.Коуэном в эксперименте на реакторе в Саванна-Ривер и было сделано экспериментальное открытие антинейтрино. Расчет этого процесса в простейшем приближении приведен в [приложении А](#), а более подробное описание в параграфе (3.2) данной работы.

Сечение реакции ОБР крайне мало (порядка 10^{-43} см²) при энергиях реакторных антинейтрино, поэтому для эффективной регистрации необходимы достаточно большие потоки антинейтрино и объемы рабочего вещества детектора, в качестве которого обычно используют жидкий сцинтиллятор с высоким содержанием протонов. После взаимодействия антинейтрино с протоном рожденный позитрон забирает большую часть энергии реакции, которую затем достаточно быстро (за несколько наносекунд) теряет в рабочем веществе за счет ионизационных и радиационных потерь. В конечном итоге он аннигилирует с электроном в два γ -кванта с энергиями $m_e = 0.511$ МэВ. Рожденный в ОБР нейтрон тем временем соударяется с ядрами среды и теряет свою кинетическую энергию. С уменьшением скорости нейтрона сечение его взаимодействия со средой растет, поэтому замедляется он достаточно быстро, а затем начинает диффундировать до момента захвата протоном с последующим испусканием γ -кванта с энергией 2.2 МэВ. Происходит это примерно через 200 мкс после реакции ОБР [3].

В результате описанного процесса на выходе детектора появляются два сигнала — быстрый (от аннигиляции) и запаздывающий (от захвата нейтрона), интегрирование которых позволяет получить энергию провзаимодействовавшего антинейтрино.

2.2. ЭКСПЕРИМЕНТ JUNO

Эксперимент JUNO — планируемый реакторный эксперимент нового поколения, целями которого являются определение иерархии масс нейтрино и уточнение некоторых параметров матрицы смешивания PMNS.



Рисунок 2.3 — Эксперимент JUNO [3]

Детектор JUNO будет представлять собой 35-и метровую сферу, заполненную 20 кт жидкого сцинтиллятора на основе линейного алкилбензола (далее – ЛАБ, его параметры приведены в [таблице 2](#)), свечение которого будет детектироваться 20-ю тысячами фотоэлектронных умножителей диаметром 50 см каждый ([рисунок 2.4](#)).

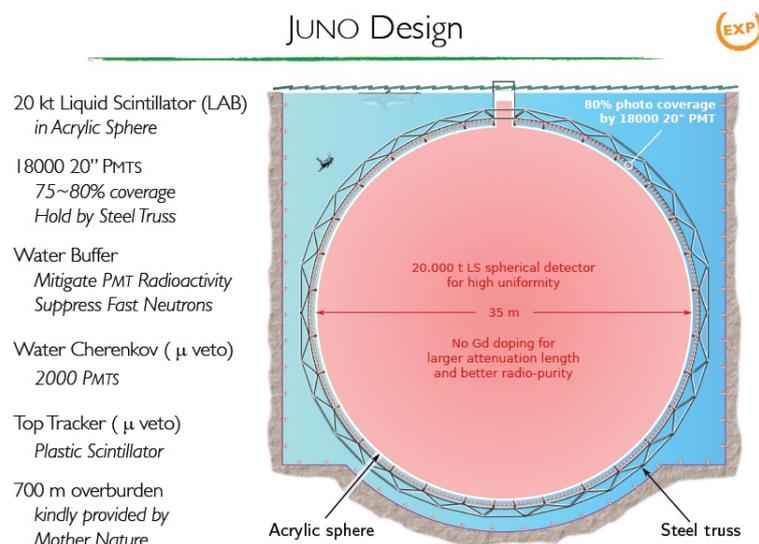


Рисунок 2.4 — Детектор JUNO [3]

Максимальное геометрическое покрытие детектора фотоумножителями позволит добиться беспрецедентного энергетического разрешения детектора 3% для энергии 1 МэВ. Детектор будет расположен на расстоянии около 53 км от реакторов атомных электростанций Янцзян и Тайшань (таблица 3, рисунок 2.3). С учетом представленных данных в эксперименте ожидается наблюдать порядка 60-80 событий ОБР в день [3].

Таблица 2 — Физико-химические характеристики ЛАБ [17]

Плотность, г/см ³	0,858–0,862
Температура кипения, °С	280–311
Температура вспышки, °С	147
Количество атомов водорода, 10 ²² см ⁻³	6,29

Таблица 3 — Сводная информация о тепловой мощности и базовой линии для детектора JUNO реакторов Янцзянь (YJ) и Тайшань (TS), а также для удаленных реакторов Daya Bay (DYB) и Хуэйчжоу (HZ) [3]

Cores	YJ-C1	YJ-C2	YJ-C3	YJ-C4	YJ-C5	YJ-C6
Power (GW)	2.9	2.9	2.9	2.9	2.9	2.9
Baseline(km)	52.75	52.84	52.42	52.51	52.12	52.21
Cores	TS-C1	TS-C2	TS-C3	TS-C4	DYB	HZ
Power (GW)	4.6	4.6	4.6	4.6	17.4	17.4
Baseline(km)	52.76	52.63	52.32	52.20	215	265

При условии достижения энергетического разрешения в 3% искажения реакторных спектров за счет осцилляций позволят измерить Δm_{31}^2 и, в частности, определить его знак на уровне достоверности более трёх стандартных отклонений в течение 6 лет после начала набора данных в 2020 году. Определение знака Δm_{31}^2 эквивалентно определению иерархии масс нейтрино.

3. АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ЭКСПЕРИМЕНТА JUNO К ИЕРАРХИИ МАСС

Данная часть работы посвящена поэтапному описанию ключевых моментов реакторного эксперимента JUNO — здесь будет показано влияние осцилляций на спектры реакторных антинейтрино и на наблюдаемые спектры позитронов ОБР, рассмотрено влияние функции отклика детектора и энергетического разрешения. Описание проходит на теоретическом уровне, что необходимо для формулировки критериев определения иерархии масс, построения математической модели эксперимента и последующего применения последней к генерации псевдоэкспериментальных данных для статистического анализа.

3.1. ВЛИЯНИЕ ОСЦИЛЛЯЦИЙ НА СПЕКТР РЕАКТОРНЫХ АНТИНЕЙТРИНО

Рассмотрим спектр реакторных антинейтрино ([рисунок 2.2](#)) и наложим на него эффект осцилляций для прямой и обратной иерархий (расстояние $L = 53$ км зафиксируем), воспользовавшись формулой ([1.15](#)):

$$\text{Sp}_{\nu \text{ osc}}(E_{\nu}) = P_{ee} \left(\frac{L}{E_{\nu}} \right) \text{Sp}_{\nu}(E_{\nu}) \quad (3.1)$$

На [рисунок 3.1](#) представлены исходный спектр $\text{Sp}_{\nu}(E_{\nu})$ и полученные по формуле ([3.1](#)).

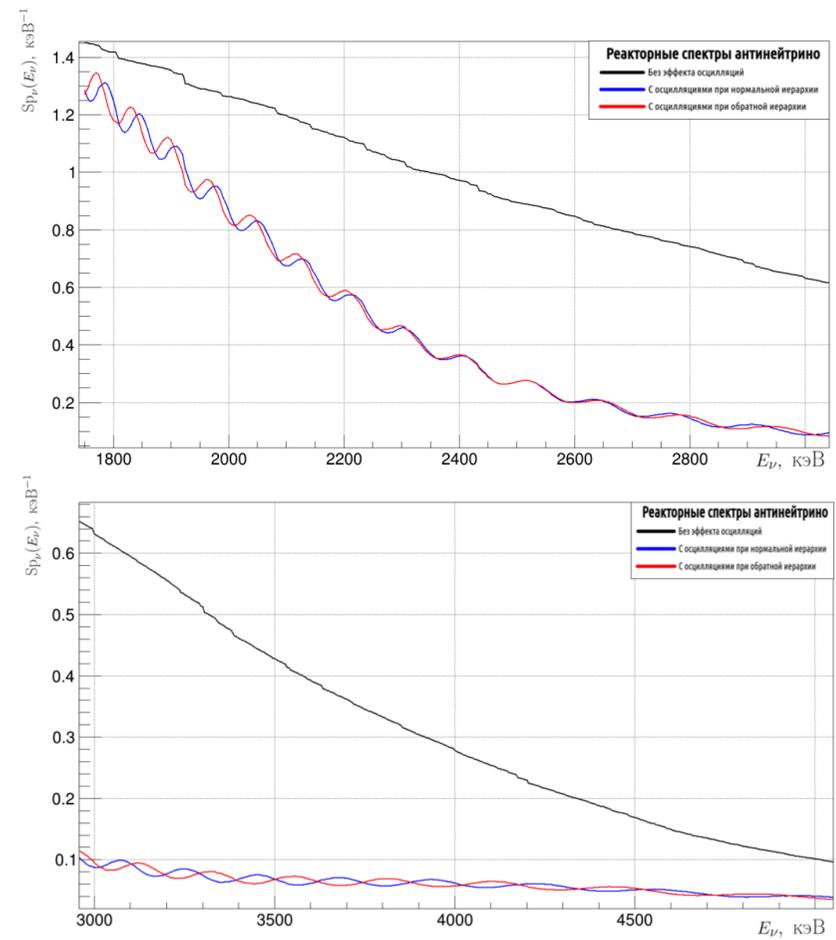
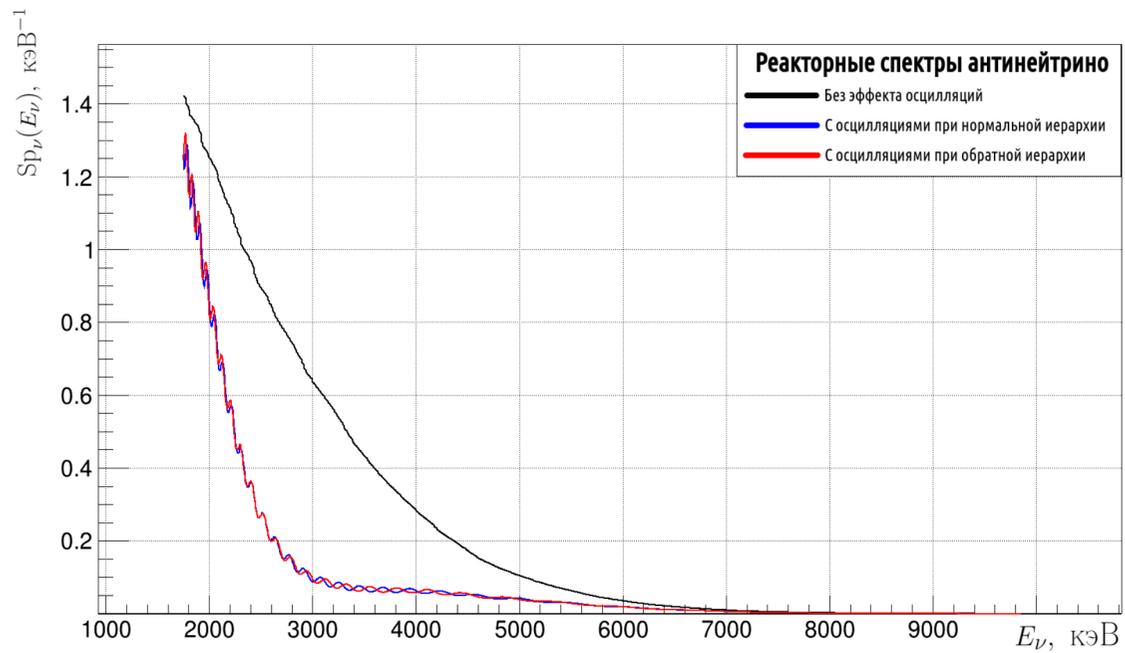


Рисунок 3.1 — Реакторные спектры антинейтрино с эффектом осцилляций для прямой и обратной иерархий

3.2. ВЛИЯНИЕ ОСЦИЛЛЯЦИЙ НА СПЕКТР ОБР

Сечение ОБР в "наивном" приближении имеет следующий вид [18]:

$$\sigma_0 = \frac{1}{\pi} (G_V^2 + 3 G_A^2) E_e p_e, \quad (3.2)$$

где E_e, p_e — энергия и модуль импульса позитрона, а слабые константы G_V и G_A выражаются через постоянную Ферми G_F , элемент матрицы смешивания кварков Кабиббо–Кобаяши–Маскава V_{ud} и формфакторы свободного нуклона g_v, g_a как $G_V = G_F V_{ud} g_v$ и $G_A = G_F V_{ud} g_a$ соответственно.

Входящая в (3.2) комбинация слабых констант $(G_V^2 + 3 G_A^2)$ может быть нормирована на бета-распад свободного нейтрона [18]:

$$(G_V^2 + 3 G_A^2) = \frac{2\pi^3 \ln 2}{m_e^5 f t}, \quad (3.3)$$

где $f = 1.7146$ — безразмерный фактор фазового пространства, t — период полураспада нейтрона [18, 19]. Подставляя (3.3) в (3.2) и переходя от позитрона к антинейтрину $E_\nu = E_e + \Delta$, где Δ — разность масс нейтрона и протона, получим

$$\sigma_0(E_\nu) = \frac{2\pi^2 \ln 2}{m_e^5 f t} \sqrt{(E_\nu - \Delta)^2 - m_e^2} \cdot (E_\nu - \Delta), \quad (3.4)$$

В общем случае спектр позитронов получается из спектра антинейтрино следующим образом [18]:

$$\text{Sp}_e(E_e) = \int \text{Sp}_\nu(E_\nu) \frac{d\sigma_0(E_\nu, E_e)}{dE_e} dE_\nu. \quad (3.5)$$

Это выражение можно упростить, используя тот факт, что при фиксированной энергии позитрона E_e интегрирование ведется фактически не по всему спектральному диапазону, а по узкому интервалу $\Delta E_\nu \approx 2p_e E_e / m_p$.

В первом порядке по $1/m_p$ получаем [18]:

$$\text{Sp}_e(E_\nu) = \text{Sp}_\nu \left(E_\nu + \frac{2E_\nu(E_\nu - \Delta) + \Delta^2 - m_e^2}{2m_p} \right) \sigma_0(E_\nu). \quad (3.6)$$

Для дальнейших расчетов нормируем полученный спектр позитронов на число событий, регистрируемых детектором от двух АЭС. Для этого, согласно формуле (2.6), вычислим потоки антинейтрино на расстояниях L_1 и L_2 км, а также оценим число протонов в мишени. Напомним, что рабочим веществом детектора JUNO является ЛАБ, средняя плотность которого $\rho \approx 0.86$ г/см³, а количество атомов водорода (соответственно, протонов) на 1 см³ составляет порядка $6.3 \cdot 10^{22}$ (таблица 2). 20 кт линейного алкилбензола будет содержать около $N_p = 6.3 \cdot 10^{22} \cdot 20 \cdot 10^9 / 0.86 \approx 1.47 \cdot 10^{33}$ протонов. Тогда среднее число позитронов Sp_e с энергией E_e , регистрируемых в секунду, можно представить как

$$\text{Sp}_e(E_e) = \eta N_p \sigma_0(E_e) \underbrace{\left(\frac{W_{th}^{1\text{-st}} \text{Sp}_{\nu \text{ osc}}^{1\text{-st}}(E^*)}{\bar{\varepsilon} 4\pi L_1^2} + \frac{W_{th}^{2\text{-nd}} \text{Sp}_{\nu \text{ osc}}^{2\text{-nd}}(E^*)}{\bar{\varepsilon} 4\pi L_2^2} \right)}_{\text{суммарный поток антинейтрино от двух реакторов}}, \quad (3.7)$$

где η — эффективность регистрации, $E^* = E_\nu + \frac{2E_\nu(E_\nu - \Delta) + \Delta^2 - m_e^2}{2m_p}$, $\bar{\varepsilon}$ — средняя энергия, выделяемая при одном распаде, W_{th}^i — тепловая мощность соответствующего реактора. Выражение (3.7) будет верно в случае идеального детектора с энергетическим разрешением 0% для всех наблюдаемых энергий.

На рисунке 3.2 представлено полученное распределение позитронов, для удобства — по энергии нейтрино (напоминаем, что $E_\nu = E_e + m_n - m_p$).

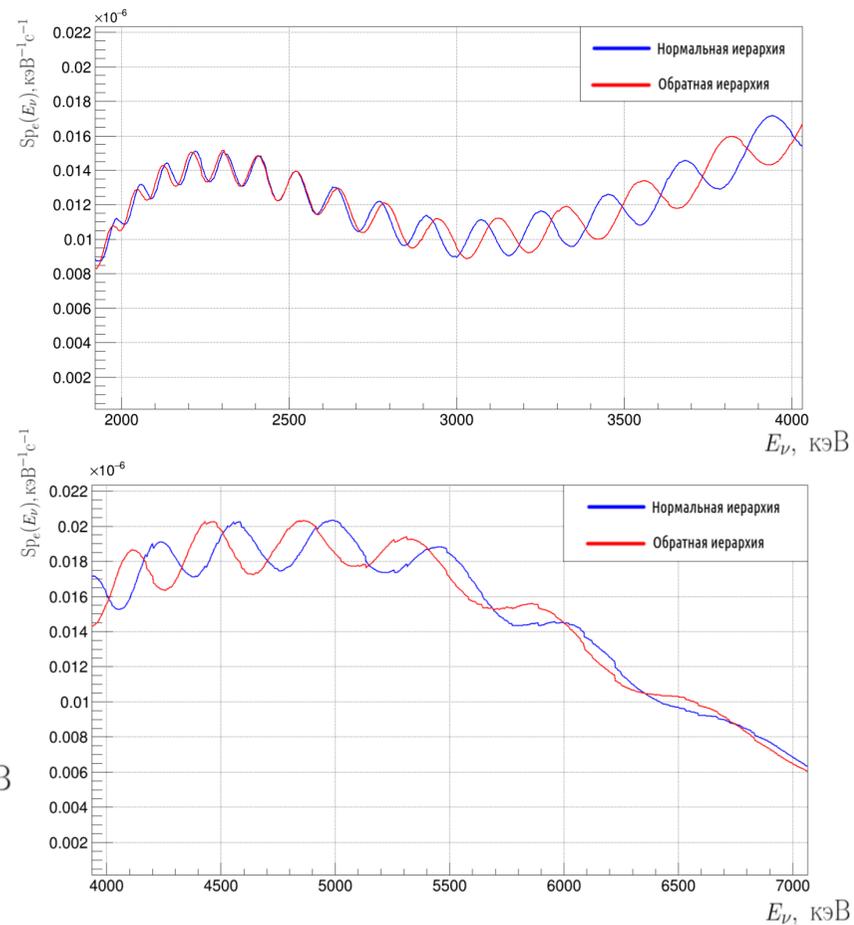


Рисунок 3.2 — Спектры позитронов для двух реакторов с эффектом осцилляций для прямой и обратной иерархий

3.3. ВЛИЯНИЕ ФУНКЦИИ ОТКЛИКА ДЕТЕКТОРА

Значительное влияние на конечный спектр позитронов оказывает функция отклика детектора — плотность вероятности появления на выходе детектора сигнала, соответствующего энергии E_ν , при поглощении в рабочем веществе энергии E'_ν . Её точный аналитический вид неизвестен, поэтому будем использовать нормальное распределение Гаусса [3, 20] как некоторое приближение, учитывая энергетическое разрешение детектора JUNO 3% для 1 МэВ в среднеквадратичном отклонении:

$$\rho(E'_\nu, E_\nu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(E'_\nu)} \cdot \exp\left(-\frac{(E_\nu - E'_\nu)^2}{2\sigma^2(E'_\nu)}\right), \quad (3.8)$$

где $\sigma(E'_\nu) = 3/100\sqrt{E'_\nu}$.

Наблюдаемый позитронный спектр получается путем свертки идеального с функцией отклика:

$$\text{Sp}_e^{(\sigma)}(E_\nu) = \int_{E_{min}}^{E_{max}} \text{Sp}_e(E'_\nu)\rho(E_\nu, E'_\nu, \sigma) dE'_\nu. \quad (3.9)$$

В качестве иллюстрации влияния энергетического разрешения приведем рисунки 3.3, 3.4 и 3.5 — на них изображены позитронные спектры, размытые разрешениями 3% для 1 МэВ, 5% для 1 МэВ и 7% для 1 МэВ соответственно.

Из рисунков видно, что при ухудшении энергетического разрешения эффект осцилляций пропадает (при 7% его уже практически нет).

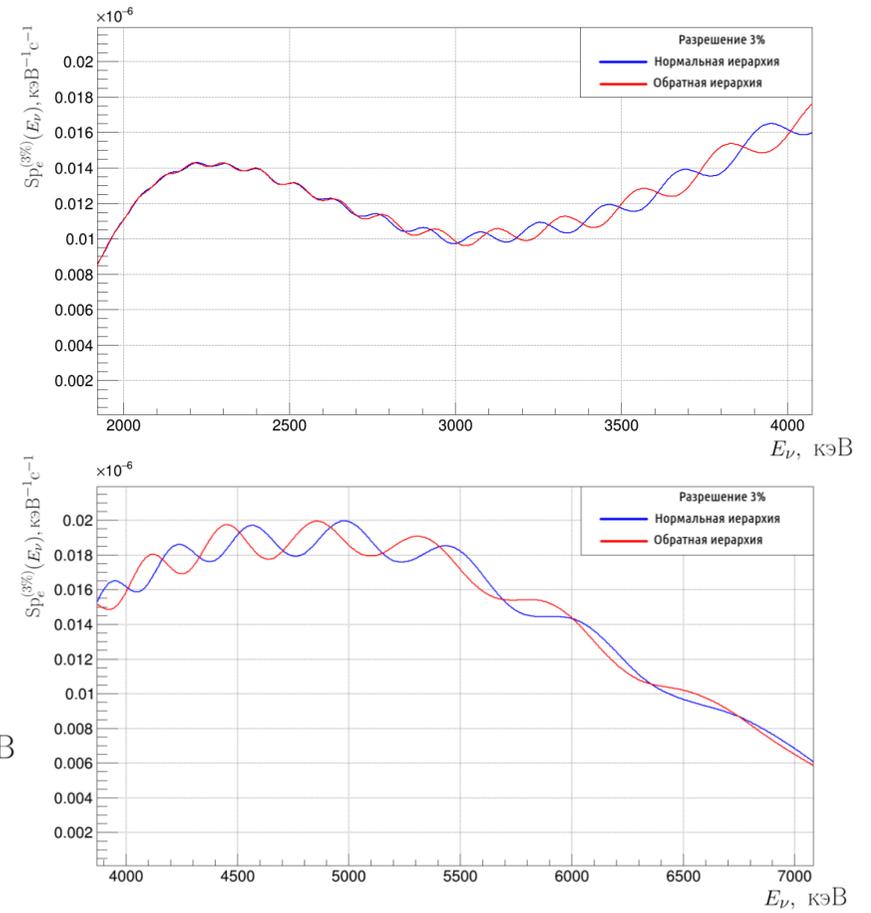
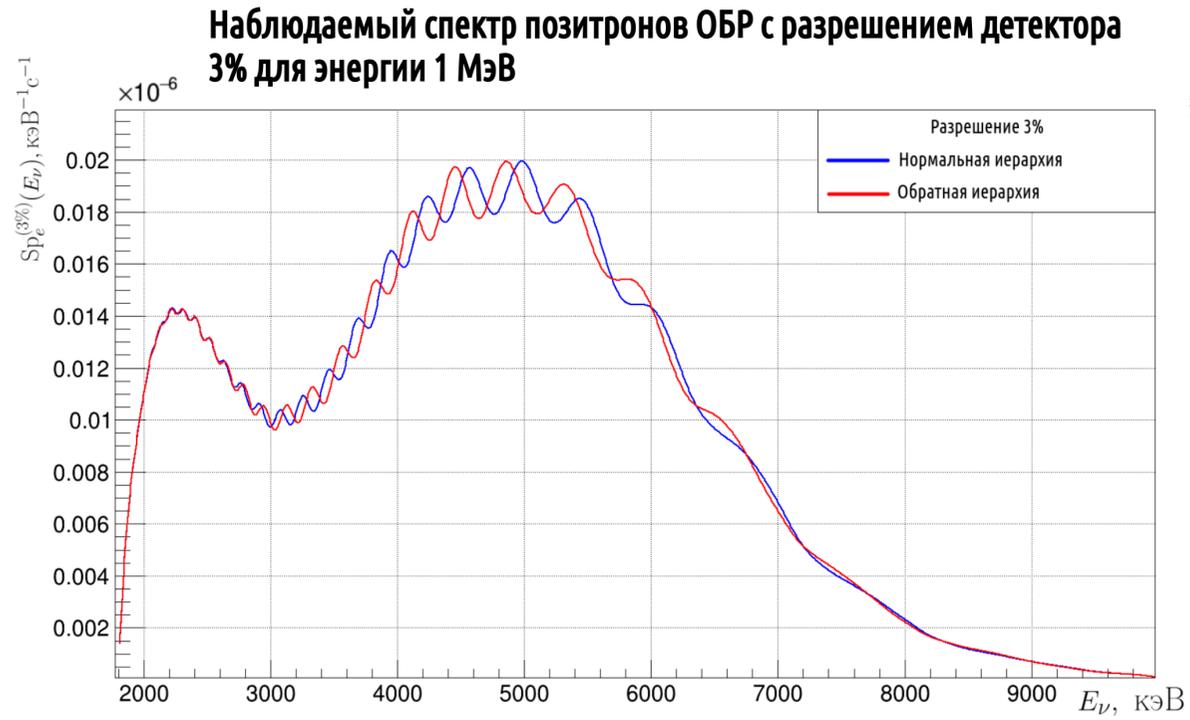


Рисунок 3.3 — Наблюдаемый спектр позитронов с разрешением детектора 3 % для 1 МэВ

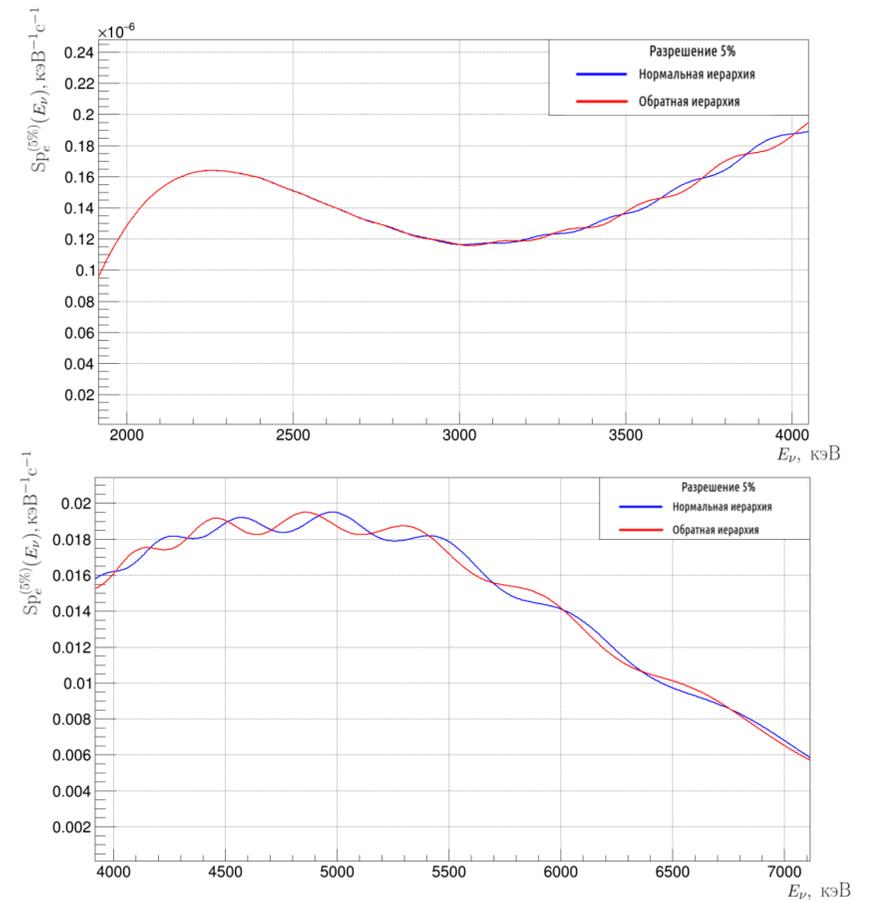
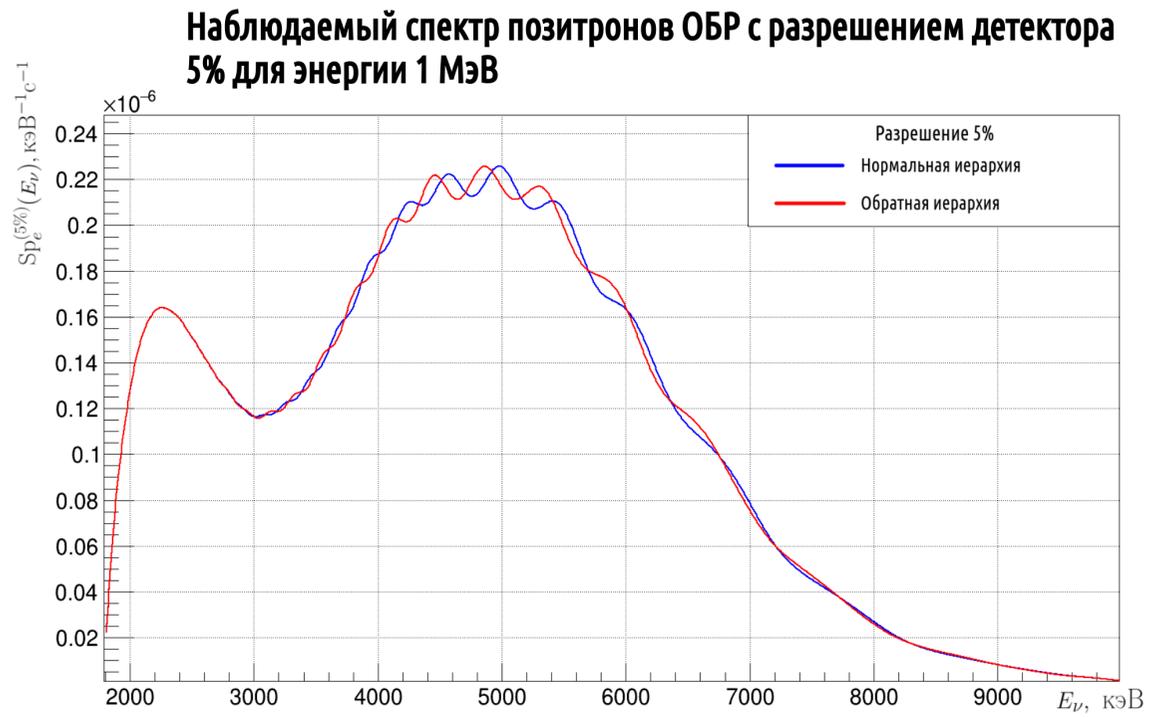


Рисунок 3.4 — Наблюдаемый спектр позитронов с разрешением детектора 5 % для 1 МэВ

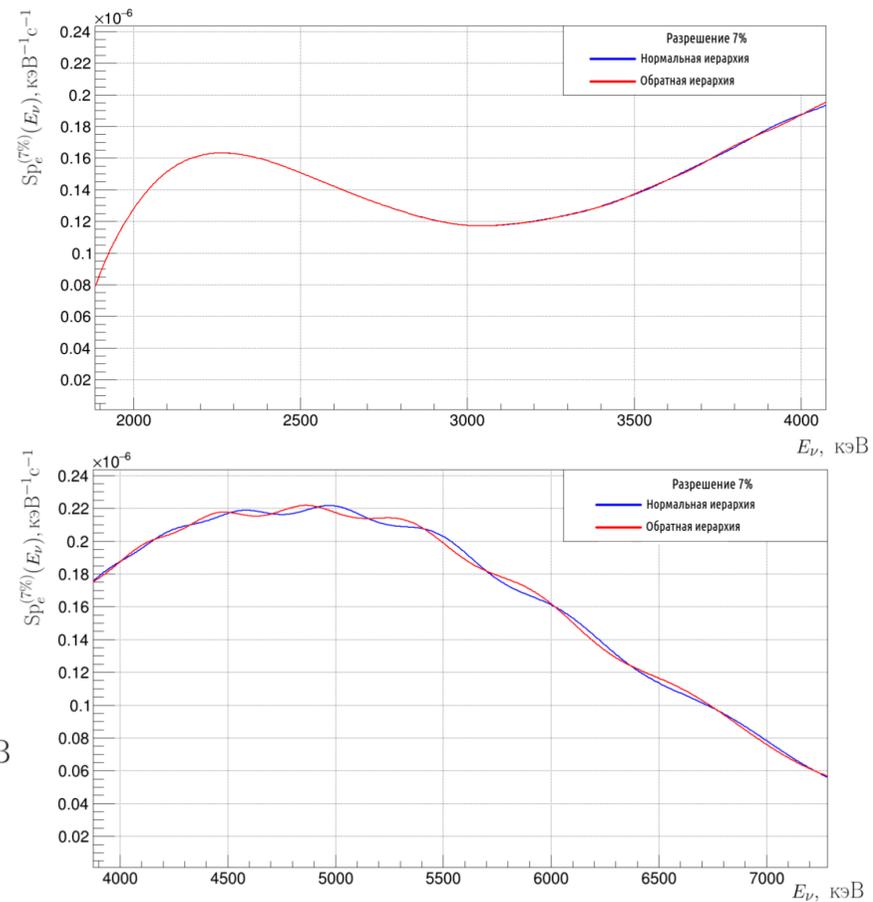
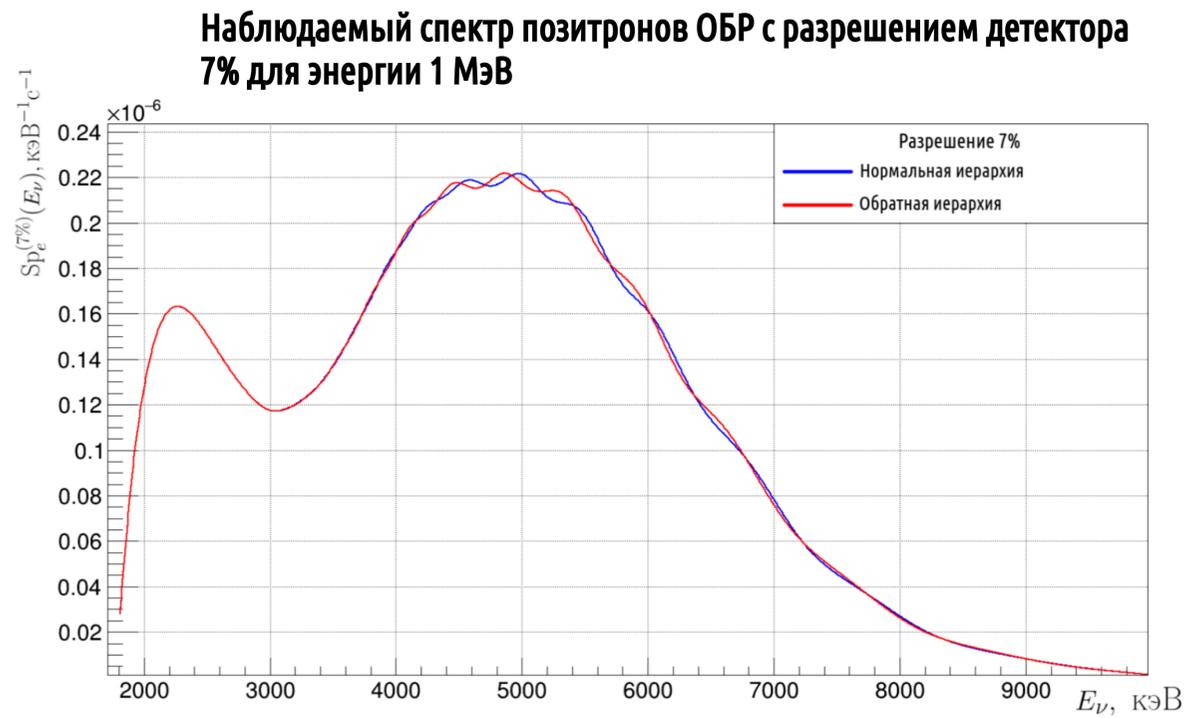


Рисунок 3.5 — Наблюдаемый спектр позитронов с разрешением детектора 7 % для 1 МэВ

4. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

4.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

В связи с тем, что эффект осцилляций является периодическим процессом, для определения иерархии из полученных позитронных спектров в работах [4, 21] предлагается использовать Фурье-преобразование.

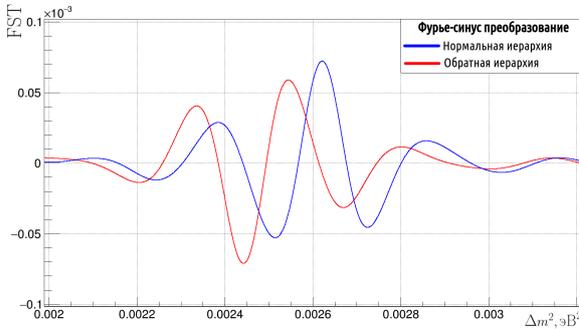
Возвращаясь к формуле (1.15) для вероятности выживания, введем следующие обозначения: $t = \frac{L}{E}$ и $\omega = 2.534\Delta m^2$. Разность квадратов масс массовых состояний будем считать переменной величиной.

Используем Фурье-косинус и Фурье-синус преобразования:

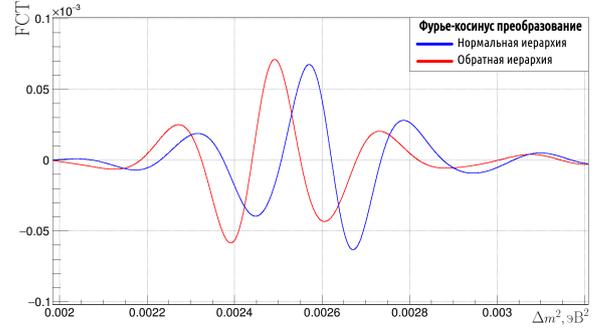
$$\text{FCT}(\omega) = \int_{t_{min}}^{t_{max}} \text{Sp}_e(t) \cos(\omega t) dt, \quad (4.1)$$

$$\text{FST}(\omega) = \int_{t_{min}}^{t_{max}} \text{Sp}_e(t) \sin(\omega t) dt, \quad (4.2)$$

На рисунке 4.1 представлены соответствующие Фурье-синус и Фурье-косинус образы позитронного спектра (рисунок 3.2) от двух реакторов с разрешением 0%.



(а) Фурье-синус преобразование



(б) Фурье-косинус преобразование

Рисунок 4.1 — Фурье-образы спектра позитронов ОБР

Для определения иерархии предлагается следующий подход [4]. Вводятся параметры RV, LV, P, V, RL и PV , где: RV — амплитуда правой ямы FCT, LV — амплитуда левой ямы FCT, P — амплитуда пика FST, V — амплитуда ямы FST.

$$RL = \frac{RV - LV}{RV + LV}, \quad PV = \frac{P - V}{P + V}. \quad (4.3)$$

Знаки RL и PV определяют иерархию:

$RL > 0$ и $PV > 0 \Rightarrow$ Нормальная иерархия,

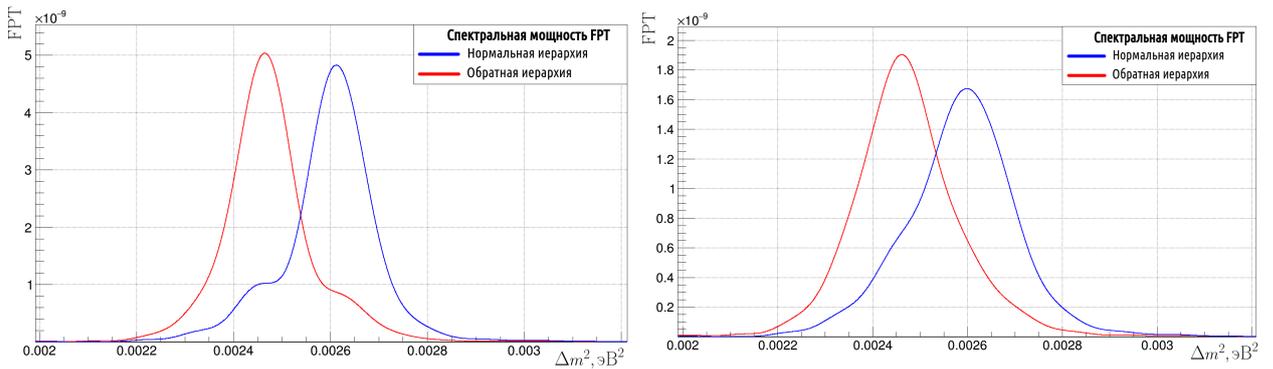
$RL < 0$ и $PV < 0 \Rightarrow$ Обратная иерархия.

Данное выше утверждение будем называть критерием $RL + PV$.

Помимо этого, для определения значения Δm_{31}^2 и иерархии можно использовать спектральную мощность Фурье-преобразования (FPT). Она представляет из себя среднее между суммой квадратов модулей FST и FCT:

$$FPT(\omega) = \frac{|FST(\omega)|^2 + |FCT(\omega)|^2}{2} \quad (4.4)$$

На рисунке 4.2 приведены спектральные мощности для идеального (рисунки 3.2) и наблюдаемого (рисунки 3.3) спектров позитронов ОБР.



(а) FPT-образы спектра ОБР с разрешением 0%

(б) FPT-образы спектра ОБР с разрешением 3%

Рисунок 4.2 — Спектральная мощность Фурье-преобразования

Самым очевидным недостатком метода ФРТ является потеря информации о знаке Δm^2 вследствие возведения образов в квадрат. Можно, однако, воспользоваться разницей в численных значениях (для нормальной иерархии $|\Delta m_{31}^2| = 2.59 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$, для обратной — $|\Delta m_{31}^2| = 2.49 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$ (согласно [таблице 1](#)). Рассматривая нормированную функцию ФРТ как плотность распределения величины Δm^2 , из графиков на [рисунке 4.2](#) можно получить:

$$\begin{aligned} |\Delta m_{31}^2| &= (2.58 \pm 0.12) \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2 \text{ для нормальной иерархии,} \\ |\Delta m_{31}^2| &= (2.47 \pm 0.12) \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2 \text{ для обратной иерархии,} \end{aligned} \quad (4.5)$$

что сходится в пределах погрешностей с ожидаемыми значениями, которые были заложены в эффект осцилляций. Проблема заключается в том, что погрешность определения численного значения $0.12 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$ практически совпадает с разностью средних значений $\Delta(\Delta m_{31}^2) = 0.11 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$, что не позволяет определить иерархию по численному значению с достаточной достоверностью.

Несмотря на это, ФРТ может определить иерархию косвенным образом — по коэффициенту асимметрии γ ФРТ-образа (как видно из [рисунка 4.2](#), для нормальной иерархии он отрицателен, для обратной положителен). Напомним, что γ определяется как

$$\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \quad (4.6)$$

где μ_3 — 3-ий центральный момент, σ — стандартное отклонение. Данный критерий будем называть критерием асимметрии.

4.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛОМБА–СКЭРГЛА

Вместо классических Фурье-синус и Фурье-косинус преобразований, рассмотренных выше и предложенных в работах [4, 21], можно использовать один из их усовершенствованных видов — так называемые периододограммы Ломба–Скэргла [22].

Строятся они следующим образом:

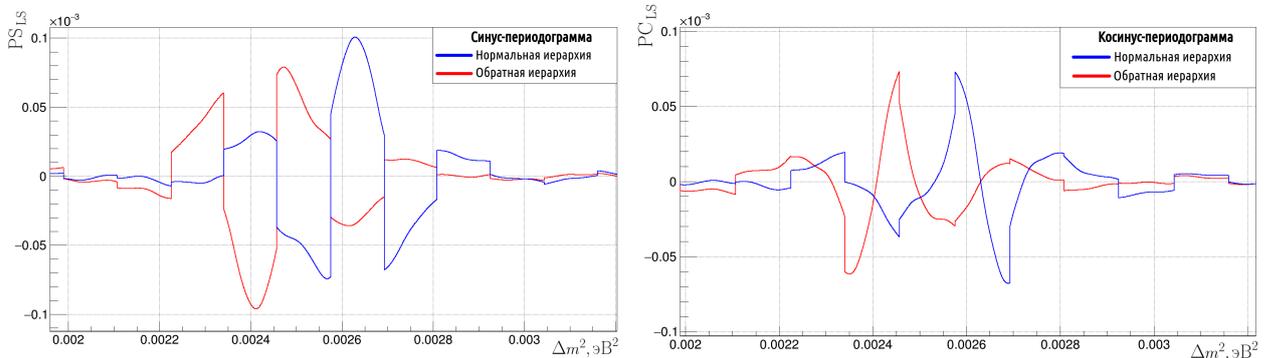
$$PS_{LS}(\omega) = \int_{t_{min}}^{t_{max}} Sp_e(t) \sin(\omega(t - \tau)) dt, \quad (4.7)$$

$$PC_{LS}(\omega) = \int_{t_{min}}^{t_{max}} Sp_e(t) \cos(\omega(t - \tau)) dt, \quad (4.8)$$

где $\tau = \frac{1}{2\omega} \arctan \left(\frac{\sum_{t_{min}}^{t_{max}} \sin(2\omega t)}{\sum_{t_{min}}^{t_{max}} \cos(2\omega t)} \right)$, а t и ω определены тем же обра-

зом, что и в (4.1).

На рисунке 4.3 представлены PS и PC — периододограммы для идеального спектра (рисунок 3.2).



(а) Синус-периододограмма

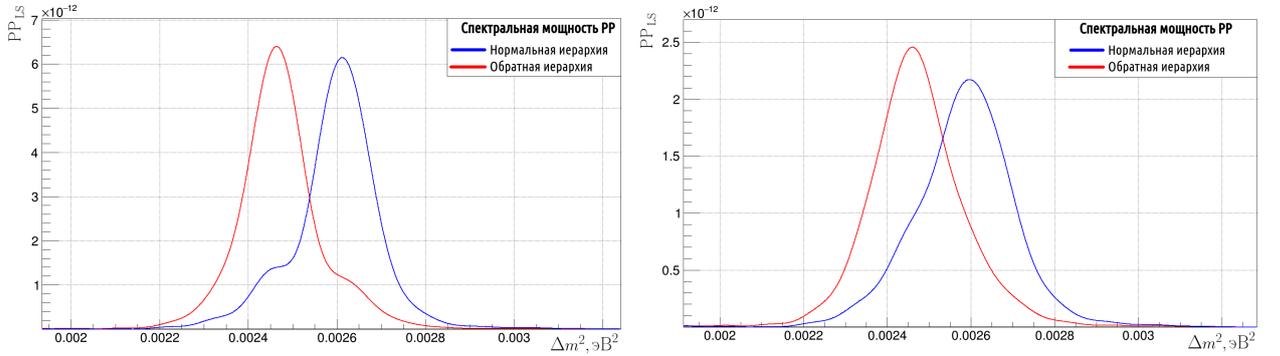
(б) Косинус-периододограмма

Рисунок 4.3 — Синус и косинус периододограммы Ломба–Скэргла конечного позитронного спектра

Аналогично спектральной плотности мощности Фурье-преобразования строится спектральная мощность периодограммы Ломба–Скэргла, усредненная специальным образом:

$$PP_{LS}(\omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{|PC_{LS}(\omega)|^2}{\sum_{t_{min}}^{t_{max}} \cos^2(\omega(t - \tau))} + \frac{|PS_{LS}(\omega)|^2}{\sum_{t_{min}}^{t_{max}} \sin^2(\omega(t - \tau))} \right), \quad (4.9)$$

график которой представлен на [рисунке 4.4](#).



(а) Периодограммы спектра позитронов ОБР с разрешением 0%

(б) Периодограммы спектра позитронов ОБР с разрешением 3%

Рисунок 4.4 — Спектральная мощность преобразования Ломба–Скэргла

Численные значения из периодограмм для $|\Delta m_{31}^2|$ получаются следующие:

$$\begin{aligned} |\Delta m_{31}^2| &= (2.58 \pm 0.12) \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2 \text{ для нормальной иерархии,} \\ |\Delta m_{31}^2| &= (2.47 \pm 0.12) \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2 \text{ для обратной иерархии,} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Как видно из рисунков [4.2](#) и [4.4](#) и выражений [\(4.5\)](#), [\(4.10\)](#), качественно и количественно FRT и P_{LS} дают одинаковые результаты, поэтому вводить критерий асимметрии для периодограмм нет необходимости, как и пытаться определить иерархию по численному значению Δm_{31}^2 .

Эффективность вышеизложенных способов анализа (критерий RL+PV для фурье-образов и периодограмм, критерий асимметрии) будет рассмотрена в [части 7](#) при их явном использовании на смоделированных данных.

4.3. ВЛИЯНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ИСКАЖЕНИЙ

Возвращаясь к теме восстановления спектра реакторных антинейтрино и к недавним работам [5, 10], обсудим следующий вопрос — какой вклад вносят спектральные искажения, вызванные резким обрывом спектров нейтрино (рисунок 2.1, рисунок 2.2).

Функцию спектральных искажений определим как

$$\delta_{\text{sp}}(E_\nu) = \frac{\text{Sp}^{\text{real}}(E_\nu)}{\text{Sp}^{\text{smooth}}(E_\nu)}, \quad (4.11)$$

где под $\text{Sp}^{\text{real}}(E_\nu)$ подразумевается спектр (антинейтрино или ОБР, полученный из него), а под $\text{Sp}^{\text{smooth}}(E_\nu)$ — сглаженный. На рисунке 4.5 представлен график зависимости $\delta_{\text{sp}}(E_\nu)$ для реакторных спектров антинейтрино (изображенных на рисунке 2.2) от энергии последних. Здесь же для наглядности представлены осцилляции Δm_{31}^2 и Δm_{32}^2 в случае нормальной иерархии. Из рисунка видно, что масштабы влияния обоих эффектов в среднем сопоставимы по величине друг с другом.

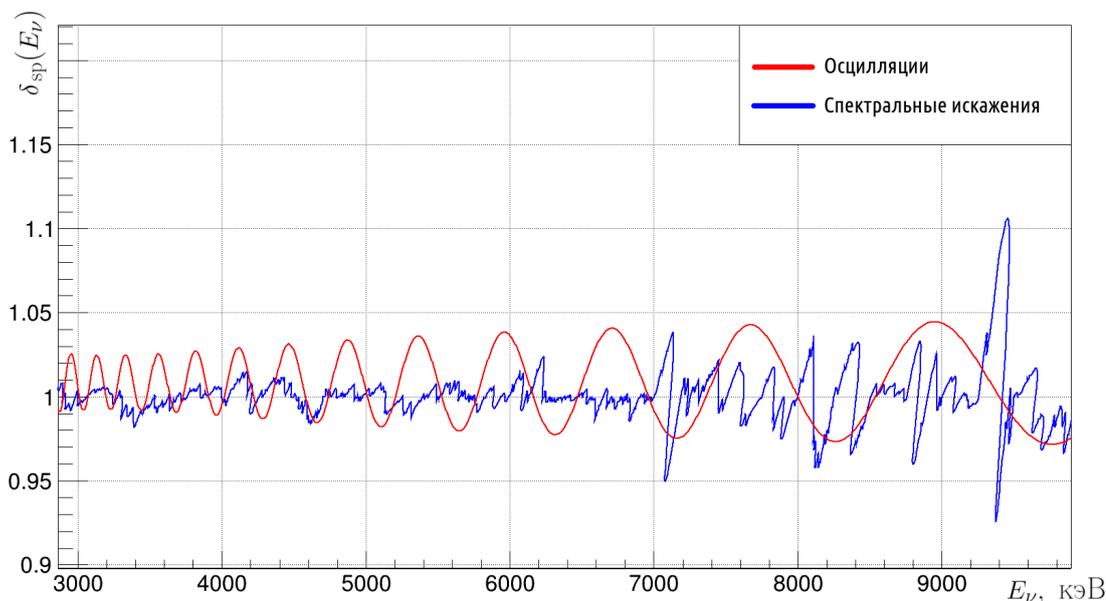
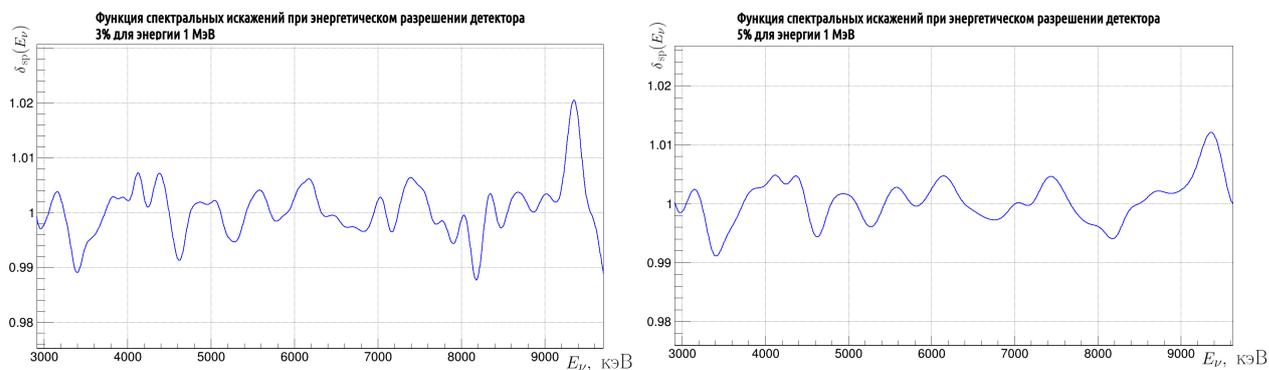


Рисунок 4.5 — Спектральные искажения как функция энергии антинейтрино

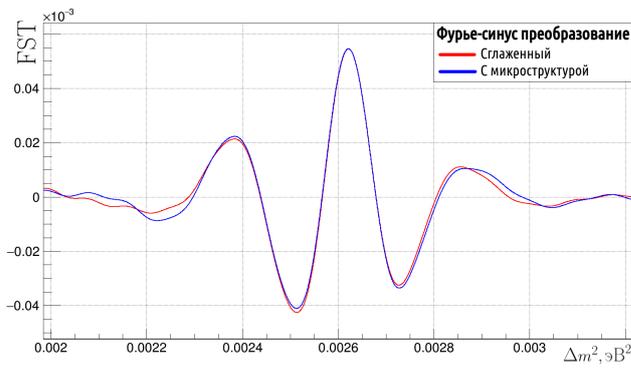
Проведем над реальным и сглаженным спектрами преобразования, описанные в параграфах (3.1)-(3.3). На рисунке 4.6 представлена функция спектральных искажений двух спектров позитронов ОБР, где первый получен из real спектра, второй из smooth, размытых энергетическим разрешением 3% и 5%.



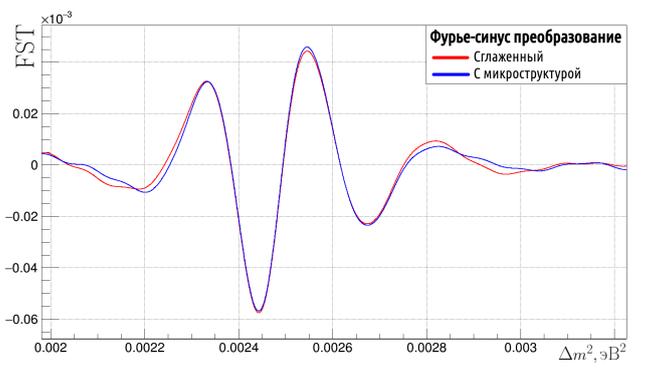
(а) при энергетическом разрешении 3% для энергии 1 МэВ (б) при энергетическом разрешении 5% для энергии 1 МэВ

Рисунок 4.6 — Функция спектральных искажений спектра позитрона ОБР после свертки с функцией отклика

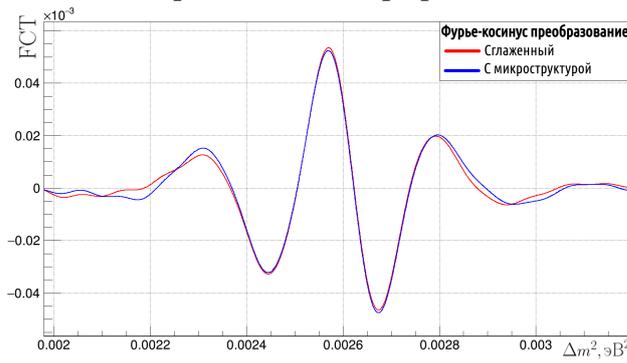
Пилообразный характер искажений размывается функцией отклика не полностью и кажется периодическим, то есть, теоретически, может несколько исказить Фурье-образы позитронных спектров (например, дать дополнительный пик на "частотах", близким к рассматриваемым). Для проверки построим образы для спектров и соответствующие им периодограммы:



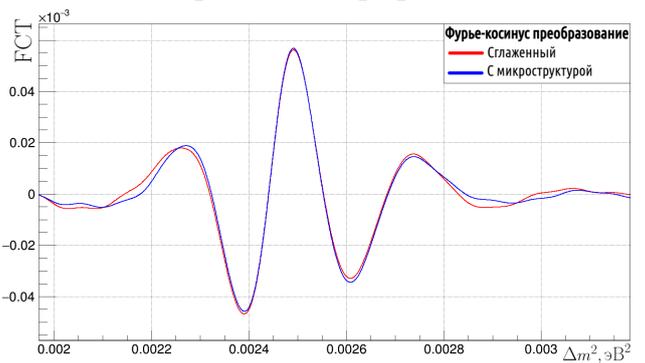
(а) Фурье-синус, нормальная иерархия



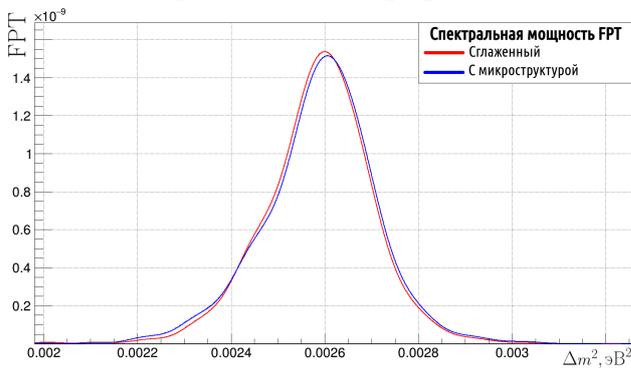
(б) Фурье-синус, обратная иерархия



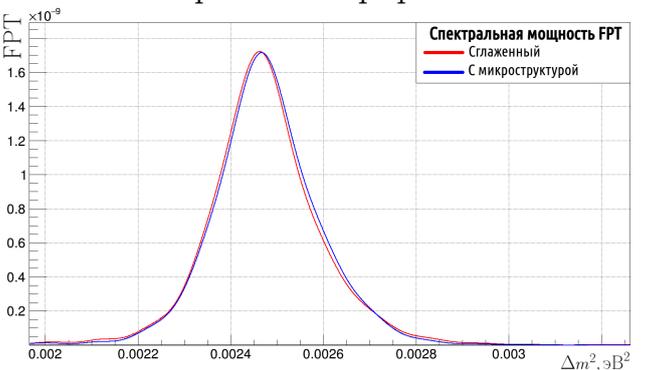
(в) Фурье-косинус, нормальная иерархия



(г) Фурье-косинус, обратная иерархия

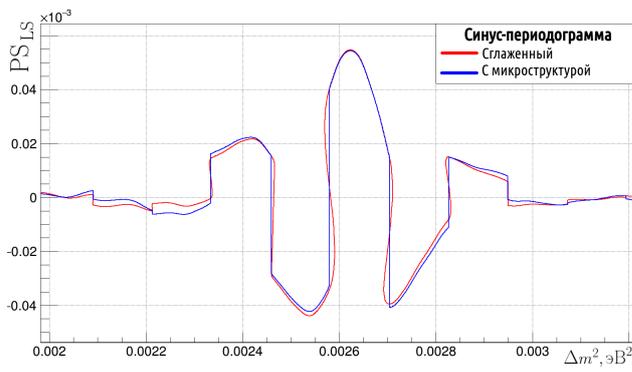


(д) Спектральная мощность, нормальная иерархия

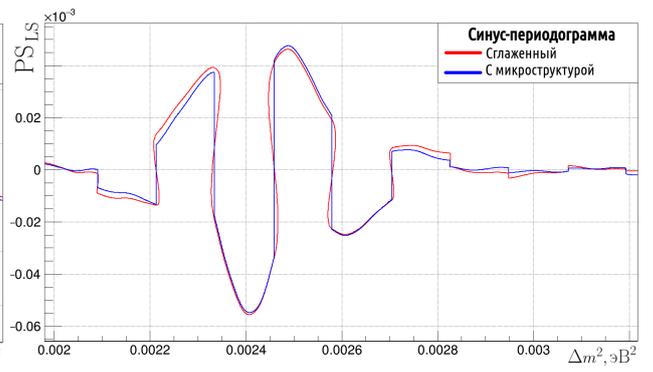


(е) Спектральная мощность, обратная иерархия

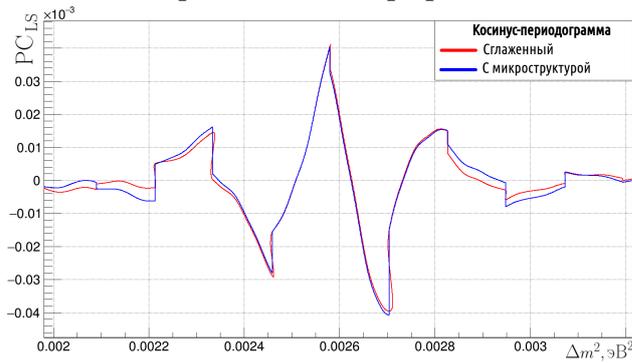
Рисунок 4.7 — Фурье-образы сглаженных спектров и спектров, имеющих микроструктуру



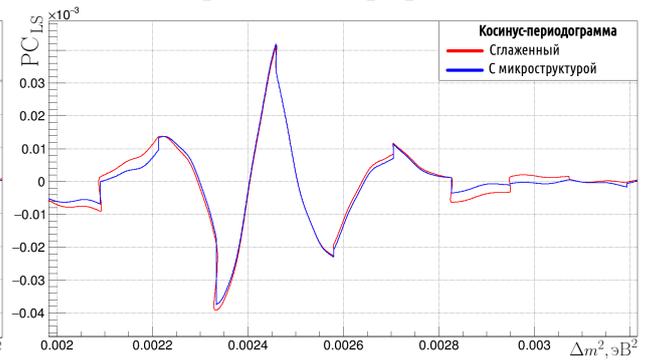
(а) Синус-периодограмма,
нормальная иерархия



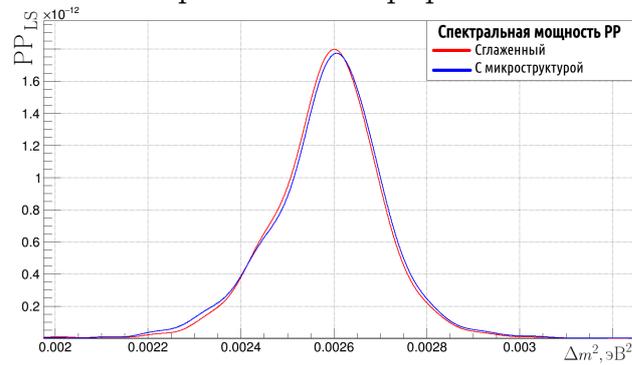
(б) Синус-периодограмма,
обратная иерархия



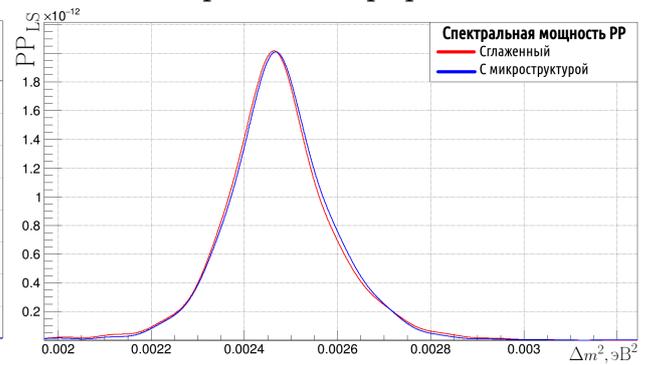
(в) Косинус-периодограмма,
нормальная иерархия



(г) Косинус-периодограмма,
обратная иерархия



(д) Спектральная мощность,
нормальная иерархия



(е) Спектральная мощность,
обратная иерархия

Рисунок 4.8 — Периодограммы Ломба–Скэргла сглаженных спектров и спектров, имеющих микроструктуру

Из рисунков 4.7 и 4.8 видно, что спектральные искажения оказывают в среднем малое влияние на результаты спектрального анализа, никаких существенных изменений образов не происходит и характеристики, на которых основаны критерии определения иерархии (пики, ямы, асимметрия), сохраняют свой вид. Определим абсолютную погрешность Фурье-преобразования $\Delta_{\text{FT}} = |\text{FT}^{(\text{real})} - \text{FT}^{(\text{smooth})}|$ и относительную $\delta_{\text{FT}} = \Delta_{\text{FT}}/\text{FT}^{(\text{real})} \cdot 100\%$, где под FT подразумевается FST, или FCT. График относительной погрешности зависимости от Δm^2 представлен на рисунке 4.9.

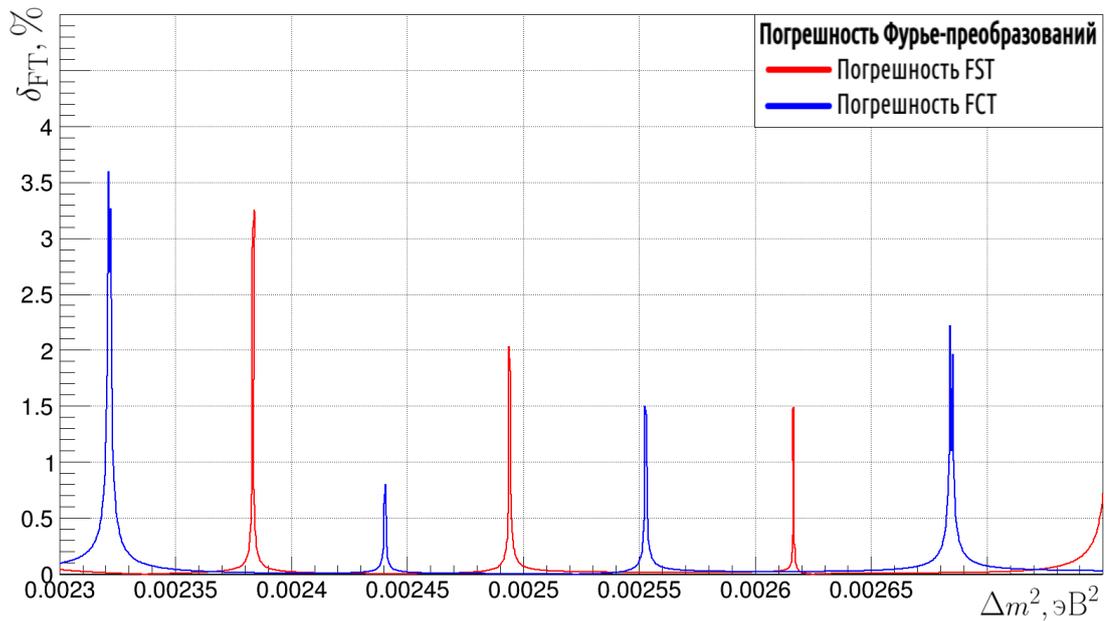


Рисунок 4.9 — Погрешность Фурье-преобразования

В интересующей нас области больших амплитуд Фурье-образов, где строится критерий RL+PV, максимальное значение функции δ_{FT} составляет порядка 3.5% в наихудшем случае, а сама погрешность носит скорее дискретный характер (наблюдаем одиночные пики в нескольких точках, когда на остальном промежутке погрешность практически равна нулю).

Данной численной погрешностью мы в дальнейшем пренебрегать не будем, но тем не менее отметим, что данный эффект, как видно из рисунков 19–21, не несет каких-либо существенных изменений в результатах спектрального анализа. Основное опасение — возникновение эффекта ”псевдоосцилляций” (рисунк 4.5) — не подтверждается.

5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В **части 3** данной работы были изложены основные идеи, которые в дальнейшем реализуются с использованием численных методов, в том числе метода Монте-Карло. Для построения модели необходимо решить следующие задачи:

- 1) Получить явный вид реакторного спектра антинейтрино $\text{Sp}(E, t)$ в любой момент времени $t \in [0; 330]$.
- 2) Получить явный вид функции спектра позитронов (**рисунок 3.2**).
- 3) Используя метод Монте-Карло, получить гистограммы наблюдаемого спектра позитронов для их дальнейшего рассмотрения в качестве экспериментальных данных.

5.1. МОДЕЛЬ РЕАКТОРНОГО СПЕКТРА

Необходимо найти функцию двух переменных $\text{Sp}(E_i, t_k)$, определенную на прямоугольнике $\{E_i \in [E_{min}, E_{max}], t_k \in [1; 330]\}$, используя условия $\text{Sp}(E_i, 1) = b(E_i)$, $\text{Sp}(E_i, 165) = m(E_i)$, $\text{Sp}(E_i, 330) = e(E_i)$.

Из физических соображений будем считать, что функция $\text{Sp}(E_i, t_k)$ непрерывна по своим аргументам. При фиксированной энергии для функции $\text{Sp}(E_i^*, t_k)$ (которая зависит уже только от времени) можно составить интерполяционный полином, имеющий вид параболы $A_i t_k^2 + B_i t_k + C_i$, где коэффициенты A_i , B_i и C_i различны для различных значений E_i^* .

Зная три временных условия $b(E_i)$, $m(E_i)$ и $e(E_i)$, коэффициенты интерполяционной параболы можно восстановить единственным образом. Тогда функцию $\widetilde{\text{Sp}}(E, t)$ можно представить в виде:

$$\widetilde{\text{Sp}}_b(E_i, t) = \frac{A_i t^2 + B_i t + C_i}{A_i + B_i + C_i} \cdot b(E_i), \quad (5.1)$$

которая при $t = 1$ будет удовлетворять условию $\widetilde{\text{Sp}}_b(E_i, 1) = b(E_i)$.

Аналогичным образом можно записать:

$$\widetilde{\text{Sp}}_m(E_i, t) = \frac{A_i t^2 + B_i t + C_i}{A_i 165^2 + B_i 165 + C_i} \cdot m(E_i). \quad (5.2)$$

$$\widetilde{\text{Sp}}_e(E_i, t) = \frac{A_i t^2 + B_i t + C_i}{A_i 330^2 + B_i 330 + C_i} \cdot e(E_i). \quad (5.3)$$

Окончательный вид функции можно задать следующим образом:

$$\widetilde{\text{Sp}}(E_i, t_k) = \begin{cases} \widetilde{\text{Sp}}_b(E_i, t_k), & t_k \in [1; 42] \\ \frac{1}{2} \left(\widetilde{\text{Sp}}_b(E_i, t_k) + \widetilde{\text{Sp}}_m(E_i, t_k) \right), & t_k \in [43; 124] \\ \widetilde{\text{Sp}}_m(E_i, t_k), & t_k \in [125; 207] \\ \frac{1}{2} \left(\widetilde{\text{Sp}}_m(E_i, t_k) + \widetilde{\text{Sp}}_e(E_i, t_k) \right), & t_k \in [208; 289] \\ \widetilde{\text{Sp}}_e(E_i, t_k), & t_k \in [290; 330] \end{cases} \quad (5.4)$$

Полученная функция $\widetilde{\text{Sp}}(E_i, t_k)$ может отличаться искомой $\text{Sp}(E_i, t_k)$ только нормировкой. Рассмотрим

$$N(1) = \int_{E_{min}}^{E_{max}} b(E) dE, \quad N(160) = \int_{E_{min}}^{E_{max}} m(E) dE, \quad N(330) = \int_{E_{min}}^{E_{max}} e(E) dE,$$

где $N(t)$ — число событий за день t ("правильная" нормировка). Для этой функции тоже можно построить интерполяционный полином $A_N t^2 + B_N t + C_N$, также имеющий вид параболы. Коэффициенты A_N , B_N и C_N определяются единственным образом по точкам $\{1; N(1)\}$, $\{165; N(165)\}$, $\{330; N(330)\}$.

В конечном итоге, искомую функцию $\text{Sp}(E_i, t)$ можно представить в виде:

$$\text{Sp}(E_i, t_k) = \widetilde{\text{Sp}}(E_i, t_k) \cdot \frac{A_N t_k^2 + B_N t_k + C_N}{\int_{E_{min}}^{E_{max}} \widetilde{\text{Sp}}(\varepsilon, t_k) d\varepsilon}, \quad (5.5)$$

где второй множитель отвечает за правильную нормировку.

Оценим погрешность интерполяции следующим образом. Рассмотрим функцию $\delta(E_i) = \frac{|\text{Sp}(E_i, 330) - e(E_i)|}{e(E_i)} \cdot 100\%$ (аналогично можно вместо $e(E_i)$ рассмотреть $m(E_i)$ или $b(E_i)$, результаты будут в среднем те же самые), график которой изображен на [рисунке 5.1](#).

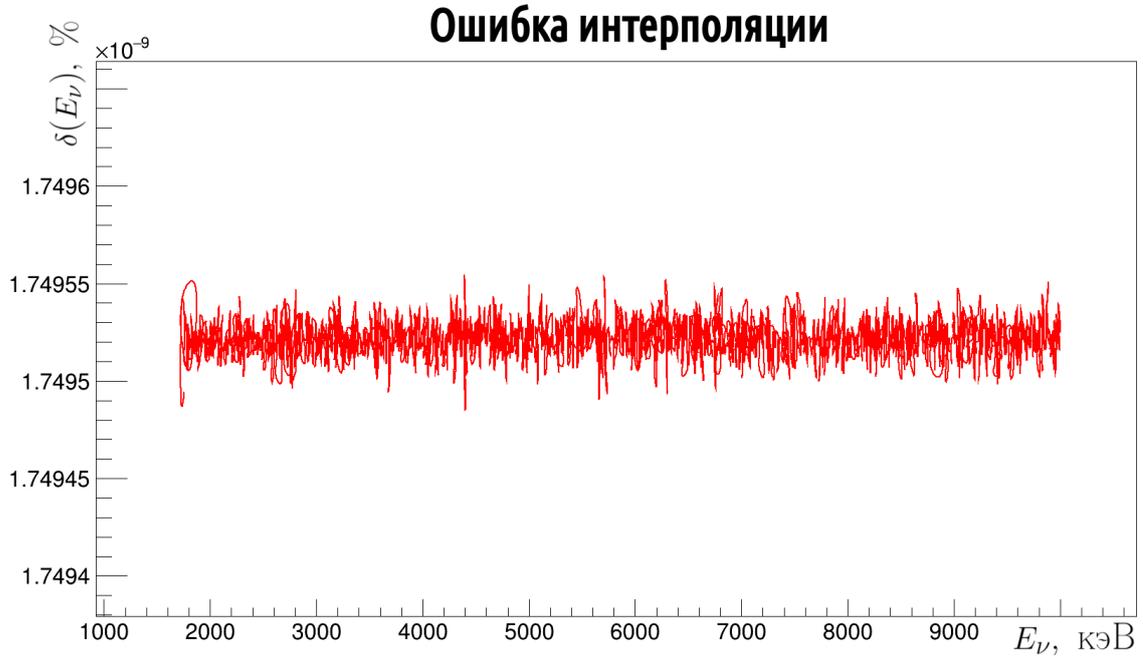


Рисунок 5.1 — Ошибка интерполяции реакторного спектра

Погрешностью $\delta \approx 10^{-9}\%$, очевидно, можно в дальнейшем пренебречь.

5.2. МОДЕЛЬ ПОЗИТРОННОГО СПЕКТРА

Следующим шагом является получение явной функции спектра позитронов $\text{Sp}_e(E_i)$. Согласно формуле (3.6),

$$\widetilde{\text{Sp}}_e(E_i) = \text{Sp} \left(E_i + \frac{2E_i(E_i - \Delta) + \Delta^2 - m_e^2}{2m_p}, t_k \right) \cdot \sigma_0(E_i), \quad (5.6)$$

где под $\text{Sp}(E_i, t_k)$ здесь и в дальнейшем будем понимать спектр реакторных антинейтрино, свернутый с вероятностью выживания. Время t_k будем считать параметром.

Проблема выражения (5.6) заключается в том, что оно неявное и работать с ним достаточно сложно. Вместо этого разобьем отрезок $[E_{\min}, E_{\max}]$ на n достаточно малых отрезков $[E_{p-1}, E_p]$ и на каждом из них интерполируем часть функции $\text{Sp}_e(E_i)$:

$$\text{Sp}_e(E_i) = \begin{cases} P_3^{(1)}(E_i), & E_i \in [E_{\min}; E_1] \\ P_3^{(2)}(E_i), & E_i \in [E_1; E_2] \\ \dots & \dots \\ P_3^{(p)}(E_i), & E_i \in [E_{p-1}; E_p] \\ \dots & \dots \\ P_3^{(n)}(E_i), & E_i \in [E_{n-1}; E_{\max}] \end{cases}, \quad (5.7)$$

где $P_3(E_i)$ — полином третьей степени. Иными словами, исходная функция заменяется сплайном. Всюду в дальнейшем под спектром позитронов Sp_e будем понимать именно выражение (5.7), а под $\widetilde{\text{Sp}}_e$ — неявное выражение (5.6).

Совершенно аналогично, как в случае с реакторными спектрами, рассмотрим функцию ошибок $\delta(E_i) = \frac{|\text{Sp}_e(E_i) - \widetilde{\text{Sp}}_e(E_i)|}{\text{Sp}_e(E_i)} \cdot 100\%$, график которой представлен на рисунке 5.2.



Рисунок 5.2 — Ошибка интерполяции спектра позитронов

Максимальное значение этой функции не превышает $5 \cdot 10^{-4}\%$. Данной погрешностью, как и погрешностью интерполяции реакторных спектров, по сравнению с энергетическим разрешением детектора $\delta E \approx 3\%$ будем пренебрегать.

5.3. МЕТОД МОНТЕ–КАРЛО

Зная явный вид спектра реакторных антинейтрино $\text{Sp}(E_i, t_k)$, спектра позитронов $\text{Sp}_e(E_i)$ и сечения обратного бета-распада, при помощи метода Монте-Карло можно смоделировать реакцию ОБР в рабочем веществе детектора.

Для этого реализуем следующий алгоритм:

- 1) Генерируем два случайных, распределенных по равномерному закону числа t_1 и t_2 из отрезка $[1; 330]$, которые имеют смысл дней работы первого и второго реакторов на начало эксперимента.
- 2) Задаем Δm_{31}^2 и δE — разности квадратов масс массовых состояний и энергетического разрешения соответственно.
- 3) По $t_1, t_2, \Delta m_{31}^2$ и δE строим $\text{Sp}(E_i, t_1)$ и $\text{Sp}(E_i, t_2)$ (реакторные спектры антинейтрино, свернутые с вероятностью выживания $P_{ee}(\Delta m_{31}^2, E_i, L)$). По этим функциям, используя выражение (5.6), воссоздаем спектр позитронов $\widetilde{\text{Sp}}_e(E_i)$, который по формуле (5.7) заменяем сплайном $\text{Sp}_e(E_i)$, после чего сворачиваем его с функцией отклика детектора (3.8).
- 4) (а) Генерируем на единичном квадрате точку с координатами $\{e_1, e_2\}$, координаты $e_1, e_2 \in [0; 1]$ которой будут случайными величинами.
(б) Линейным преобразованием

$$\begin{cases} f_1 = E_{\min} + e_1 \cdot (E_{\max} - E_{\min}), \\ f_2 = k \cdot e_2, \end{cases}$$

где коэффициент k подгоняется таким образом, чтобы из N разыгрываемых антинейтрино порядка 80 дали вклад в счет событий, переведем $\{e_1, e_2\}$ в точку $\{f_1, f_2\}$, которая лежит на прямоугольнике $\{E_{\min} \leq f_1 \leq E_{\max} ; 0 \leq f_2 \leq k\}$

- (в) Нанесем на этот прямоугольник функцию $\text{Sp}_e(E_i)$, которая будет полностью в него вложена.
- (г) Если точка $\{f_1, f_2\}$ лежит под графиком $\text{Sp}_e(E_i)$, то есть выполнено условие $f_2 < \text{Sp}_e(f_1)$, считаем, что реакция ОБР прошла

и учитываем соответствующие событие в гистограмме. Если же это условие не выполняется, будем считать, что антинейтрино не провзаимодействовало с протоном. Рассеяние антинейтрино и возможность взаимодействия с другим протоном в данной модели не учитываем.

(д) Повторяем пункты (а) —(г) N раз (разыгрываем N антинейтрино). Правильная подгонка коэффициента k в пункте 4(б) позволит не рассматривать все возможные антинейтрино из потока (которых порядка 10^{13}), но получить разумное число событий и в разы сократить объем вычислений.

5) К значениям t_1 и t_2 прибавляем по 1, возвращаемся к 4 пункту и проделываем операцию ещё раз. Если $t_1 = 331$ или $t_2 = 331$, ”перезапускаем” реактор с новым топливом, то есть присваиваем значения $t_1 = 1$ или $t_2 = 1$ соответственно.

Таким образом будут получены псевдоэкспериментальные данные эксперимента JUNO за 6 лет работы. На [рисунке 5.3](#) представлен конечный результат — спектр ОБР, полученный вышеизложенным методом.

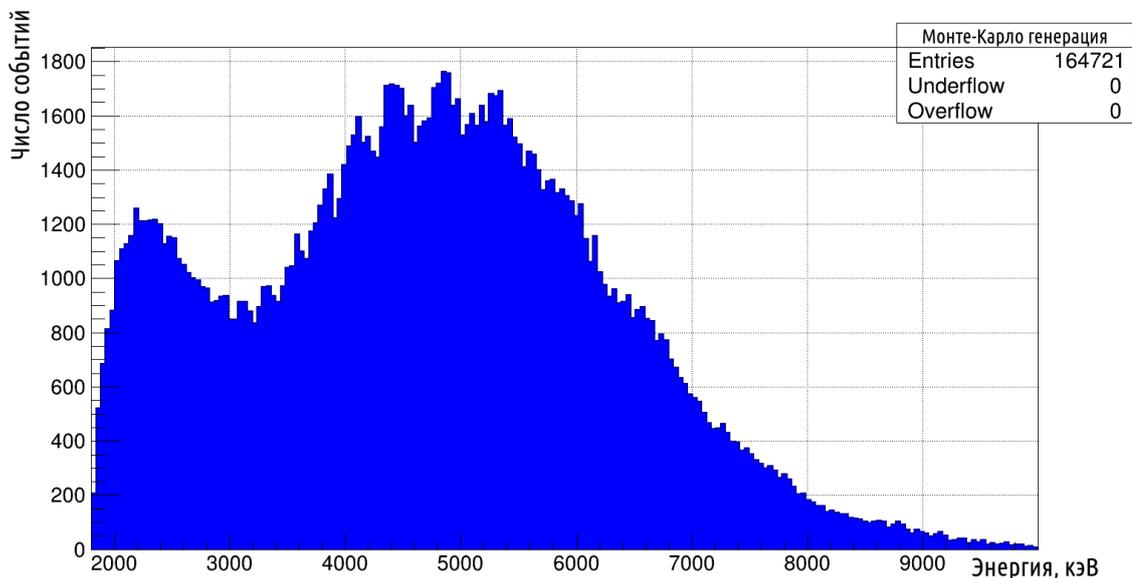


Рисунок 5.3 — Спектр ОБР, полученный методом Монте-Карло

6. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

При помощи созданного Монте-Карло генератора, работа которого описана в предыдущем параграфе, имеется возможность проверить эффективность критериев определения иерархии масс на смоделированных данных и сравнить их эффективность друг с другом. Для этой цели генерируем порядка 5000 вариантов эксперимента JUNO, варьируя разность квадратов масс массовых состояний Δm_{31}^2 для обеих иерархий при фиксированном энергетическом разрешении детектора JUNO $\sigma(E)/\sqrt{E}$ для энергии 1 МэВ.

Распределение разности квадратов масс массовых состояний имеет вид функции Гаусса $N(\Delta m_{31}^2, \Delta(\Delta m_{31}^2))$, где Δm_{31}^2 и $\Delta(\Delta m_{31}^2)$ — среднее значение и его погрешность соответственно, согласно [таблице 1](#). Вид данной функции для нормальной иерархии (для обратной все аналогично) представлен на [рисунке 6.1](#).

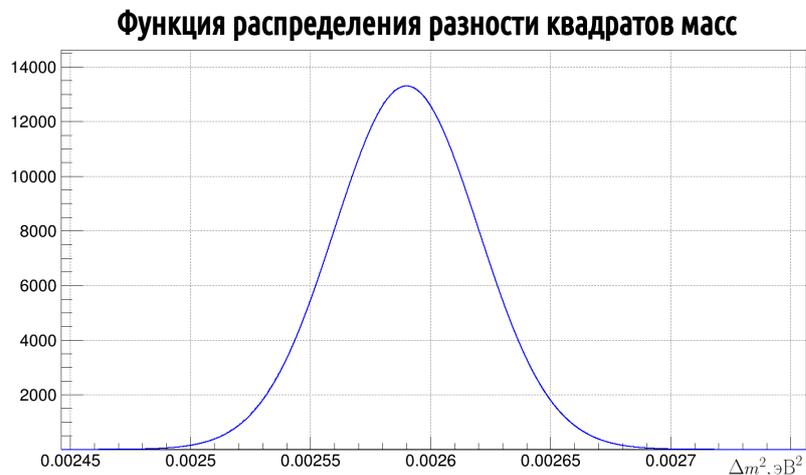
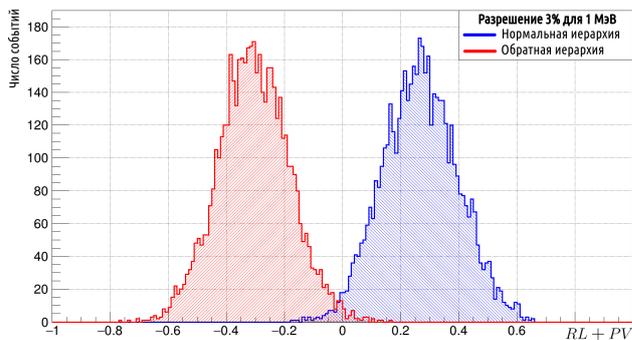
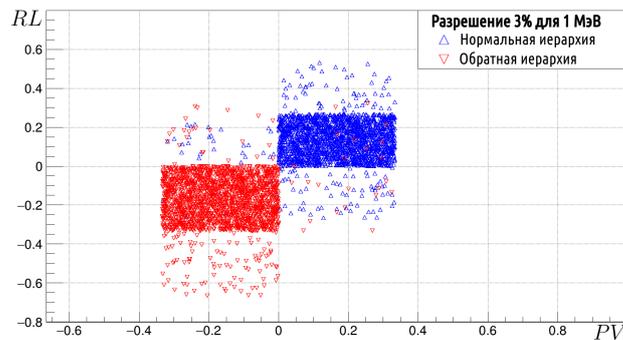


Рисунок 6.1 — Используемая функция распределения разности квадратов масс Δm_{31}^2 , нормальная иерархия

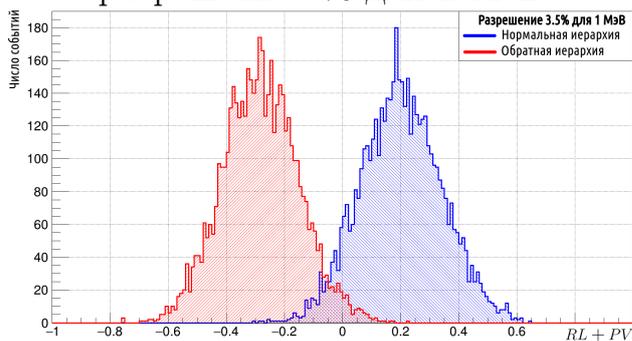
Для каждого из 5000 экспериментов будем получать значения RL и PV и построим в конечном итоге гистограммы для $RL(PV)$ и $f(RL+PV)$. На рисунках [6.2](#) и [6.3](#) представлены полученные распределения для трех основных рассматриваемых энергетических разрешений — 3%, 3.5% и 4% для энергии 1 МэВ.



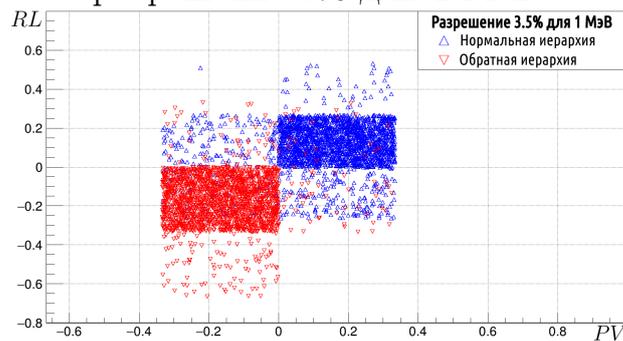
(а) $f(RL + PV)$ Фурье, разрешение 3% для 1 МэВ



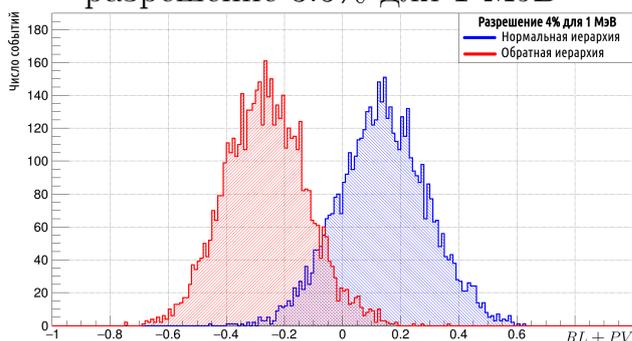
(б) $RL(PV)$ Фурье, разрешение 3% для 1 МэВ



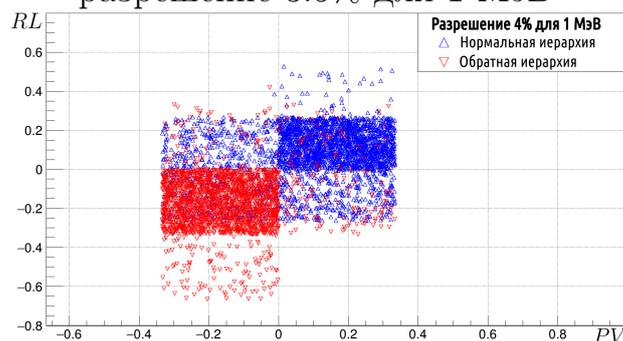
(в) $f(RL + PV)$ Фурье, разрешение 3.5% для 1 МэВ



(г) $RL(PV)$ Фурье, разрешение 3.5% для 1 МэВ

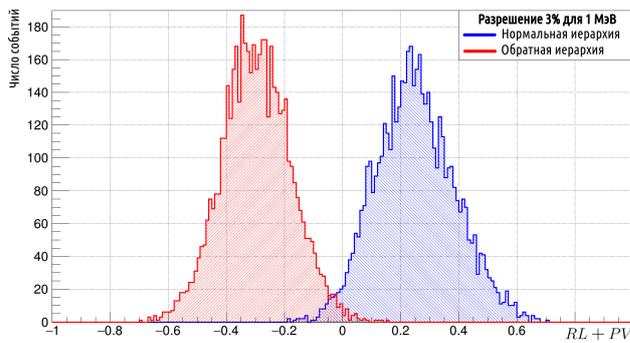


(д) $f(RL + PV)$ Фурье, разрешение 4% для 1 МэВ

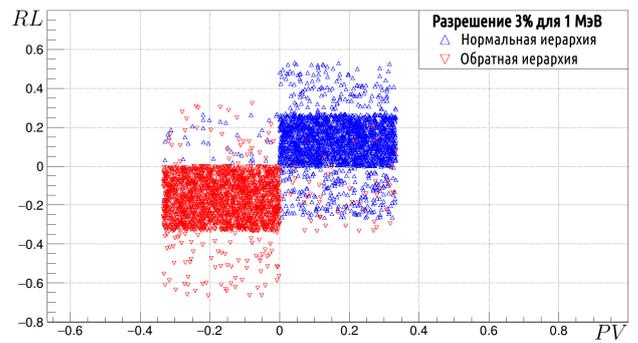


(е) $RL(PV)$ Фурье, разрешение 4% для 1 МэВ

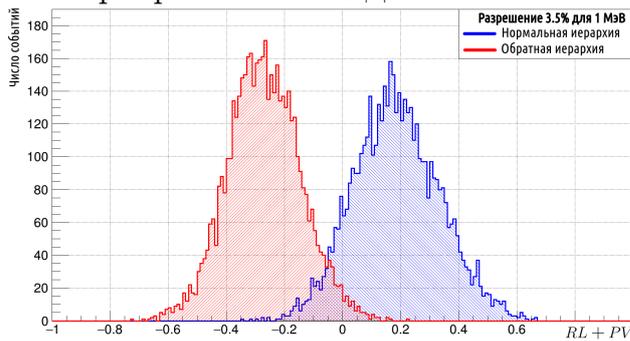
Рисунок 6.2 — Распределения $RL + PV$ Фурье-преобразования для различных энергетических разрешений



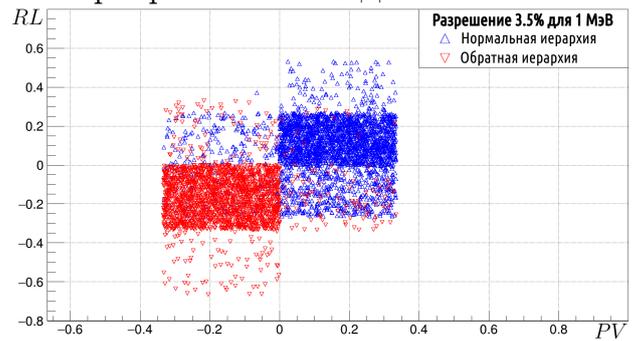
(а) $f(RL + PV)$ периодограмм, разрешение 3% для 1 МэВ



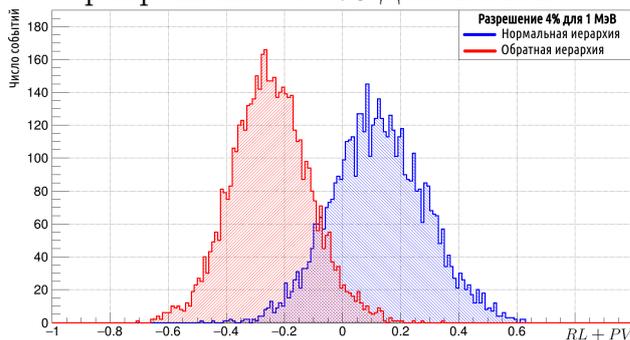
(б) $RL(PV)$ периодограмм, разрешение 3% для 1 МэВ



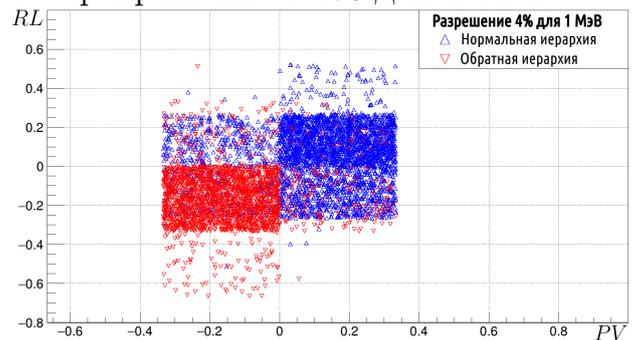
(в) $f(RL + PV)$ периодограмм, разрешение 3.5% для 1 МэВ



(г) $RL(PV)$ периодограмм, разрешение 3.5% для 1 МэВ



(д) $f(RL + PV)$ периодограмм, разрешение 4% для 1 МэВ



(е) $RL(PV)$ периодограмм, разрешение 4% для 1 МэВ

Рисунок 6.3 — Распределения $RL + PV$ периодограмм Ломба-Скэргла для различных энергетических разрешений

Из рисунков 6.2 и 6.3 видно, что область перекрытия функций распределения увеличивается с ухудшением энергетического разрешения, что и требовалось ожидать — чем хуже разрешение детектора, тем труднее различить осцилляционные эффекты (рисунки 3.3 — 3.5), тем хуже работают критерии. Также очевидно, что чем меньше перекрываются функции распределения, тем более статистически значимым можно считать результат эксперимента.

Помимо критерия $RL + PV$, для разрешения 3% для энергии 1 МэВ была построена функция распределения критерия асимметрии, представленная на рисунке 6.4 (распределение строилось по величине $-\gamma$ для общности с критерием $RL + PV$).

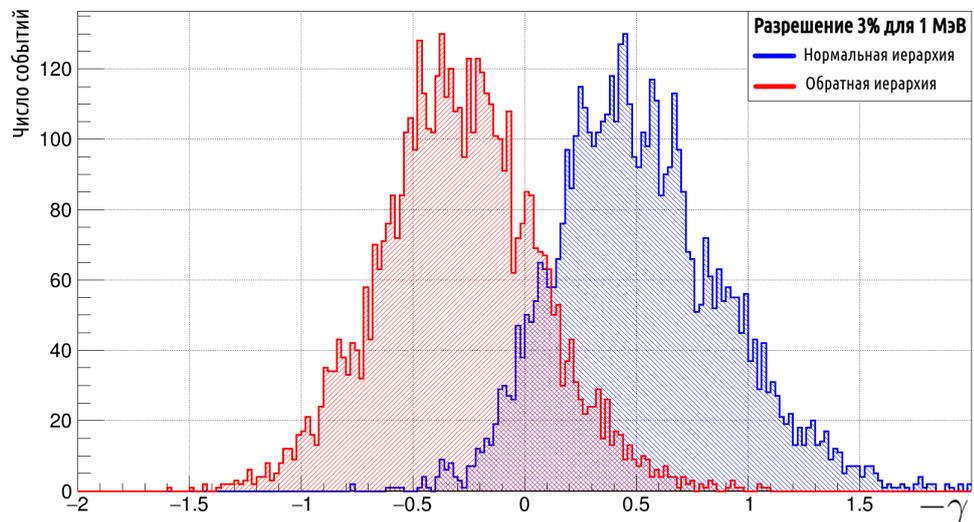


Рисунок 6.4 — Функция распределения критерия асимметрии для энергетического разрешения 3% для энергии 1 МэВ

Для количественной оценки эффективности критериев профитируем все полученные гистограммы нормальным распределением Гаусса $N(\mu, \sigma^2)$. Результаты фита критерия асимметрии (здесь индекс N указывает на нормальную иерархию, индекс I — на обратную):

$$\begin{aligned} \mu_N &= 0.516 \pm 0.006, \quad \sigma_N = 0.348 \pm 0.004, \quad \chi_N^2/\text{ndf} = 304.8/120, \\ \mu_I &= -0.294 \pm 0.005, \quad \sigma_I = 0.344 \pm 0.004, \quad \chi_I^2/\text{ndf} = 138.5/118, \end{aligned}$$

Результаты фитов критериев $RL + PV$ для Фурье-преобразования и периодограмм Ломба–Скэргла представлены в таблицах 4 и 5.

Таблица 4 — Результаты фитирования гистограмм критерия $RL + PV$ для преобразования Фурье

	Нормальная иерархия, FT			Обратная иерархия, FT		
	μ	σ	χ^2/ndf	μ	σ	χ^2/ndf
2.50%	0.3377 ± 0.0023	0.1099 ± 0.0017	63.77/65	-0.3333 ± 0.0022	0.1088 ± 0.0017	68.69/64
2.75%	0.3027 ± 0.0023	0.1120 ± 0.0020	86.87/66	-0.3184 ± 0.0023	0.1127 ± 0.0018	59.81/65
3.00%	0.2675 ± 0.0018	0.1270 ± 0.0010	77.04/80	-0.3059 ± 0.0017	0.1202 ± 0.0013	68.94/82
3.25%	0.2360 ± 0.0030	0.1219 ± 0.0019	81.49/71	-0.2934 ± 0.0024	0.1176 ± 0.0018	81.72/68
3.50%	0.2027 ± 0.0020	0.1380 ± 0.0010	84.81/89	-0.2822 ± 0.0019	0.1290 ± 0.0010	89.33/86
3.75%	0.1698 ± 0.0027	0.1298 ± 0.0019	111.1/81	-0.2765 ± 0.0026	0.1266 ± 0.0021	113.3/71
4.00%	0.1400 ± 0.0021	0.1503 ± 0.0016	85.17/95	-0.2658 ± 0.0020	0.1378 ± 0.0015	99.23/89

Таблица 5 — Результаты фитирования гистограмм критерия $RL + PV$ для периодограмм Ломба–Скэргла

	Нормальная иерархия, P _{LS}			Обратная иерархия, P _{LS}		
	μ	σ	χ^2/ndf	μ	σ	χ^2/ndf
2.50%	0.3139 ± 0.0024	0.1173 ± 0.0018	69.24/71	-0.3253 ± 0.0019	0.0951 ± 0.0015	61.58/61
2.75%	0.2836 ± 0.0026	0.1236 ± 0.0020	84.16/72	-0.3115 ± 0.0022	0.1073 ± 0.0018	76.33/60
3.00%	0.2502 ± 0.0020	0.1326 ± 0.0014	127.5/82	-0.2972 ± 0.0017	0.1163 ± 0.0012	75.26/78
3.25%	0.2194 ± 0.0028	0.1312 ± 0.0020	107.5/79	-0.2831 ± 0.0023	0.1106 ± 0.0017	77.5/66
3.50%	0.1856 ± 0.0021	0.1460 ± 0.0020	97.85/91	-0.2695 ± 0.0018	0.1237 ± 0.0014	74.62/81
3.75%	0.1580 ± 0.0030	0.142 ± 0.0020	85.57/86	-0.2607 ± 0.0024	0.1176 ± 0.0021	84.06/68
4.00%	0.1251 ± 0.0023	0.1589 ± 0.0017	102/99	-0.2484 ± 0.0019	0.1316 ± 0.0015	71.49/87

Определим условные мощности критерия $RL + PV$ следующим образом:

$$(1 - \beta)_N = P_{\text{NMH}}(RL + PV > 0) = \int_0^{+\infty} N(RL + PV) d(RL + PV), \quad (6.1)$$

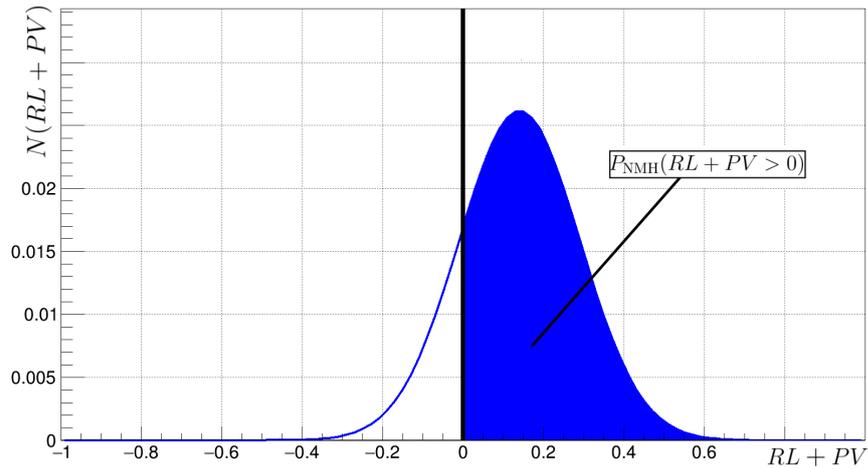


Рисунок 6.5 — Условная мощность критерия $RL + PV$ определения нормальной иерархии при энергетическом разрешении 4% для 1 МэВ

$$(1 - \beta)_I = P_{\text{IMH}}(RL + PV < 0) = \int_{-\infty}^0 I(RL + PV) d(RL + PV). \quad (6.2)$$

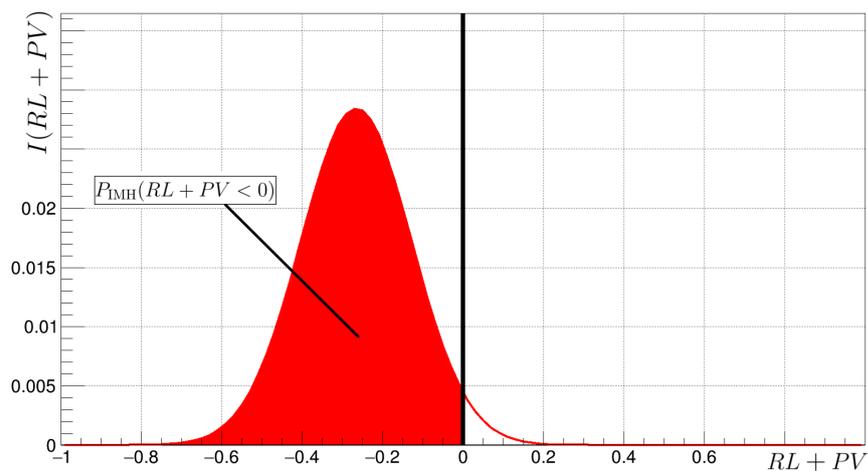


Рисунок 6.6 — Условная мощность критерия $RL + PV$ определения обратной иерархии при энергетическом разрешении 4% для 1 МэВ

Аналогично определяется условные мощности критерия асимметрии:

$$(1 - \beta)_{N,\gamma} = P_{\text{NMH}}(-\gamma > 0) = \int_0^{+\infty} N(-\gamma)d(-\gamma) = 0.9309, \quad (6.3)$$

$$(1 - \beta)_{I,\gamma} = P_{\text{IMH}}(-\gamma < 0) = \int_{-\infty}^0 I(-\gamma)d(-\gamma) = 0.8036. \quad (6.4)$$

Введенный термин «условная мощность» имеет следующий смысл: с вероятностью $(1 - \beta)_N$ на основании критерия будет принята гипотеза о нормальной иерархии при условии, что иерархия действительно нормальна. Величина β здесь фактически является ошибкой второго рода.

В данной работе не будем выделять конкретную нулевую гипотезу, а поступим следующим образом: считая, что иерархии масс априори равновероятны, в качестве результирующей мощности статистического критерия примем

$$(1 - \beta) = 1/2(1 - \beta)_N + 1/2(1 - \beta)_I, \quad (6.5)$$

где величина $(1 - \beta)$ имеет смысл вероятности того, что иерархия масс на основании данного критерия будет определена правильно в принципе (независимо от того, какая она). Причина такого подхода будет объяснена ниже.

Определенная выше результирующая мощность критерия является функцией энергетического разрешения детектора. В случае рассмотренного критерия асимметрии имеем

$$(1 - \beta)_{\gamma}(3\%) = 1/2 \cdot 0.9309 + 1/2 \cdot 0.8036 = 0.8673, \quad (6.6)$$

что означает, что с вероятностью порядка 87% на основании критерия асимметрии при энергетическом разрешении детектора 3% для энергии 1 МэВ иерархия будет определена правильно.

В таблицах 6, 7 представлены полученные условные и результирующие мощности для критерия $RL + PV$ при различных энергетических разрешениях детектора.

Таблица 6 — Мощности критерия $RL + PV$ для преобразования Фурье

	Преобразование Фурье		
	$(1 - \beta)_N$	$(1 - \beta)_I$	$(1 - \beta)$
2.50%	0.9989 ± 0.0003	0.9989 ± 0.0002	0.9989 ± 0.0004
2.75%	0.9966 ± 0.0009	0.9976 ± 0.0005	0.9971 ± 0.0010
3.00%	0.9824 ± 0.0014	0.9945 ± 0.0007	0.9885 ± 0.0016
3.25%	0.974 ± 0.004	0.9937 ± 0.0011	0.983 ± 0.004
3.50%	0.929 ± 0.004	0.9857 ± 0.0012	0.957 ± 0.004
3.75%	0.905 ± 0.007	0.986 ± 0.002	0.945 ± 0.008
4.00%	0.824 ± 0.007	0.973 ± 0.002	0.899 ± 0.008

Таблица 7 — Мощности критерия $RL + PV$ для периодограмм Ломба–Скэргла

	Периодограммы Ломба–Скэргла		
	$(1 - \beta)_N$	$(1 - \beta)_I$	$(1 - \beta)$
2.50%	0.9963 ± 0.0008	0.9997 ± 0.0001	0.9980 ± 0.0008
2.75%	0.9891 ± 0.0017	0.9982 ± 0.0005	0.9937 ± 0.0018
3.00%	0.970 ± 0.002	0.9947 ± 0.0008	0.984 ± 0.002
3.25%	0.953 ± 0.005	0.9947 ± 0.0009	0.974 ± 0.005
3.50%	0.898 ± 0.005	0.987 ± 0.002	0.942 ± 0.006
3.75%	0.867 ± 0.008	0.985 ± 0.002	0.926 ± 0.009
4.00%	0.784 ± 0.007	0.975 ± 0.003	0.880 ± 0.008

Погрешности к мощностям, указанные в таблицах 6 и 7, были получены по следующей идее: чем ближе среднее значение распределения к нулю и чем шире это распределение, тем ниже значение мощности. Указанные параметры варьируются в пределах погрешностей, указанных в таблицах 4 и 5, что позволяет определить верхнюю и нижнюю границы мощности для данного энергетического разрешения.

На рисунках 6.7–6.9 представлены графики зависимости мощностей от энергетического разрешения, согласно данным таблиц 6 и 7.

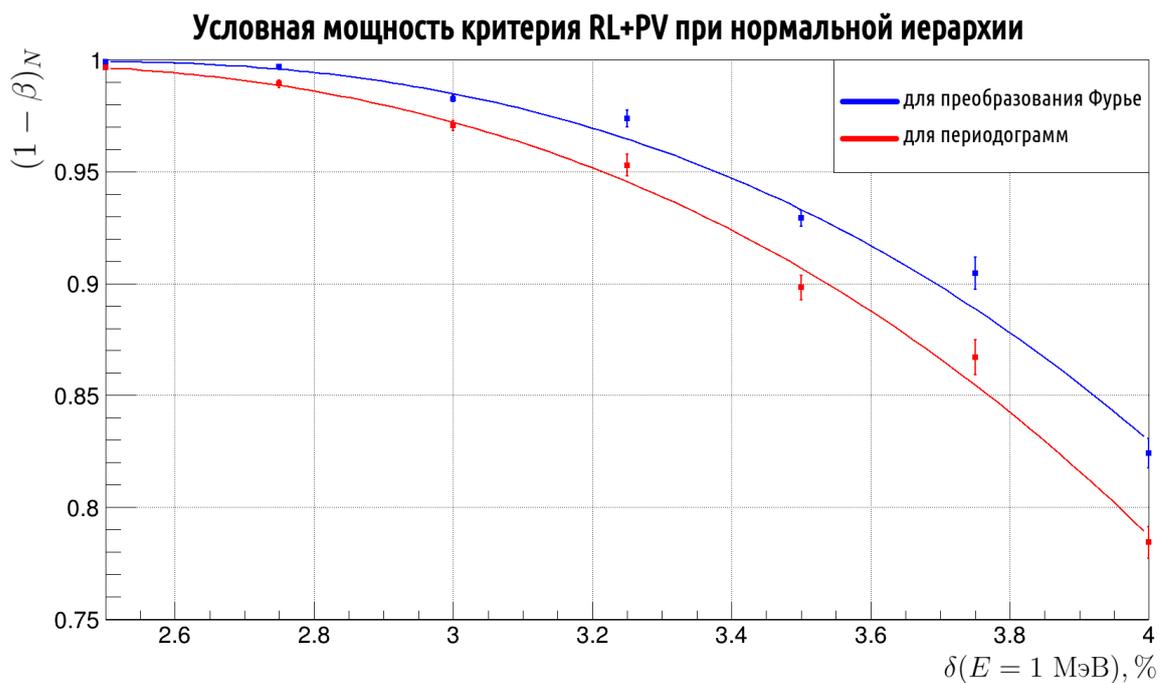


Рисунок 6.7 — Условная мощность критерия $RL + PV$ при нормальной иерархии

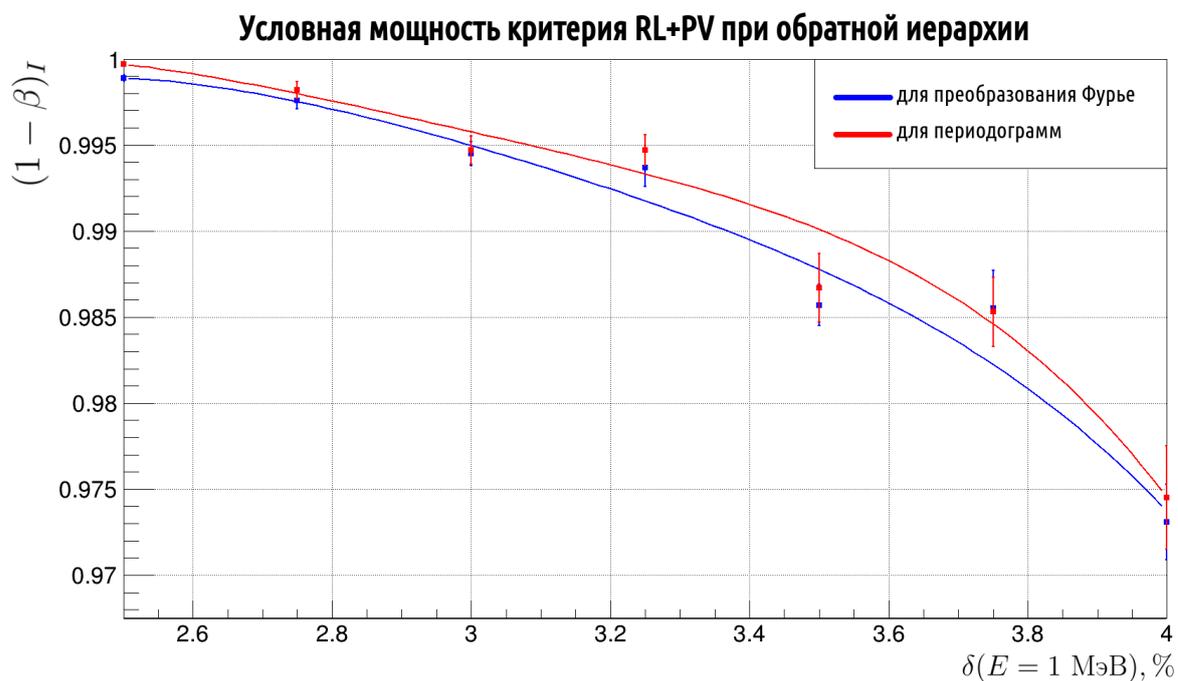


Рисунок 6.8 — Условная мощность критерия $RL + PV$ при обратной иерархии

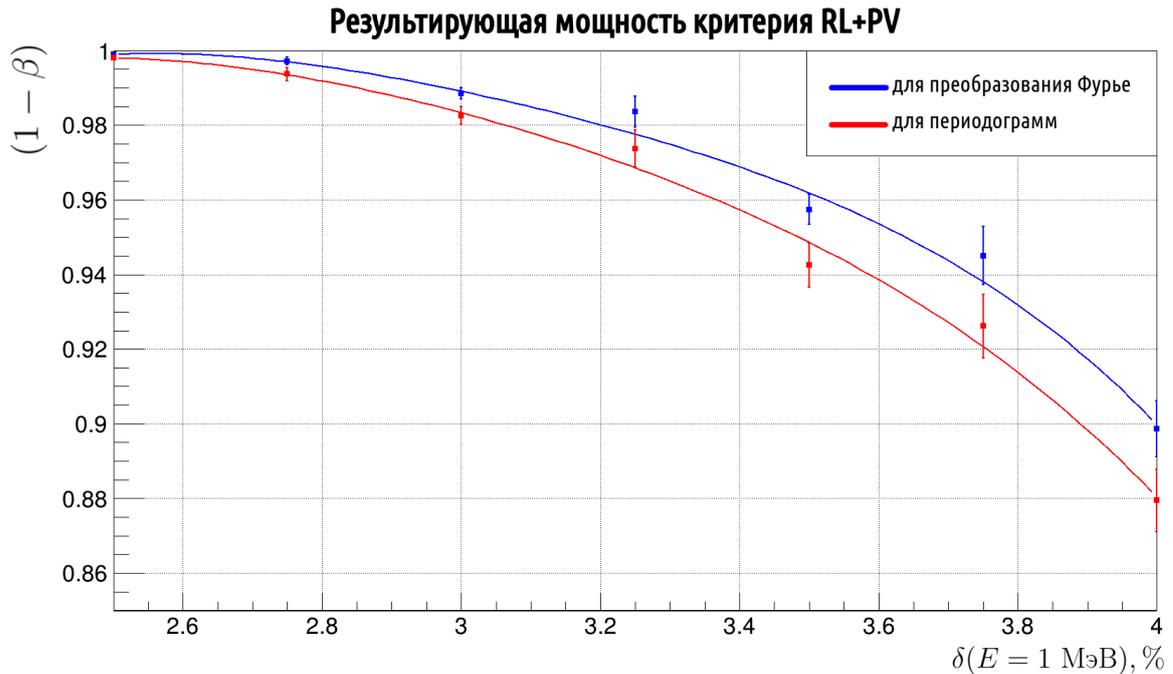


Рисунок 6.9 — Результирующая мощность критерия $RL + PV$

Как видно из графиков, периодограммный метод обладает большей мощностью, если реализована обратная иерархия и худшей в противном случае. В конечном итоге, в рассматриваемом диапазоне энергетических разрешений, как видно из [рисунка 6.9](#), периодограммы уступают Фурье-преобразованию. Дополнительно отметим, что критерий $RL + PV$ в случае обратной иерархии более устойчив к энергетическому разрешению для обоих методов — в диапазоне разрешений от 3% до 4% при обратной иерархии мощность уменьшается в среднем в 1.02 раза, при нормальной же — в 1.2 раза.

Описанная выше различная чувствительность критериев к иерархии не может позволить однозначно выбрать нулевую гипотезу, что оправдывает введение условных и результирующей мощностей.

При заверенном разрешении детектора JUNO 3% для энергии 1 МэВ критерий Фурье по итогам статистического анализа дает наилучшие результаты — вероятность правильного определения иерархии составляет 99%. Периодограммный метод дает несколько худший результат — порядка 98%. Критерий асимметрии оказывается самым неэффективным из предложенных — истинная гипотеза на его основании принимается с вероятностью 87% (по этой причине мы не рассматривали его подробнее).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа посвящена анализу чувствительности реакторного эксперимента JUNO, в котором планируется определить иерархию масс нейтрино

В теоретической части работы была показана связь масс нейтрино и явления нейтринных осцилляций, проведен обзор реакторных экспериментов в целом. Было рассмотрено влияние осцилляций на наблюдаемые спектры, показано, каким образом на эксперименте проявляется иерархия масс, описаны и предложены методики и критерии её определения.

В процессе работы при помощи численных методов и метода Монте-Карло на основании представленной теоретической базы была создана программа-генератор, моделирующая реакторный эксперимент в простейшем приближении, принимающая на вход внешние параметры (времена работы реакторов на начало эксперимента и его длительность для учета эволюции реакторных спектров, расстояния от детектора до реакторов, характеристики рабочего вещества и энергетическое разрешение детектора и иерархию масс нейтрино) и возвращающая псевдоэкспериментальные данные в виде гистограммы.

При помощи созданного генератора был смоделирован эксперимент JUNO, с использованием статистического анализа проверены на эффективность три способа определения иерархии масс — метод Фурье, периодограммный метод и метод, основанный на асимметрии спектральной мощности. Было показано, что из представленных наилучшие статистические результаты дает метод Фурье.

Помимо вышеизложенного, в данной работе показано, что эффекты, вызванные эволюцией топливного состава реактора, не приводят к существенному ухудшению экспериментальных данных и работы критериев. Проведен анализ чувствительности эксперимента к энергетическому разрешению детектора, показана зависимость статистической мощности критериев от последнего. Дополнительное внимание было уделено проблеме

спектральных искажений — показано, что эффекта ”псевдоосцилляций” за счет них не возникает, вклад искажений в определение иерархии несущественен.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] The formalism of neutrino oscillations: an introduction / G. Fantini [и др.]
// arXiv e-prints. — 2018. — февр. — 85 с. — arXiv:[1802.05781](#) [[hep-ph](#)]
- [2] Z. Xing, S. Zhou. Neutrinos in Particle Physics, Astronomy and Cosmology
// Zhejiang University Press, Hangzhou. — 2011. — май. — с. 69–79
- [3] Neutrino physics with JUNO / F. An [и др.] // Journal of Physics G:
Nuclear Physics. — 2016. — март. — т. 43, №3 — 188 с. — arXiv:[1507.05613](#)
[[physics.ins-det](#)]
- [4] Determination of the neutrino mass hierarchy at an intermediate baseline
/ L. Zhan [и др.] // Phys. Rev. — 2008. — дек. — т. 78, №11. — 5 с. —
arXiv:[0807.3203](#) [[hep-ex](#)]
- [5] Forero D. V., Hawkins R., Huber P. The benefits of a near detector for
JUNO // arXiv e-prints. — 2017. — окт. — 4 с. — arXiv:[1710.07378](#)
[[hep-ph](#)]
- [6] Hayes A. C., Vogel P. Reactor Neutrino Spectra // Annual Review of
Nuclear and Particle Science. — 2016. — окт. — т. 66, №1. — 30 с.
— arXiv:[1605.02047](#) [[hep-ph](#)]
- [7] Huber P. Determination of antineutrino spectra from nuclear reactors //
Phys. Rev. — 2011. — авг. — т. 84, №2 — 20 с. — arXiv:[1106.0687](#)
[[hep-ph](#)]
- [8] Improved predictions of reactor antineutrino spectra / Mueller T. A. [и др.]
// Phys. Rev. — 2011. — май. — т. 83, №5. — 17 с. — arXiv:[1101.2663](#)
[[hep-ex](#)]
- [9] Kopeikin V. I. Flux and spectrum of reactor antineutrinos // Phys. Atom.
Nucl. — 2012. — апр. — т.75, №2 — 10 с.

- [10] Danielson D. L., Hayes A. C., Garvey G. T. Reactor neutrino spectral distortions play little role in mass hierarchy experiments // Phys. Rev. — 2019. — февр. — т. 99, №3. — 11 с. — arXiv:1808.03276 [hep-ph]
- [11] Akhmedov E. Quantum mechanics aspects and subtleties of neutrino oscillations // arXiv e-prints. — 2019. — янв. — 24 с. — arXiv:1901.05232 [hep-ph]
- [12] Review of Particle Physics / М. Tanabashi [и др.] // Phys. Rev. D. — 2018. — авг. — т. 98, вып. 3. — с. 38
- [13] Roskovec B. Neutrino Physics with Reactors // arXiv e-prints. — 2018. — дек. — 10 с. — arXiv:1812.03206 [hep-ex]
- [14] Ольшевский А. Г. Результаты и перспективы нейтринных реакторных экспериментов // Успехи физических наук. — 2014. — сент. — т. 184, №.5 — 6 с.
- [15] Гончар М.О. Измерение угла смешивания θ_{13} и расщепления масс нейтрино Δm_{32}^2 в эксперименте Daya Bay // дисс. ... канд. ф.-м. наук: 01.04.16 / ОИЯИ, Дубна — 2017. — с.43-61
- [16] Sonzogni A. A., Nino M., McCutchan E. A. Revealing fine structure in the antineutrino spectra from a nuclear reactor // Phys. Rev. — 2018. — июль. — т. 98, №1. — 5 с. — arXiv:1710.00092 [nucl-th]
- [17] Жидкий сцинтиллятор на основе линейного алкилбензола/ Немченко И.Б. [и др.] // Письма в ЭЧАЯ. — 2011. — т.8, №2 — 10 с.
- [18] Фаянс С.А. Радиационные поправки и эффекты отдачи в реакции $\tilde{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$ при низких энергиях // Ядерная физика. — 1985. — т. 42, вып. 4(10) — 12 с.
- [19] Окунь Л.Б. Лептоны и кварки // Изд. 4-е. — М.: Издательство ЛКИ — 2008. — 345 с.

- [20] Ciuffoli E., Evslin J., Mohammed H. Uncertainty in the reactor neutrino spectrum and mass hierarchy determination // Journal of High Energy Physics. — 2019. — окт. — т. 2019, №10. — 19 с. — arXiv:[1907.02309v1](https://arxiv.org/abs/1907.02309v1) [[hep-ph](https://arxiv.org/archive/hep)]
- [21] Determination of Neutrino Mass Hierarchy and θ_{13} With a Remote Detector of Reactor Antineutrinos / Learned J.H. [и др.] // Phys. Rev. — 2008. — окт. — т. 78, №7. — 6 с. — arXiv:[0612022](https://arxiv.org/abs/0612022)
- [22] VanderPlas J. T. Understanding the Lomb–Scargle Periodogram // The Astrophysical Journal. — 2018. — май. — т. 236, №1. — 55 с. — arXiv:[1703.09824](https://arxiv.org/abs/1703.09824) [[astro-ph.IM](https://arxiv.org/archive/astro)]

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ВЫЧИСЛЕНИЕ СЕЧЕНИЯ ОБР В "НАИВНОМ" ПРИБЛИЖЕНИИ

Всюду в дальнейшем будем работать в естественной системе единиц $\hbar = c = 1$, использовать метрику Минковского $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ и следующий базис γ -матриц:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{1} = \text{diag}(1, 1)$ – единичная матрица, σ_i – матрицы Паули. 4-импульсы обозначаются заглавными буквами, 3-импульсы – строчными.

Диаграмма процесса в приближении четырехфермионной теории слабого взаимодействия Ферми представлена ниже:

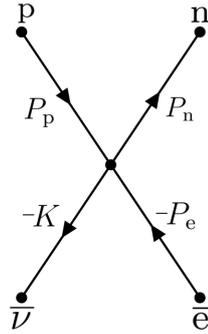


Рисунок А.1 — Диаграмма Фейнмана реакции ОБР

Матричный элемент имеет вид

$$M = \frac{G_F \cos \theta_c}{\sqrt{2}} \cdot (\bar{u}_n O'_\alpha u_p) \cdot (\bar{\nu}_\nu O^\alpha \nu_e). \quad (\text{A.1})$$

Здесь $O'_\alpha = \gamma_\alpha (g_v - g_a \gamma_5)$, $O^\alpha = \gamma^\alpha (1 + \gamma_5)$, G_F – постоянная Ферми, θ_c – угол смешивания Кабиббо, g_v и g_a – векторный и аксиальный форм-

факторы — вещественные функции квадрата переданного импульса (в низкоэнергетическом приближении будем считать их постоянными величинами).

Сопряженный матричный элемент

$$M^\dagger = \frac{G_F \cos \theta_c}{\sqrt{2}} \cdot (\bar{v}_e O^\beta v_\nu) \cdot (\bar{u}_p O'_\beta u_n) . \quad (\text{A.2})$$

Умножим (A.1) на (A.2) и просуммируем по поляризациям:

$$|M|^2 = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_c}{2} \cdot \sum_{\text{spin}} \bar{u}_n O'_\alpha u_p \bar{v}_\nu O^\alpha v_e \bar{v}_e O^\beta v_\nu \bar{u}_p O'_\beta u_n . \quad (\text{A.3})$$

Используя выражения для матрицы плотности:

$$\sum_s u(s) \bar{u}(s) = \hat{P} + m \quad , \quad \sum_s v(s) \bar{v}(s) = \hat{P} - m, \quad (\text{A.4})$$

где $\hat{P} = P_\mu \gamma^\mu$, получим

$$|M|^2 = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_c}{2} \cdot \text{Sp} \left\{ (\hat{P}_e + m_e) O'_\alpha (\hat{P}_p + m_p) O'_\beta \right\} \cdot \text{Sp} \left\{ \hat{K} O^\alpha (\hat{P}_e - m_e) O^\beta \right\} . \quad (\text{A.5})$$

После подсчета следов имеем окончательное выражение:

$$|M|^2 = 32 G_F^2 \cos^2 \theta_c (A (P_n K)(P_p P_e) + B (P_n P_e)(K P_p) - C m_n m_p (K P_e)) , \quad (\text{A.6})$$

где введены обозначения $A = (g_v - g_a)^2$, $B = (g_v + g_a)^2$ и $C = g_v^2 - g_a^2$.

Дифференциальное сечение для реакции $a+b \rightarrow 1+2$ записывается в следующей инвариантной форме:

$$d\sigma = \frac{1}{(2S_a + 1)} \cdot \frac{1}{(2S_b + 1)} \cdot \frac{|M|^2}{4 j_{\text{inv}}} d\Phi_{12} , \quad (\text{A.7})$$

где $j_{\text{inv}} = \sqrt{(P_a P_b)^2 - m_a^2 m_b^2}$, $d\Phi_{12}$ — дифференциал инвариантного фазового объема частиц 1 и 2, а множители $\frac{1}{2S+1}$ отвечают за усреднение по спинам начальных частиц.

В нашем случае усреднение проводится только по спиновым состоя-

ниям протона, $j_{\text{inv}} = (KP_p)$ в очевидном пренебрежении массой антинейтрино.

Таким образом

$$d\sigma = \frac{4G_F^2 \cos^2 \theta_c}{(KP_p)} (A(P_n K)(P_p P_e) + B(P_n P_e)(KP_p) - C m_n m_p (KP_e)) d\Phi_{\text{en}}, \quad (\text{A.8})$$

$$d\Phi_{\text{en}} = \frac{d^3 p_e}{2E_e (2\pi)^3} \frac{d^3 p_n}{2E_n (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(K + P_p - P_e - P_n). \quad (\text{A.9})$$

Проинтегрируем каждое слагаемое матричного элемента по отдельности.

Для удобства введем $q = K + P_p$.

Первое слагаемое: $(P_n K)(P_e P_n) = P_n^\mu K_\mu P_e^\delta P_{p\delta}$. Инвариантный интеграл имеет вид

$$I^{\mu\delta} = \int P_n^\mu P_e^\delta \frac{d^3 p_e}{2E_e (2\pi)^3} \frac{d^3 p_n}{2E_n (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - P_e - P_n). \quad (\text{A.10})$$

Интегрирование ведется по позитрону и нейтрону, q же является внешним параметром и войдет в ответ — интеграл должен иметь вид следующей тензорной комбинации:

$$I^{\mu\delta} = (N q^2 g^{\mu\delta} + M q^\mu q^\delta) \Phi_{\text{en}}. \quad (\text{A.11})$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов N и M умножим левую и правую части (A.11) на $g_{\mu\delta}$. Получим:

$$\int (P_n P_e) \frac{d^3 p_e}{2E_e (2\pi)^3} \frac{d^3 p_n}{2E_n (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - P_e - P_n) = (4N q^2 + M q^2) \Phi_{\text{en}}. \quad (\text{A.12})$$

Возведение в квадрат закона сохранения 4-импульса $q = P_e + P_n$ и пренебрежение массой электрона по сравнению с массой нейтрона дает $(P_e P_n) = 1/2 \cdot (q^2 - m_n^2)$. Имеем

$$\frac{q^2 - m_n^2}{2} \int d\Phi_{\text{en}} = \frac{q^2 - m_n^2}{2} \Phi_{\text{en}} = (4N q^2 + M q^2) \Phi_{\text{en}}, \quad (\text{A.13})$$

$$q^2 - m_n^2 = 8N q^2 + 4M q^2. \quad (\text{A.14})$$

Совершенно аналогичным образом, домножив (A.11) на $q_\mu q_\delta$ и также используя закон сохранения, получим второе уравнение

$$q^4 - m_n^4 = (4N q^4 + 4M q^4). \quad (\text{A.15})$$

Из уравнений (A.14) и (A.15) находятся искомые коэффициенты N и M:

$$N = \frac{(q^2 - m_n^2)^2}{12q^4}, \quad M = \frac{(q^2 - m_n^2)(q^2 + 2m_n^2)}{6q^4}. \quad (\text{A.16})$$

Действуя аналогичным образом для остальных слагаемых матричного элемента, получим в результате следующее выражение для сечения

$$\sigma = \frac{4G_F^2 \cos^2 \theta_c}{(KP_p)} \left(AK^\mu P_p^\delta I_{\mu\delta} + B(KP_p) \frac{q^2 - m_n^2}{2} - C m_n m_p (Kq) \frac{q^2 - m_n^2}{2q^2} \right) \Phi_{\text{en}}. \quad (\text{A.17})$$

Подставляя сюда (A.11) вместе с найденными коэффициентами (A.16), сворачивая по всем несвернутым индексам и используя следующие равенства: $(Kq) = (KP_p)$, $(P_p q) = (KP_p) + m_p^2$, $(KP_p) = 1/2(q^2 - m_p^2)$, получаем следующее выражение

$$\sigma = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_c (q^2 - m_n^2)}{3q^4} (2A(q^4 + m_p^2 m_n^2) + Aq^2(m_n^2 + m_p^2) + 6Bq^4 - 6Cq^2 m_n m_p) \Phi_{\text{en}}. \quad (\text{A.18})$$

Упростим (A.18), используя следующие соображения:

- 1) $q^2 = (K + P_p)^2 = m_p^2 (1 + 2E_\nu/m_p) \approx m_p^2$ – будем пренебрегать отдачей (считать протон/нейтрон бесконечно тяжелым) – интересующие нас реакторные антинейтрино имеют энергию не более 10 МэВ, что существенно меньше массы протона.
- 2) $m_n = m_p + \Delta$, слагаемыми порядка Δ/m_p тоже будем пренебрегать всюду, кроме общего множителя $q^2 - m_n^2$ – он, в отличие от выражения в скобках (A.18), содержит энергию позитрона: $q^2 - m_n^2 = m_p^2 - m_n^2 + 2E_\nu m_p = m_p^2 - m_p^2 - 2m_p \Delta + 2E_\nu m_p = 2m_p(E_\nu - \Delta) = 2m_p E_e$. Таким образом

$$\sigma = 4G_F^2 \cos^2 \theta_c (g_V^2 + 3g_A^2) E_e m_p \Phi_{\text{en}}. \quad (\text{A.19})$$

Перейдем к кинематике реакции и вычислим двухчастичный фазовый объем:

$$\Phi_{\text{en}} = \int \frac{d^3 p_e}{2E_e (2\pi)^3} \frac{d^3 p_n}{2E_n (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sqrt{s} - P_e - P_n), \quad (\text{A.20})$$

$$\delta^{(4)}(\sqrt{s} - P_e - P_n) = \delta(E_\nu + E_p - E_e - E_n) \delta^{(3)}(\vec{k} + \vec{p}_p - \vec{p}_e - \vec{p}_n) \quad (\text{A.21})$$

где $s = (K + P_p)^2$ – мандельштамовская инвариантная переменная, в наших

обозначениях равная q^2 .

Рассмотрим фазовый объем в системе центра масс, обозначаемую дальше $*$, в ней $s = (E_\nu + E_p)^2 - (\vec{k} + \vec{p}_p)^2 = (E_\nu^* + E_p^*)^2$. Проинтегрируем (A.20) по нейтрону, используя 3-дельта-функцию $\delta^{(3)}(-\vec{p}_e^* - \vec{p}_n^*)$, получим

$$\Phi_{\text{en}} = \frac{1}{4(2\pi)^2} \int \frac{d^3 p_e^*}{E_e^* E_n^*(E_e^*)} \delta(\sqrt{s} - E_n^*(E_e^*) - E_e^*), \quad (\text{A.22})$$

где

$$E_n^*(E_e^*) = \sqrt{m_n^2 + p_n^{*2}} = \sqrt{m_n^2 + p_e^{*2}} = \sqrt{m_n^2 + E_e^{*2} - m_e^2} \quad (\text{A.23})$$

Воспользуемся свойством дельта-функции

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(\tilde{x}_i)|} \delta(x - \tilde{x}_i), \quad (\text{A.24})$$

где \tilde{x}_i – нуль $f(x)$. В нашем случае

$$f(E_e^*) = \sqrt{s} - \sqrt{m_n^2 + E_e^{*2} - m_e^2} - E_e^*. \quad (\text{A.25})$$

Из (A.25) найдем

$$\widetilde{E}_e^* = \frac{s - m_n^2 - m_e^2}{2\sqrt{s}}, \quad (\text{A.26})$$

$$|f'(\widetilde{E}_e^*)| = 1 + \frac{\widetilde{E}_e^*}{\sqrt{m_n^2 + \widetilde{E}_e^{*2} - m_e^2}} = 1 + \frac{\widetilde{E}_e^*}{E_n^*} = \frac{E_n^* + \widetilde{E}_e^*}{E_n^*}. \quad (\text{A.27})$$

Подставим (A.26) и (A.27) в (A.24), а затем в (A.22):

$$\Phi_{\text{en}} = \frac{1}{4(2\pi)^2} \int \frac{d^3 p_e^*}{E_e^*} \frac{\delta(E_e^* - \widetilde{E}_e^*)}{E_n^* + E_e^*} = \frac{1}{4(2\pi)^2} \int \frac{p_e^{*2} dp_e^* d\Omega_e^*}{E_e^*} \frac{\delta(E_e^* - \widetilde{E}_e^*)}{E_n^* + E_e^*}. \quad (\text{A.28})$$

Используя равенства $p dp = E dE$ и $E_n^*(\widetilde{E}_e^*) + \widetilde{E}_e^* = \sqrt{s}$ и интегрируя по углам, получим:

$$\Phi_{\text{en}} = \frac{4\pi}{4(2\pi)^2} \int \frac{p_e^* dE_e^*}{E_n^* + E_e^*} \delta(E_e^* - \widetilde{E}_e^*) = \frac{\widetilde{p}_e^*}{4\pi\sqrt{s}}. \quad (\text{A.29})$$

Опуская "тильду" у импульса и возвращаясь к нашим обозначениям $\sqrt{s} = \sqrt{q^2} \approx m_p$, окончательно:

$$\Phi_{\text{en}} = \frac{p_e^*}{4\pi m_p}. \quad (\text{A.30})$$

С учетом приближения бесконечно тяжелого протона можно считать, что $p_e^* = p_e$ – модулю 3-импульса позитрона в лабораторной системе:

$$p_e^* = \frac{p_e - \frac{E_\nu}{E_\nu + m_p} E_e}{\sqrt{1 - \frac{E_\nu^2}{(E_\nu + m_p)^2}}} = \frac{p_e(E_\nu + m_p) - E_e E_\nu}{\sqrt{m_p^2 + 2E_\nu m_p}} = \frac{p_e m_p + E_\nu(p_e - E_e)}{m_p} = p_e + \frac{E_\nu(p_e - E_e)}{m_p}.$$

После подстановки фазового объема в выражение (A.19) получаем окончательное выражение для сечения ОБР

$$\sigma = \frac{1}{\pi} (G_V^2 + 3G_A^2) E_e p_e, \quad (\text{A.31})$$

где введены обозначения $G_V = G_F \cos \theta_c g_v$ и $G_A = G_F \cos \theta_c g_a$.