

Выпускная квалификационная работа аспирантки Куровой А.С.

**«ИССЛЕДОВАНИЕ РОЖДЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНЫХ
МУЛЬТИБОЗОННЫХ СОСТОЯНИЙ В ПРОТОН-ПРОТОННЫХ
СТОЛКНОВЕНИЯХ, НАБЛЮДАЕМЫХ В ЭКСПЕРИМЕНТЕ АТЛАС
НА БОЛЬШОМ АДРОННОМ КОЛЛАЙДЕРЕ»**

Руководитель:

проф. каф. №40 к.ф-м.н
Романюк Анатолий Самсонович

03.07.2020 Москва, Национальный Исследовательский Ядерный Институт “МИФИ”

Цель

изучение процессов совместного рождения электронеutrальных бозонов Стандартной Модели, в том числе поиск аномальных взаимодействий бозонов и сигнатур физики за рамками Стандартной Модели.

Актуальность

Мультибозонные процессы – довольно редкие ($\sigma \sim \text{fb}$) $\Rightarrow$ чувствительный инструмент для проверки или поиска отклонений от Стандартной модели (СМ).

СМ хоть и является завершённой теорией с открытием бозона Хиггса, тем не менее не описывает многие явления, по этой причине ведутся поиски более общей теории. Физика за рамками СМ может косвенно проявляться при низких энергиях, например, посредством аномальных взаимодействий бозонов.

Личный вклад

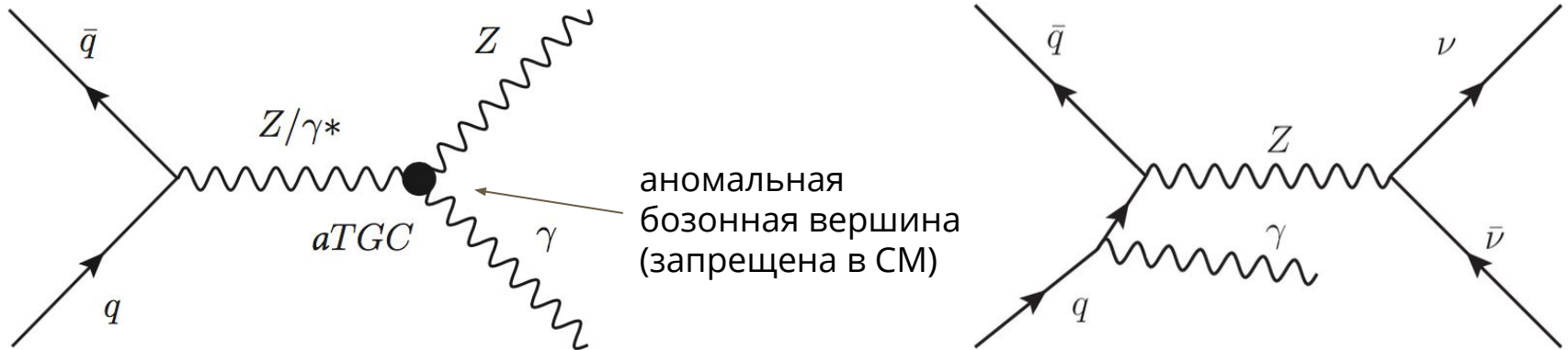
Автором разработаны, модифицированы и реализованы методы оценки фона от неверной идентификации электрона как фотона из данных для процессов $Z(\nu\nu)\gamma$ и $Z(\nu\nu)\gamma+jj$ EWK и оценки фона от неверной идентификации струи как фотона из данных для процесса. Автор внёс определяющий вклад в обработку и анализ экспериментальных данных. При решающем участии автора подготовлены и опубликованы статьи и доклады по теме исследования.

Задачи:

- *получить интегральное и дифференциальные сечения процесса $Z(\nu\nu)\gamma$ на данных pp-столкновений с энергией в СЦИ 13 ТэВ на БАК в АТЛАС за 2015-2016 гг.;*
 - *достигнуть точности измерения сечения до уровня 10%, чтобы сравнить измеренные сечения с теоретическими предсказаниями, учитывающими поправки КХД второго рода и поправки КЭД первого рода;*
 - *провести поиск аномальных бозонных взаимодействий посредством наложения ограничений на параметры тройных и четверных нейтральных аномальных бозонных вершин из Эффективной теории поля*
 - *получить интегральное сечение процесса $Z(\nu\nu)\gamma + jj$ EWK на данных pp-столкновений с энергией в СЦИ 13 ТэВ на БАК в АТЛАС за 2015-2018 гг.;*
- 
- *разработать и оптимизировать методов оценки фоновых процессов с неверной идентификацией объектов (электронов как фотонов и адронных струй как фотонов) из данных для достижения наименьшей возможной погрешности для измерения сечений;*

Введение

- В данной работе будет приведен поиск ассоциированного рождения $Z(\nu\nu)\gamma$ на данных pp-столкновений на БАК с энергией в СЦИ 13 ТэВ, набранных экспериментом АТЛАС в 2015-2016 гг. (36,1 фб⁻¹)
- сигнатура процесса: **высокоэнергичный фотон** (изолированный фотон с $p_T > 150$ ГэВ) **и большое значение недостающей энергии в поперечной плоскости детектора** ($E_T^{\text{miss}} > 150$ ГэВ)



- вероятность распада в нейтринный канал значительно больше, чем лептонный, что позволяет исследовать область более высоких энергий E_T^{γ} , где чувствительность к аномальным вершинам возрастает.

Фоновые процессы, имитирующие сигнатуру процесса $Z(\nu\nu)\gamma$ в детекторе АТЛАС

в порядке убывания вклада в общее число измеренных событий

- $\tau\nu\gamma$ и $l\nu\gamma$ от совместного рождения $W\gamma$: τ распадается на адроны, или e или μ от распада τ или W не регистрируется детектором ($\approx 17\%$);
- γ +струи: большой E_T^{miss} возникает из комбинации реального E_T^{miss} от нейтрино в распадах тяжелых кварков и от неверно измеренной энергии струй ($\approx 11\%$);
- $W(e\nu)$, $t\bar{t}$ и моно- t : e в конечном состоянии неверно идентифицируется как γ ($\approx 8\%$)
- $Z(\nu\nu)$ +струи и многоструйные события: одна из струй неверно идентифицируется как фотон ($\approx 4\%$);
- $Z(l\bar{l})+\gamma$ (преимущественно τ): τ распадается на адроны или e или μ из распада τ или Z не регистрируется ($\approx 1\%$).

В работе будут показаны методы оценки фоновых процессов от неверной идентификации $e\rightarrow\gamma$ и струя $\rightarrow\gamma$ из данных, разработанные и реализованные автором.

Вероятность неверной идентификации не может быть оценена из Монте-Карло корректно, в виду несовершенства симуляции в настоящее время.

Результаты измерений будут представлены для случая без ограничения на число струй в событии (инклюзивного) и с требованием на отсутствие адронных струй в событии (эксклюзивного)

Неверная идентификация электрона как фотона ($e \rightarrow \gamma$)

Метод оценки:

1. частота неверной идентификации $e \rightarrow \gamma$:

$$rate_{e \rightarrow \gamma} = \frac{(N_{e\gamma} - N_{bkg})}{(N_{ee} - N_{bkg})},$$

где $N_{e\gamma}$, N_{ee} – число событий с парами ee and $e\gamma$ в массовом окне вокруг Z-пики ($M_Z - 10$ GeV, $M_Z + 10$ GeV),

N_{bkg} – усредненное число событий окнах “фона”:

($M_Z - 40$ ГэВ, $M_Z - 20$ ГэВ) и ($M_Z + 20$ ГэВ, $M_Z + 40$ ГэВ).

Дополнительное подавление фоновых событий $W\gamma$:

$$E_T^{\text{miss}} < 40 \text{ ГэВ}$$

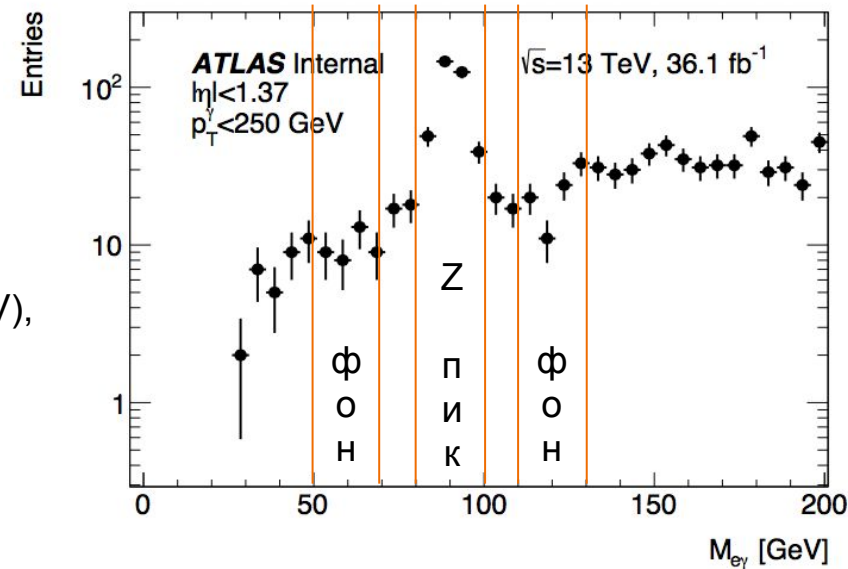
Отбор пар $e\gamma$:

“сигнальный” фотон с $p_T > 150$ ГэВ, выбранный электрон с $p_T > 25$ ГэВ

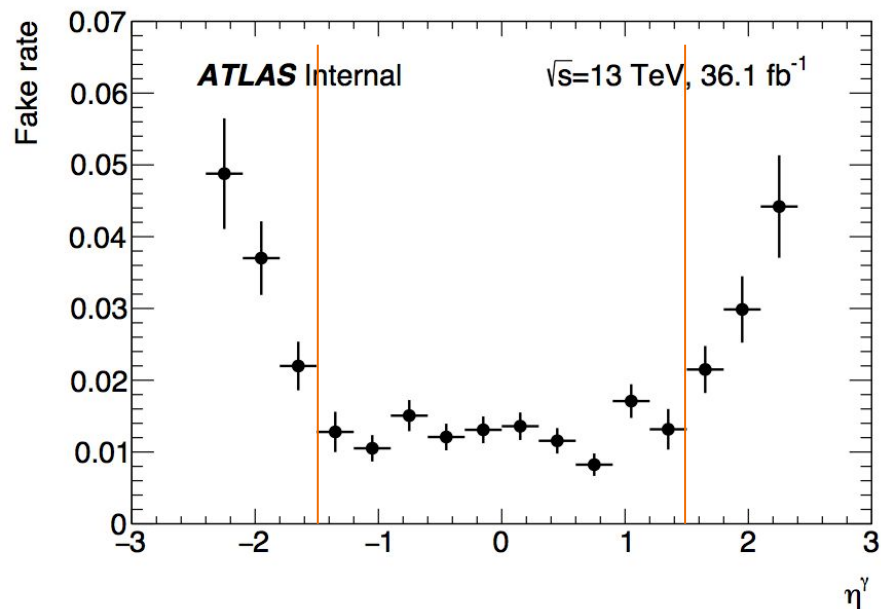
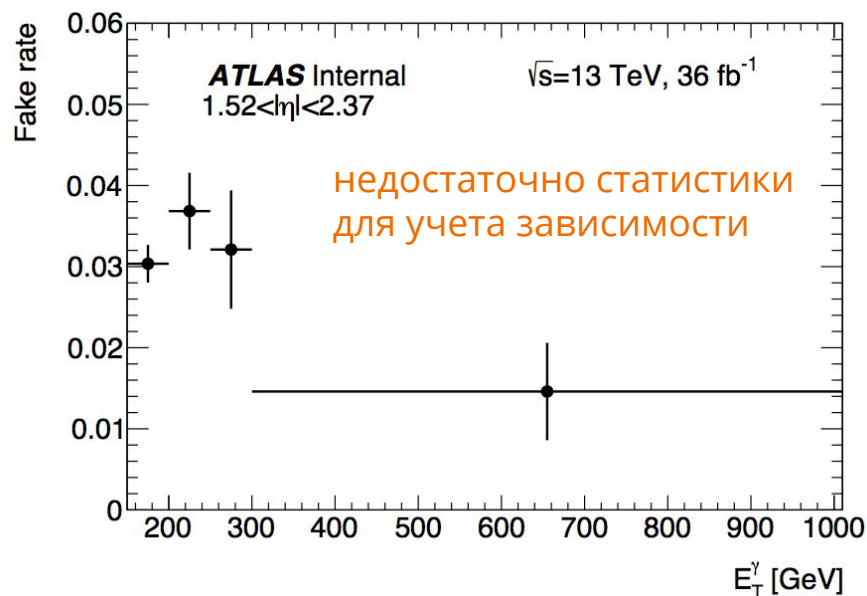
Отбор пар ee :

выбранный электрон с $p_T > 150$ ГэВ, выбранный электрон с противоположным зарядом и $p_T > 25$ ГэВ

2. построение e -проб контрольной области (сигнальная область (см. доп. слайды), в которой вместо фотона выбран электрон с $p_T > 150$ ГэВ)
3. распределения данных в e -проб контрольной области нормируются на частоту $e \rightarrow \gamma$



Учет зависимости частоты $e \rightarrow \gamma$ от η и p_T фотона

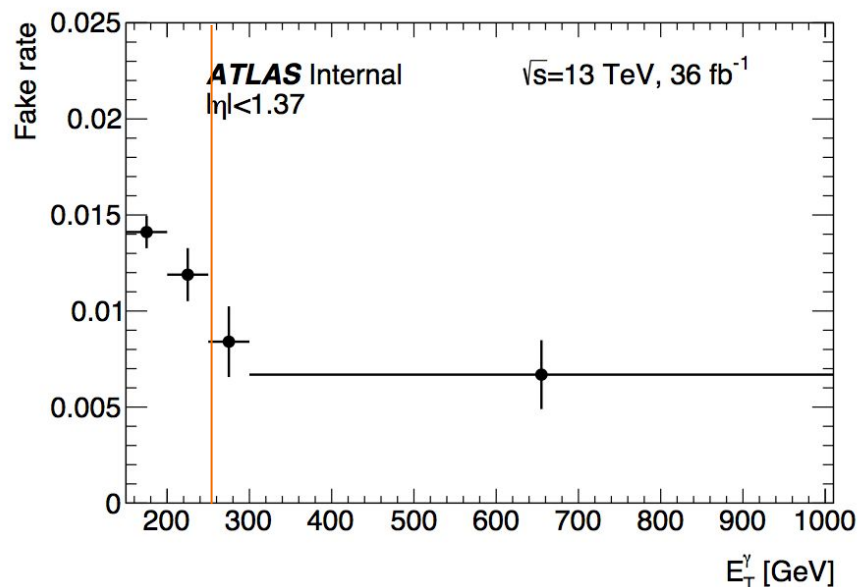


Частота $e \rightarrow \gamma$ зависит от η и p_T фотона $\Rightarrow$
 оценивается в трех областях:

$|\eta| < 1.37, p_T < 250 \text{ GeV}$

$|\eta| < 1.37, p_T > 250 \text{ GeV}$

$1.52 < |\eta| < 2.37$



$e \rightarrow \gamma$: Систематические погрешности метода

Компоненты систематической погрешности для частоты:

- Вариация окон для оценки фона под Z пиком (от 0.6% до 3.2% в зависимости от η и p_T)
- вариация ширины массового окна Z пика (от 2.8% до 6.5%)
- Разница между "истинной" частотой $e \rightarrow \gamma$ в Z(ee) МК и оценки описанным методом в Z(ee) МК (от 2.7% до 10.7%)
- разница между "истинной" частотой $e \rightarrow \gamma$ в Z(ee) и W(ev) МК (от 6.8% до 25.9%)

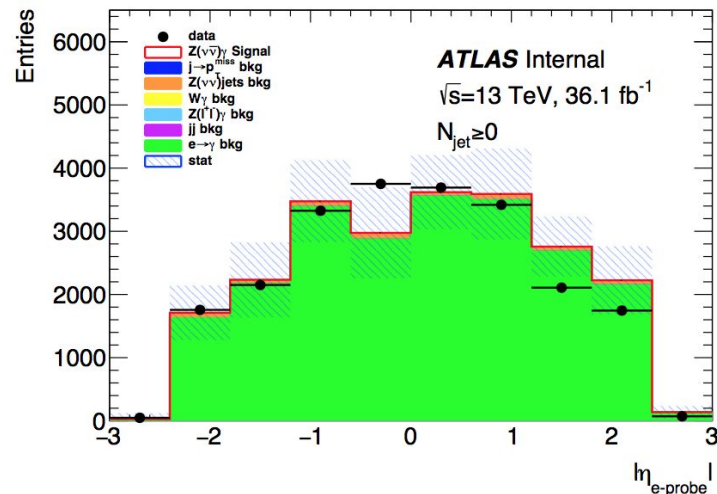
	Частота $e \rightarrow \gamma$	
	$150 < E_T^\gamma < 250 \text{ GeV}$	$E_T^\gamma > 250 \text{ GeV}$
$0 < \eta < 1.37$	$0.0112 \pm 0.0008 \pm 0.0015$	$0.0063 \pm 0.0014 \pm 0.0014$
$1.52 < \eta < 2.37$	$0.0271 \pm 0.0020 \pm 0.0070$	

Таблица 3.5. Частота неверной идентификации электрона как фотона, полученная в данных в областях, разделенных по E_T и η фотона. Первая погрешность - статистическая, вторая - систематическая.

Общая систематическая погрешность на частоту $e \rightarrow \gamma$ не превышает 26%

Систематическая ошибка на оценку ассоциированных фоновых процессов не превышает 14%

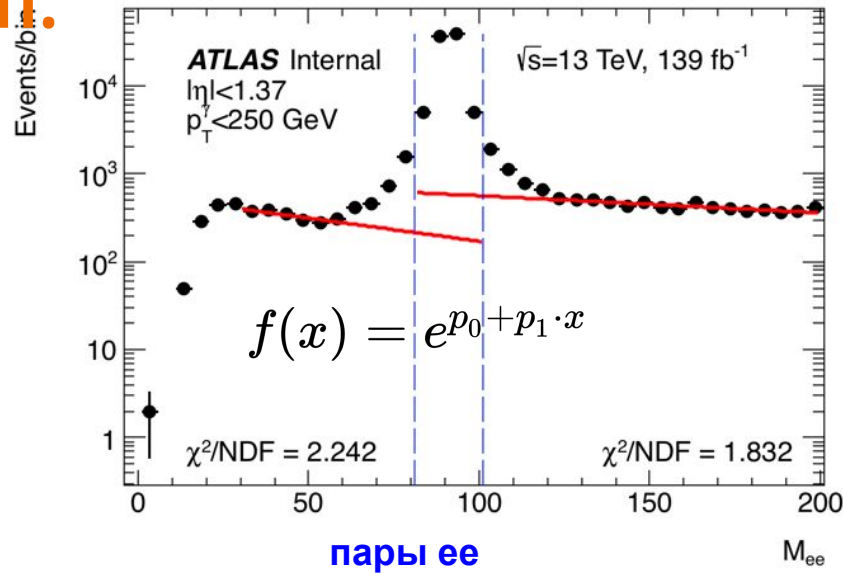
Кинематическое распределение в е-проб КО



Загрязненность е-проб КО другими фоновыми процессами используется как дополнительная систематическая погрешность: 3% (2% для эксклюзивного случая)

е→γ: оценка фона под Z пиком для данных 2015-2018

гг.



фит слева в интервале (30,60)
фит справа в интервале (120,200)

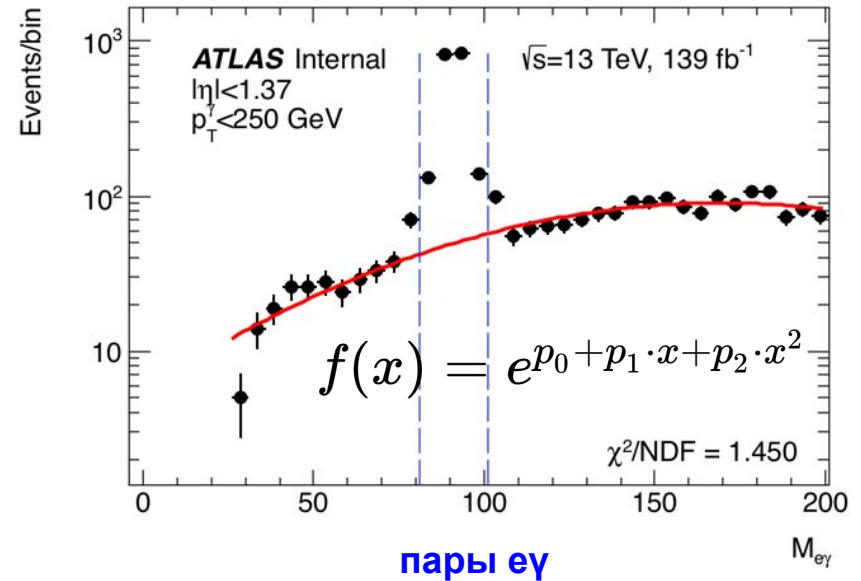
Производится экстраполяция фитирующих функций в область Z пика. Вычисляются интегралы функций в этой области: N_{min} и N_{max}

Их среднее N_{ee}^{bkg} используется

в расчете частоты:

$$N_{average}^{bkg} = \frac{N_{min}^{bkg} + N_{max}^{bkg}}{2}$$

Значения N_{min} и N_{max} используются для вариации N_{ee}^{bkg} . В парах eγ по одному варьируются параметры фитирующей функции на величину их статистической погрешности, результирующий интеграл функции используется как вариация N_{ey}^{bkg} . Итоговая систематическая ошибка вычисляется как сумма в квадрате наибольших вариаций of N_{ey}^{bkg} and N_{ee}^{bkg} .



одновременный фит в интервалах
(25,70)&&(110,200)

Фитирующая функция экстраполируется в область под Z пиком, для расчета частоты используется её интеграл в этой области N_{ey}^{bkg}

Систематическая ошибка на оценку фона под пиком вычисляется вариацией числа N^{bkg} в ee и eγ парах.

$e \rightarrow \gamma$: изменения в систематических погрешностях метода для данных 2015-2018 гг.

Компоненты систематической погрешности для частоты:

- вариация ширины массового окна Z пика (от 0.3% до 0.6% в зависимости от η и p_T)
- Разница между "истинной" частотой $e \rightarrow \gamma$ в $Z(ee)$ МК и оценки описанным методом в $Z(ee)$ МК (от 3% до 13.4%)
- Вычитание фона под Z пиком (от 3.2% до 10.8%)
- ~~разница между "истинной" частотой $e \rightarrow \gamma$ в $Z(ee)$ и $W(e\nu)$ МК (т.к. связана с различием кинематических распределений и статистической погрешностью)~~

частота $e \rightarrow \gamma$		
	$150 < E_T^\gamma < 250 \text{ GeV}$	$E_T^\gamma > 250 \text{ GeV}$
$0 < \eta < 1.37$	$0.0205 \pm 0.0005 \pm 0.0010$	$0.0183 \pm 0.0012 \pm 0.0032$
$1.52 < \eta < 2.37$	$0.0571 \pm 0.0016 \pm 0.0053$	

абсолютное значение частоты $e \rightarrow \gamma$ в данных 2015-2018 гг выше из-за изменений в реконструкции конверсионных фотонов

Таблица 3.9. Частота неверной идентификации электрона как фотона в областях, разделенных по E_T и η фотона. Первая погрешность – статистическая, вторая – систематическая.

Общая систематическая погрешность на частоту $e \rightarrow \gamma$ не превышает 17.2% (в наименее стат. обеспеченном регионе) (улучшение на 8.7%)

Статистическая погрешность на частоту $e \rightarrow \gamma$ используется как компонент систематики в оценке фона от этого процесса

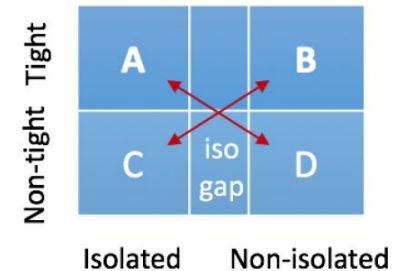
Систематическая ошибка на оценку фона не превышает 4.6% (улучшено на 9.4%)

Метод оценки неверной идентификации адронной струи как фотона

Метод четырех контрольных областей, ортогональных по изолированности и идентификационному критерию фотонов, используется для оценки неверной идентификации струи как фотона.

Рассматриваются следующие КР:

- А: “жесткий” фотон, изолированный
- В: “жесткий” фотон, неизолированный
- С: “нежесткий” фотон, изолированный
- D: “нежесткий” фотон, неизолированный



фактор R	Loose'3	Loose'4	Loose'5
МК	1.08 ± 0.24	1.0 ± 0.2	1.08 ± 0.20
Данные	0.9 ± 0.3	0.95 ± 0.24	0.96 ± 0.24

Предположения, лежащие в основе метода:

- Изоляция не коррелирует с “нежестким” критерием
- Количество сигнальных событий в регионах В, С, D пренебрежимо мало

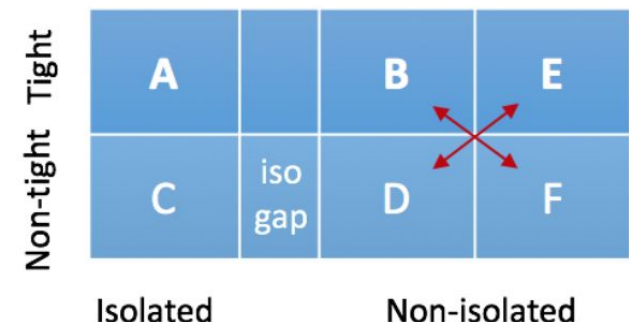
корреляционный фактор $\longrightarrow R = \frac{N_A N_D}{N_B N_C}$

оценка корреляции в данных

в идеале число событий фона можно рассчитать как

$$\frac{N_A^{jet \rightarrow \gamma}}{N_B} = \frac{N_C}{N_D}$$

$$R = \frac{N_{B-E}^{data} N_F^{data}}{N_{D-F}^{data} N_E^{data}}$$



Метод оценки неверной идентификации адронной струи как фотона: результаты и систематические погрешности

“утечки”
сигнала из
сигнальной
области в КО
B,C,D

$$c_B = \frac{N_B^{Z(\nu\bar{\nu})\gamma}}{N_A^{Z(\nu\bar{\nu})\gamma}};$$

$$c_C = \frac{N_C^{Z(\nu\bar{\nu})\gamma}}{N_A^{Z(\nu\bar{\nu})\gamma}};$$

$$c_D = \frac{N_D^{Z(\nu\bar{\nu})\gamma}}{N_A^{Z(\nu\bar{\nu})\gamma}};$$

Систематические погрешности:

- от определения областей (27%)
- от моделирования изоляции и идентификации в МК (9.5%)

$$\bullet \sigma_{iso}^{c_B} = \delta_{iso}^{eff} * (c_B + 1)/c_B$$

$$\bullet \sigma_{ID}^{c_C} = \delta_{ID}^{eff} * (c_C + 1)/c_C$$

$$\bullet \sigma_{iso}^{c_D} = \delta_{iso}^{eff} * (c_D + 1)/c_D$$

$$\bullet \sigma_{ID}^{c_D} = \delta_{ID}^{eff} * (c_D + 1)/c_D$$

Параметры «Утечки сигнала»	Sherpa 2.1
c_B	0.0275 ± 0.0008
c_C	0.0293 ± 0.0008
c_D	0.00102 ± 0.00012

Центральное значение	169 ± 25
Loose'3	+46
Loose'5	± 0
Изоляционный промежуток +1 ГэВ	+10
Изоляционный промежуток -1 ГэВ	+4

Таблица 3.3. Центральное значение фона $jet \rightarrow \gamma$ из данных и отклонения от него для вариаций определения областей ABCD.

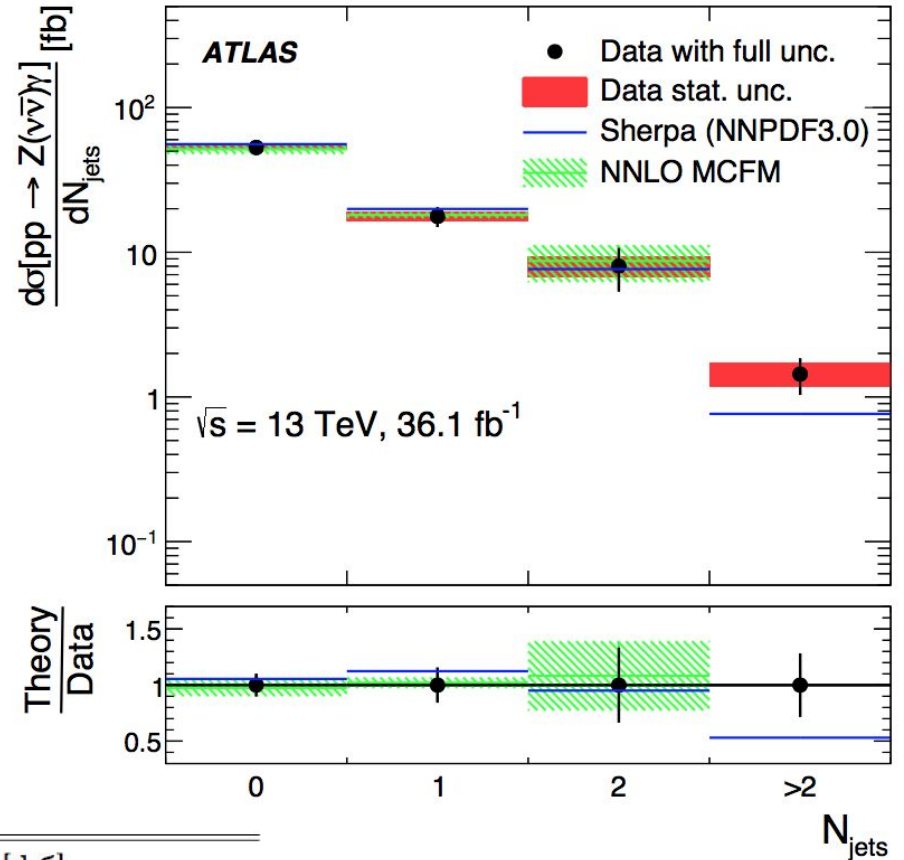
Общая систематическая погрешность составляет 28.6%

Результаты измерения процесса $Z(\nu\nu)\gamma$ в данных 2015-2016 гг.

	$N_{\text{струи}} \geq 0$	$N_{\text{струи}} = 0$
$N^{W\gamma}$	$646 \pm 39 \pm 60$	$356 \pm 22 \pm 33$
$N^{\gamma+\text{струи}}$	$409 \pm 18 \pm 108$	$219 \pm 10 \pm 58$
$N^{e\rightarrow\gamma}$	$320 \pm 15 \pm 45$	$254 \pm 12 \pm 35$
$N^{\text{струи}\rightarrow\gamma}$	$169 \pm 25 \pm 48$	$143 \pm 22 \pm 41$
$N^{Z(l)\gamma}$	$40 \pm 3 \pm 3$	$26 \pm 3 \pm 2$
$N_{\text{фон. общее}}$	$1584 \pm 52 \pm 140$	$998 \pm 35 \pm 86$
$N_{\text{сигнал (ожд.)}}$	$2328 \pm 4 \pm 135$	$1710 \pm 4 \pm 91$
$N_{\text{ожд. общее}}$	$3912 \pm 52 \pm 194$	$2708 \pm 35 \pm 125$
$N_{\text{данных (набл.)}}$	3812	2599

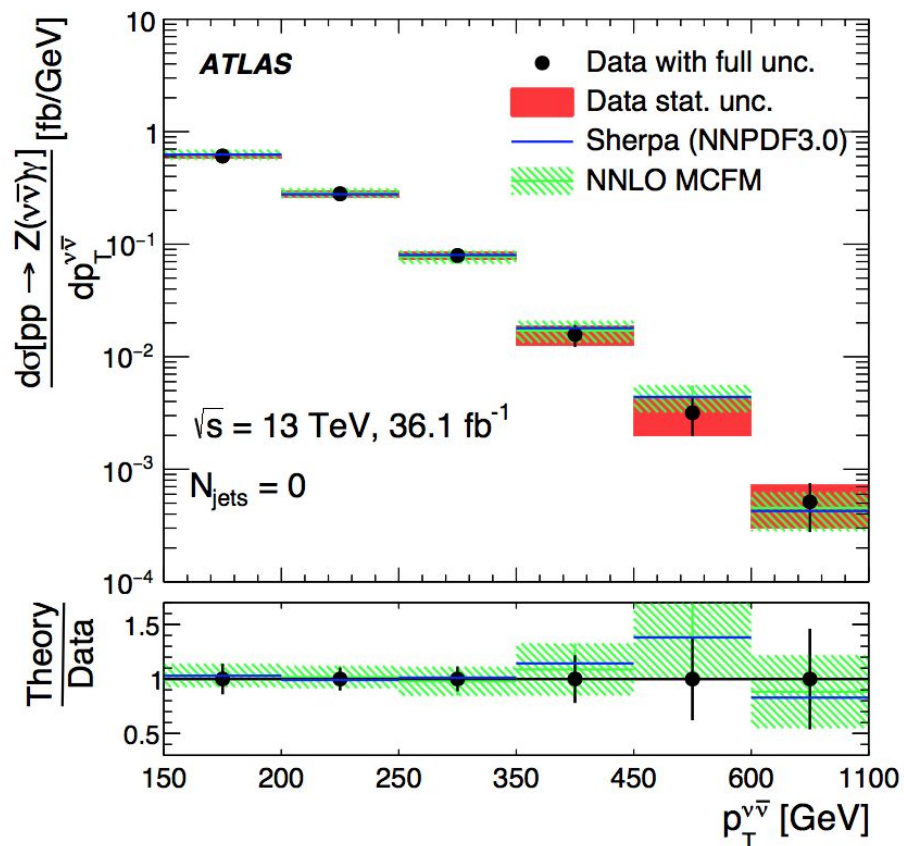
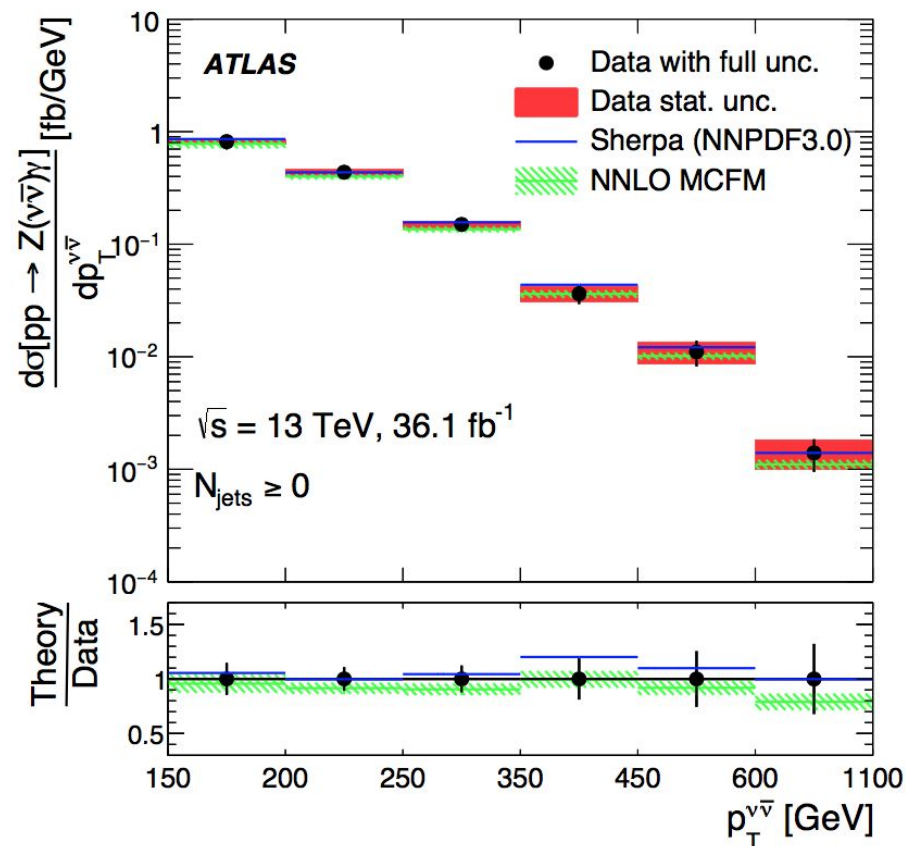
Измеренные сечения согласуются с предсказанием NNLO MCFM в пределах погрешности

σ [фб]	σ [фб]
Измерение	предсказание NNLO MCFM
$N_{\text{струи}} \geq 0$	
$83.7^{+3.6}_{-3.5}(\text{stat.})^{+6.9}_{-6.2}(\text{sys.})^{+1.7}_{-2.0}$ (светимость)	$78.1 \pm 0.2 \pm 4.4$
$N_{\text{струи}} = 0$	
$52.4^{+2.4}_{-2.3}(\text{stat.})^{+4.0}_{-3.6}(\text{sys.})^{+1.2}_{-1.1}$ (светимость)	$55.9 \pm 0.1 \pm 2.5$



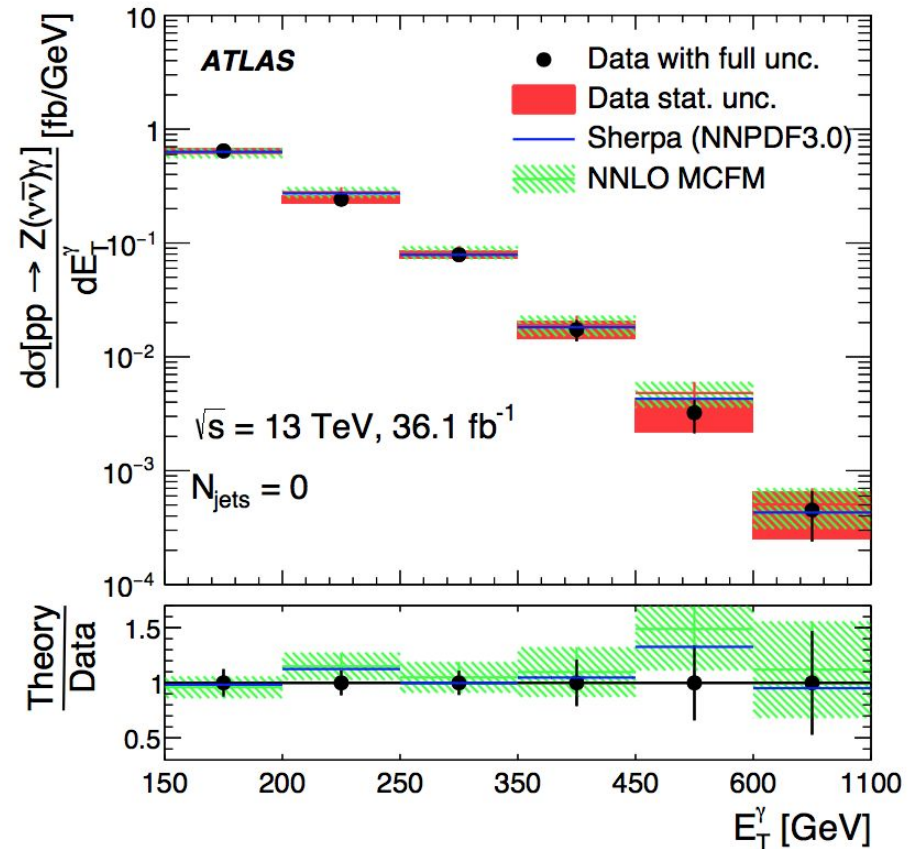
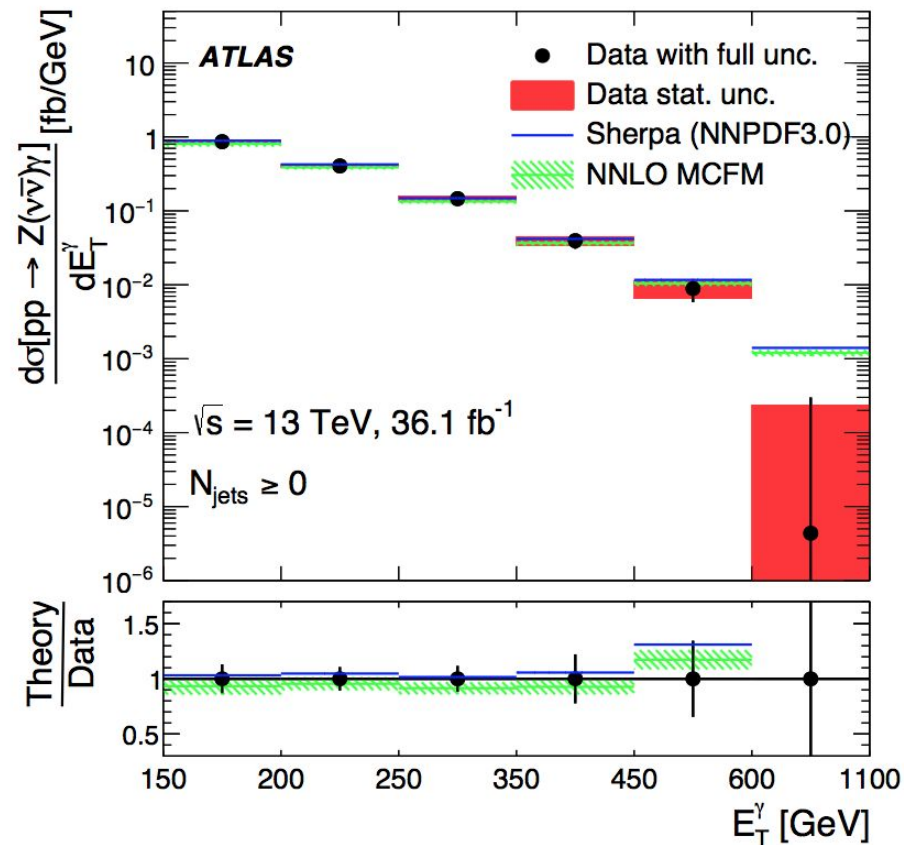
Измеренное **впервые** для $Z(\nu\nu)\gamma$ дифференциальное сечение по множественности струй согласуется с предсказаниями MCFM и Sherpa в пределах погрешности

Результаты измерения процесса $Z(\nu\nu)\gamma$ в данных 2015-2016 гг.



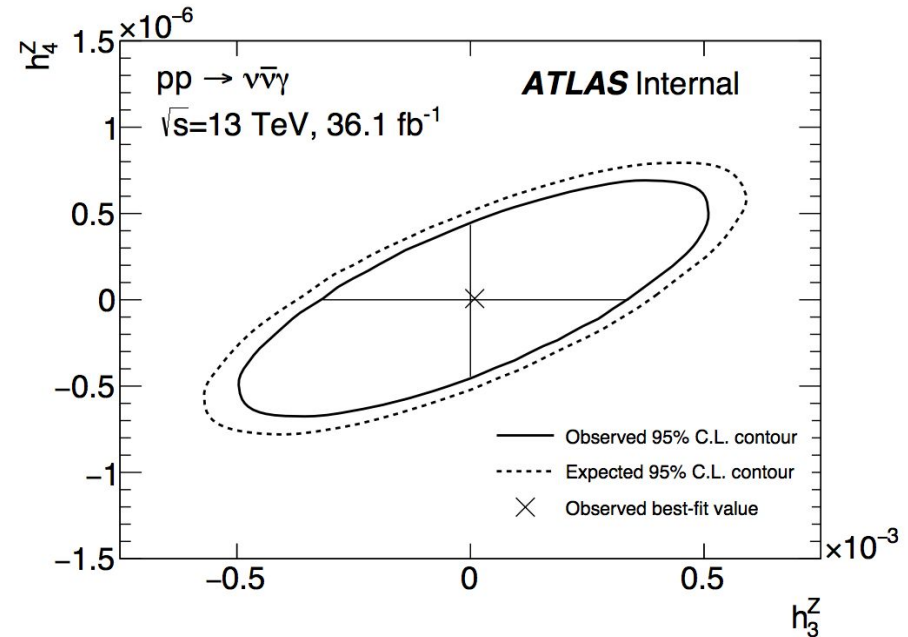
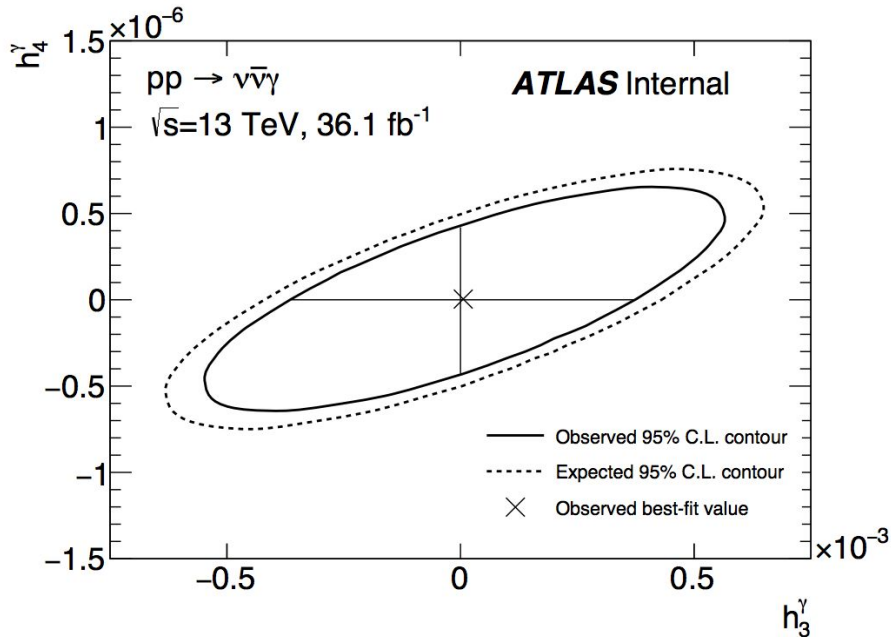
Измеренные дифференциальные сечения по поперечному импульсу системы нейтрино для инклюзивного и эксклюзивного случаев получены для этого процесса **впервые** и согласуются с предсказаниями MCFM и Sherpa в пределах погрешности

Результаты измерения процесса $Z(\nu\bar{\nu})\gamma$ в данных 2015-2016 гг.



Измеренные дифференциальные сечения по поперечному импульсу фотона для инклюзивного и эксклюзивного случаев получены для этого процесса **впервые** и согласуются с предсказаниями MCFM и Sherpa в пределах погрешности

Результаты наложения пределов на параметры аномальных вершин в процессе $Z(\nu\nu)\gamma$ в данных 2015-2016 гг.



Поскольку отклонений от предсказаний СМ не было найдено

Параметр	Пределы 95% У.Д.	
	Измеренные [ТэВ^{-4}]	Ожидаемые [ТэВ^{-4}]
$C_{\tilde{B}W}/\Lambda^4$	(-1.1, 1.1)	(-1.3, 1.3)
C_{BW}/Λ^4	(-0.65, 0.64)	(-0.74, 0.74)
C_{WW}/Λ^4	(-2.3, 2.3)	(-2.7, 2.7)
C_{BB}/Λ^4	(-0.24, 0.24)	(-0.28, 0.27)

Впервые поставлены пределы на параметры аномальных трехбозонных вершин $ZZ\gamma$ и $Z\gamma\gamma$ в формализме Эффективной теории поля $C_{\tilde{B}W}/\Lambda^4$, C_{BW}/Λ^4 , C_{WW}/Λ^4 и C_{BB}/Λ^4 , которые на момент написания работы остаются *наиболее жесткими*, установленными на эти параметры

Заключение

1. *Разработаны* методы оценки фонов из данных с неверной идентификацией объектов (электрона и струи как фотона) для процессов $Z(\nu\nu)\gamma$ и $Z(\nu\nu)\gamma + jj$ EWK.
2. *Впервые измерено* интегральное сечение процесса $Z(\nu\nu)\gamma$ на данных 2015-2016 годов при энергии сталкивающихся протонов равной 13 ТэВ и с точностью порядка 10% (ранее 30-50% при 7 ТэВ), что позволило сравнить измеренное сечение с теоретическими предсказаниями, учитывающими поправки КХД второго рода и поправки КЭД первого рода. Результаты совпадают с предсказанием в пределах погрешности.
3. *Впервые измерено* дифференциальное сечение процесса $Z(\nu\nu)\gamma$ на данных 2015-2016 годов при энергии сталкивающихся протонов равной 13 ТэВ по множественности струй и по поперечному импульсу нейтрино-антинейтринной пары.
4. *Впервые поставлены* пределы на параметры аномальных трехбозонных вершин $ZZ\gamma$ и $Z\gamma\gamma$ в формализме Эффективной теории поля $C_{\tilde{B}W}/\Lambda^4$, C_{BW}/Λ^4 , C_{WW}/Λ^4 и C_{BB}/Λ^4 , которые на момент написания работы остаются *наиболее жесткими*, установленными на эти параметры.
5. С использованием разработанных методов планируется *впервые* измерить сечение процесса $Z(\nu\nu)\gamma + jj$ EWK

Спасибо за внимание!

Дополнительные слайды

Отборы	Значение порога
E_T^{miss}	$> 150 \text{ ГэВ}$
E_T^γ	$> 150 \text{ ГэВ}$
число «жестких» изолированных фотонов	$n_\gamma = 1$
вето на лептоны	$n_e = 0, n_\mu = 0$
значимость E_T^{miss}	> 10.5
$\Delta\phi(\vec{p}_T^{miss}, \gamma)$	$> \pi/2$

Таблица 2.1. Критерии отбора для событий кандидатов процесса $Z(\nu\bar{\nu})\gamma$.

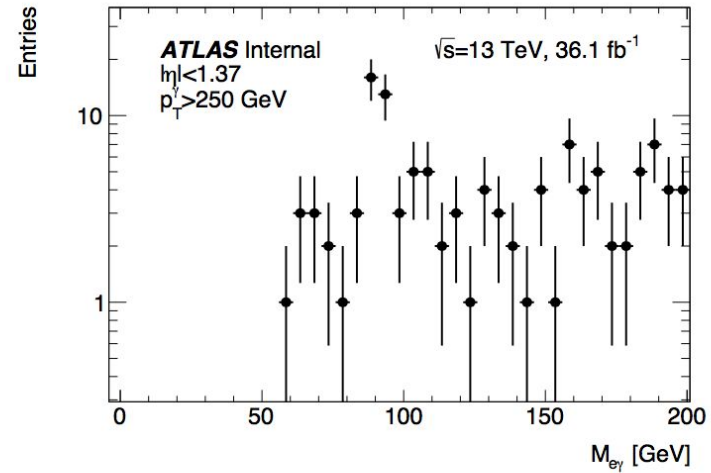
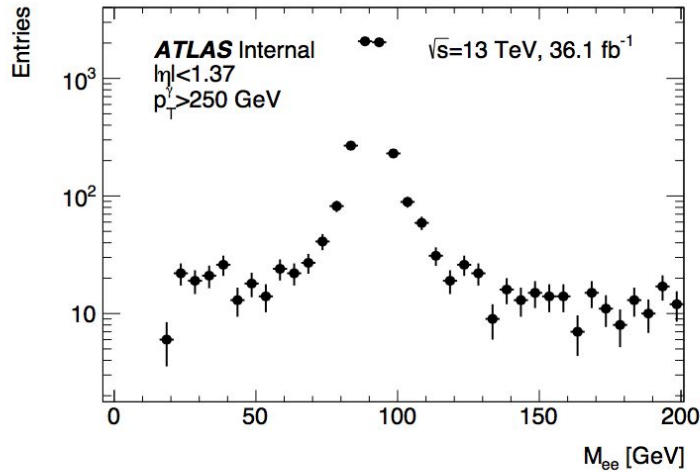
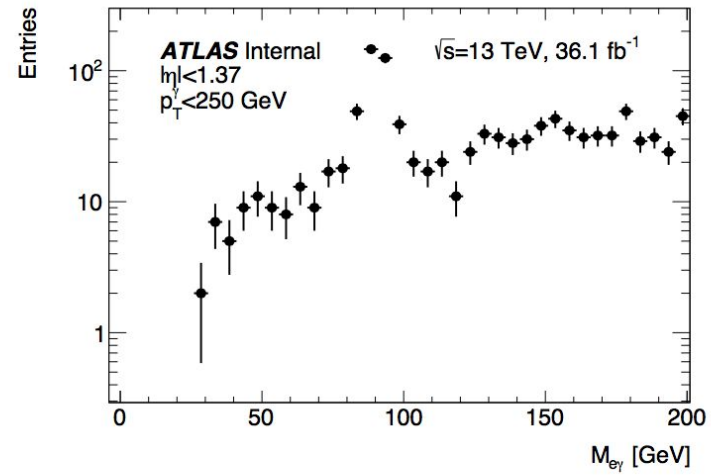
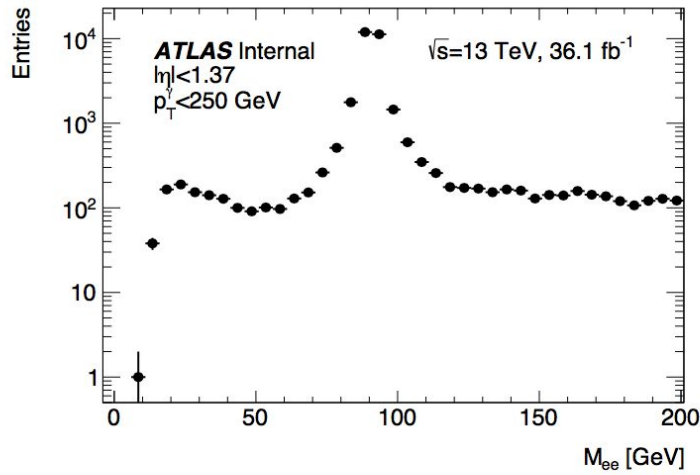
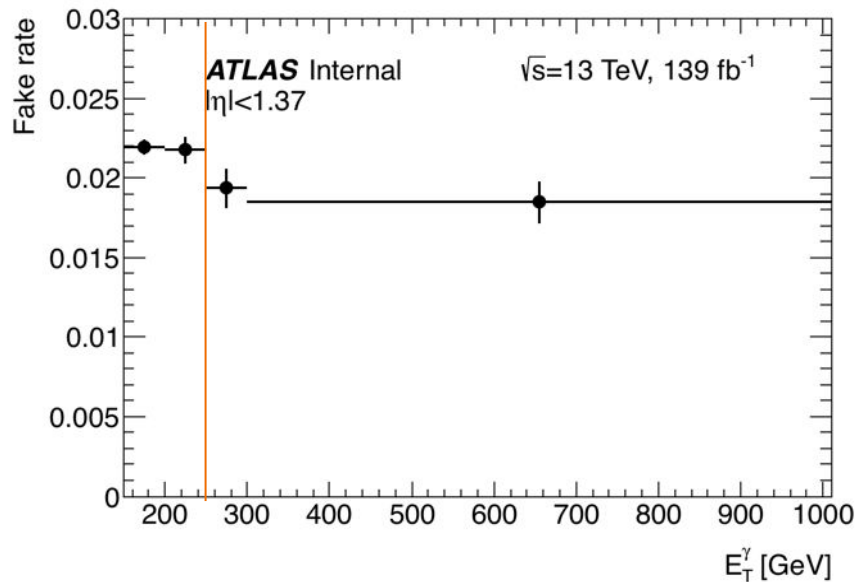
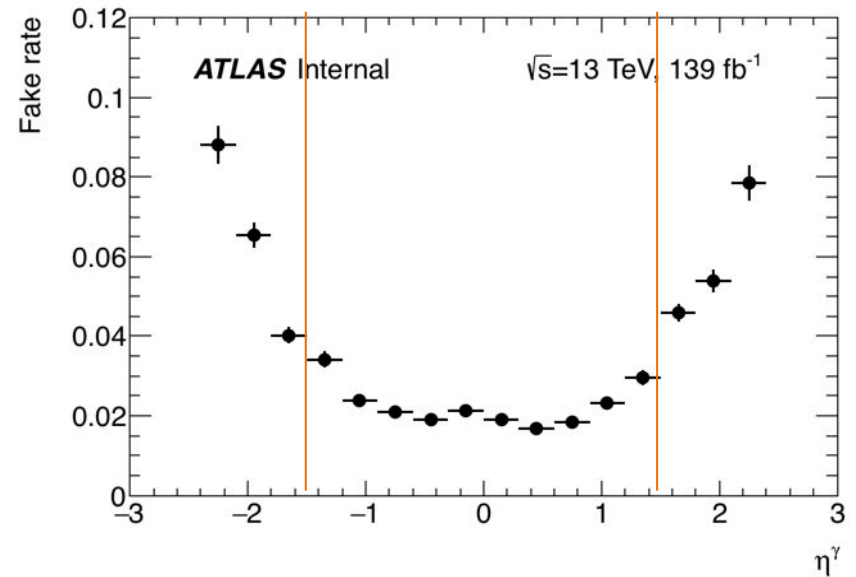
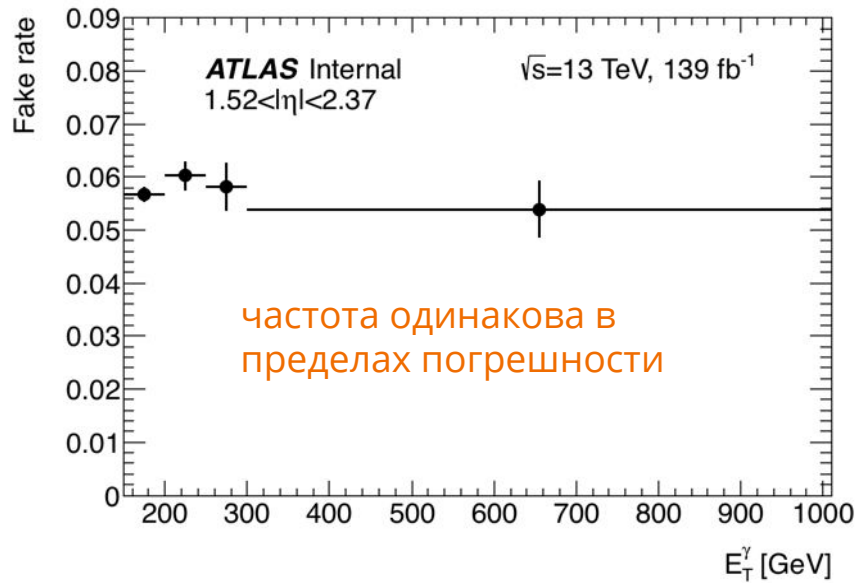


Рис. 3.3.7. Распределения по инвариантной массе e - e (слева) и e - γ (справа) пар. Верхние распределения выполнены для проб-частицы в центральной области ($|\eta| < 1.37$) и для малых p_T ($150 < p_T < 250$ ГэВ), нижние - для центральной области с высоким p_T ($p_T > 250$ ГэВ).

Учет зависимости частоты $e \rightarrow \gamma$ от η и p_T фотона (данные 2015-2018 гг.)

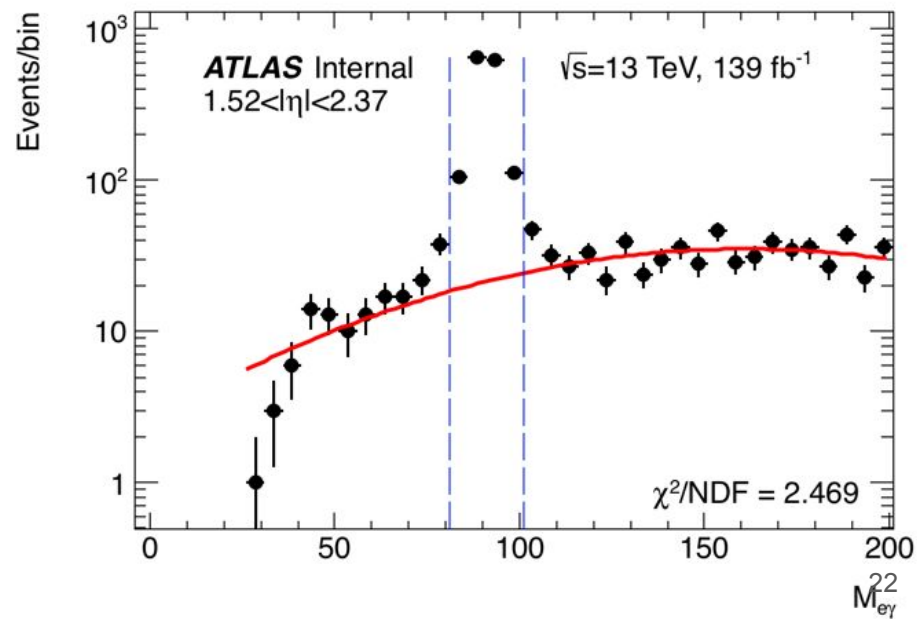
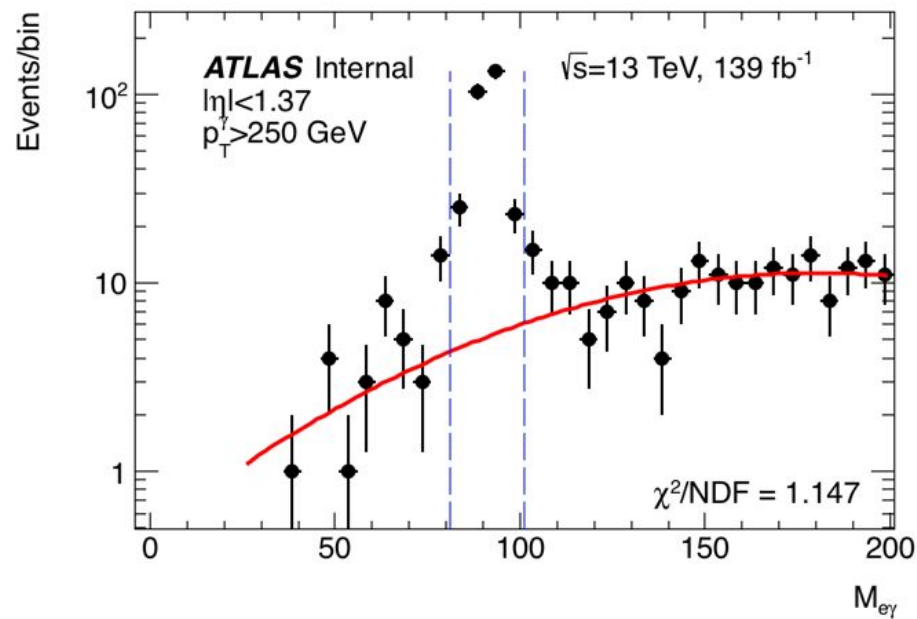
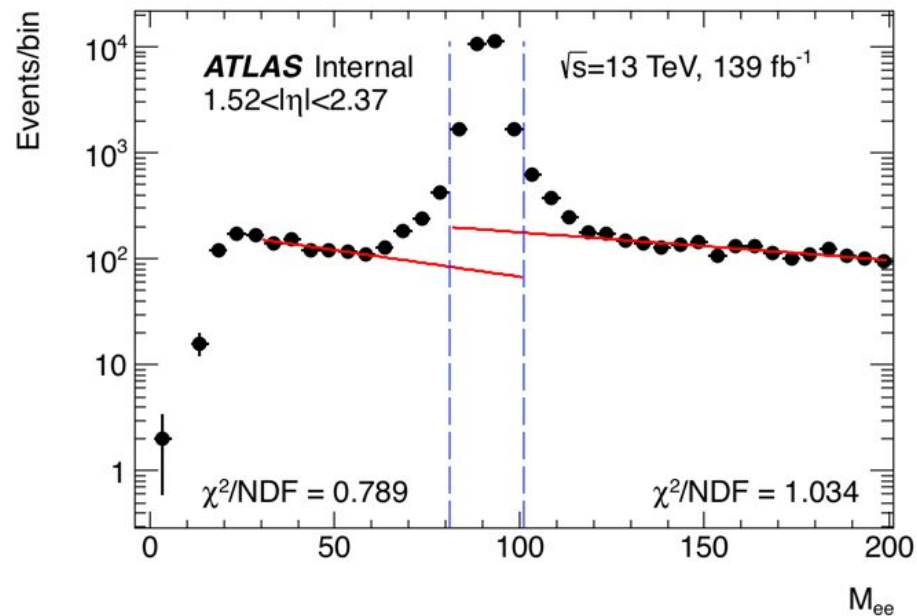
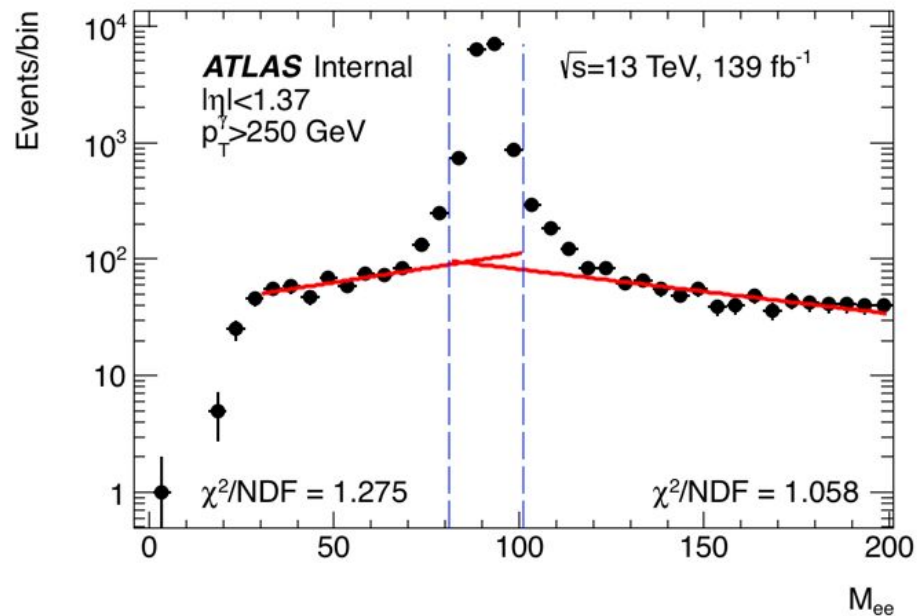


Частота $e \rightarrow \gamma$ зависит от η и p_T фотона $\Rightarrow$ оценивается в трех областях:

$|\eta| < 1.37$, $p_T < 250$ GeV

$|\eta| < 1.37$, $p_T > 250$ GeV

1.52 < $|\eta|$ < 2.37



Оценка частоты с усредненным числом событий под пиком из окон справа и слева от него

данные 2015-2018	частота $e \rightarrow \gamma$
$ \eta < 1.37, p_T < 250 \text{ GeV}$	0.0197 ± 0.0004
$ \eta < 1.37, p_T > 250 \text{ GeV}$	0.0177 ± 0.0004
$1.52 < \eta < 2.37$	0.0548 ± 0.0012

частота $e \rightarrow \gamma$		
	$150 < E_T^\gamma < 250 \text{ GeV}$	$E_T^\gamma > 250 \text{ GeV}$
$0 < \eta < 1.37$	$0.0205 \pm 0.0005 \pm 0.0010$	$0.0183 \pm 0.0012 \pm 0.0032$
$1.52 < \eta < 2.37$	$0.0571 \pm 0.0016 \pm 0.0053$	

Таблица 3.9. Частота неверной идентификации электрона как фотона в областях, разделенных по E_T и η фотона. Первая погрешность – статистическая, вторая – систематическая.

$$\begin{aligned}
N_A &= N_A^{Z(\nu\bar{\nu})\gamma} + N_A^{EWK} + N_A^{jet\rightarrow\gamma}; \\
N_B &= c_B N_A^{Z(\nu\bar{\nu})\gamma} + N_B^{EWK} + N_B^{jet\rightarrow\gamma}; \\
N_C &= c_C N_A^{Z(\nu\bar{\nu})\gamma} + N_C^{EWK} + N_C^{jet\rightarrow\gamma}; \\
N_D &= c_D N_A^{Z(\nu\bar{\nu})\gamma} + N_D^{EWK} + N_D^{jet\rightarrow\gamma};
\end{aligned}$$

N_i^{EWK} - соответствует
фоновым процессам кроме
струя $\rightarrow \gamma$ в каждой области

$$N_A^{Z(\nu\bar{\nu})\gamma} = N_A - (N_B - c_B N_A^{Z(\nu\bar{\nu})\gamma}) \frac{N_C - c_C N_A^{Z(\nu\bar{\nu})\gamma}}{N_D - c_D N_A^{Z(\nu\bar{\nu})\gamma}}.$$

$$a = c_D - c_B c_C;$$

$$b = N_D + c_D N_A - (c_B N_C + c_C N_B);$$

$$c = N_D N_A - N_C N_B.$$

$$N_A^{Z(\nu\bar{\nu})\gamma} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

типы «нежестких» фотонов (loose'), в которых по крайней мере один из следующих критериев должен нарушаться:

- loose'2: w_{s3}, F_{side}
- loose'3: $w_{s3}, F_{side}, \Delta E$
- loose'4: $w_{s3}, F_{side}, \Delta E, E_{ratio}$
- loose'5: $w_{s3}, F_{side}, \Delta E, E_{ratio}, w_{tot}$